

LÍMITES DE FUNCIONES. CONTINUIDAD Y RAMAS INFINITAS

Página 272

PARA EMPEZAR, REFLEXIONA Y RESUELVE

El valor de la función $f(x) = \frac{x^2 + 4x - 45}{2x - 10}$ para $x = 5$ no se puede obtener directamente porque el denominador se hace cero. Lo obtendremos por aproximaciones sucesivas, dando a x los valores 4; 4,9; 4,99; ...

■ Comprueba que:

$$f(4) = 6,5; f(4,9) = 6,95; f(4,99) = 6,995$$

■ Calcula $f(4,999)$; $f(4,9999)$; $f(4,99999)$; ...

■ ¿Te parece razonable afirmar que, cuando x se aproxima a 5, el valor de $f(x)$ se aproxima a 7? Lo expresamos así: $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 7$

■ Si $f(x) = \frac{x^2 + 4x - 45}{2x - 10}$, entonces:

$$f(4,999) = 6,9995; f(4,9999) = 6,99995; f(4,99999) = 6,999995$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 7$$

■ Calcula, análogamente, $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 6x - 27}{2x - 6}$.

■ $f(2) = 5,5$; $f(2,9) = 5,95$; $f(2,99) = 5,995$; $f(2,999) = 5,9995$; $f(2,9999) = 5,99995$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6$$

Problema 1

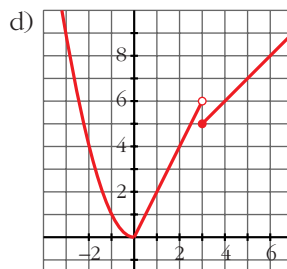
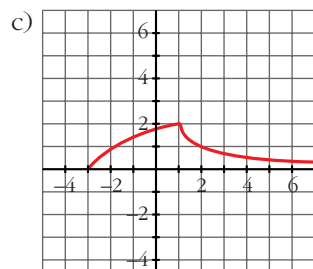
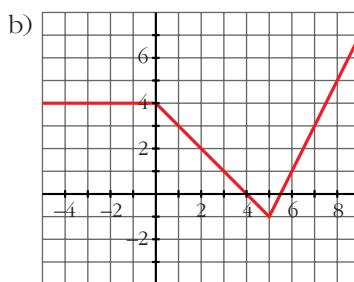
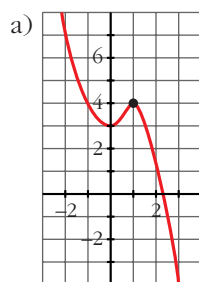
Representa gráficamente las siguientes funciones y di, de cada una de ellas, si es continua o discontinua:

$$\text{a) } y = \begin{cases} x^2 + 3 & x < 1 \\ 5 - x^2 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } y = \begin{cases} 4 & x < 0 \\ 4 - x & 0 \leq x \leq 5 \\ 2x - 11 & x > 5 \end{cases}$$

$$\text{c) } y = \begin{cases} \sqrt{x+3} & x < 1 \\ 2/x & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{d) } y = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ 2x & 0 \leq x < 3 \\ x + 2 & x \geq 3 \end{cases}$$



Las tres primeras son continuas y d) es discontinua.

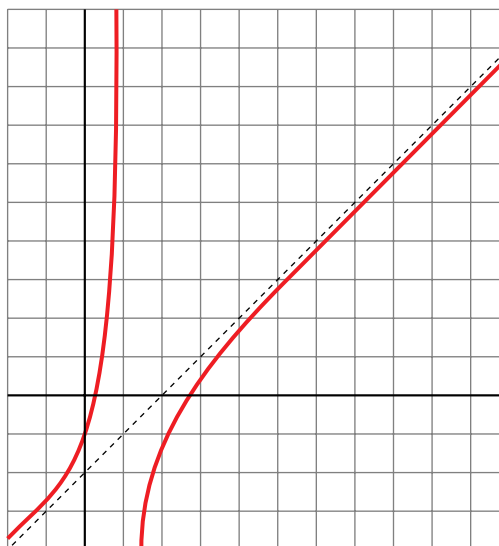
Página 273

Problema 2

Vamos a comprobar que la gráfica de la función $y = f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 1}$ se aproxima a la recta de ecuación $y = x - 2$.

- Completa en tu cuaderno esta representación, obteniendo los valores de $f(x)$ para los siguientes valores de x :

5, 6, 7, 8, 9, 10 y 11



Comprueba para valores *muy grandes* de x que la diferencia entre curva y recta llega a ser *muy pequeña*.

x	50	100	1 000
$y = f(x)$			
$y = x - 2$			
DIFERENCIA			

De este modo se comprueba que la recta $y = x - 2$ es asíntota de la función

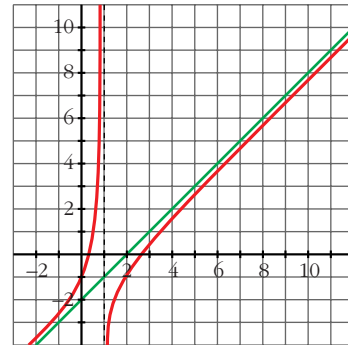
$$y = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 1}$$

■ Comprueba, mediante pasos similares a los anteriores, que la función

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 2x} \text{ tiene por asíntota a la recta de ecuación } y = x + 2.$$

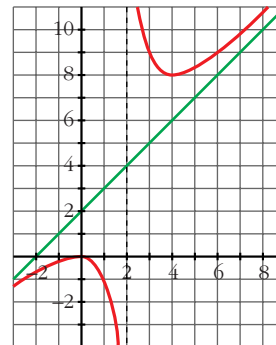
x	5	6	7	8	9	10	11
$f(x)$	2,75	3,8	4,83	5,86	6,88	7,89	8,9

x	50	100	1 000
$y = f(x)$	47,98	97,99	997,999
$y = x - 2$	48	98	998
DIFERENCIA	0,02	0,01	0,001



■ Para $y = f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 2x}$

x	50	100	1 000
$y = f(x)$	52,08	102,04	1 002,004
$y = x + 2$	52	102	1 002
DIFERENCIA	0,08	0,04	0,004



Página 275

1. Explica por qué la función $y = x^2 - 5$ es continua en todo \mathbb{R} .

Porque es polinómica.

2. Explica por qué la función $y = \sqrt{5 - x}$ es continua en $(-\infty, 5]$.

Porque $(-\infty, 5]$ es su dominio, y en él no hay ningún punto crítico.

3. Cada una de las siguientes funciones tiene uno o más puntos donde no es continua. Indica cuáles son esos puntos y qué tipo de discontinuidad presenta:

a) $y = \frac{x+2}{x-3}$

b) $y = \frac{x^2-3x}{x}$

c) $y = \frac{x^2-3}{x}$

d) $y = \frac{1}{x^2}$

e) $y = \begin{cases} 3x-4, & x < 3 \\ x+1, & x \geq 3 \end{cases}$

f) $y = \begin{cases} 3 & \text{si } x \neq 4 \\ 1 & \text{si } x = 4 \end{cases}$

- a) Rama infinita en $x = 3$ (asíntota vertical).
- b) Discontinuidad evitable en $x = 0$ (le falta ese punto).
- c) Rama infinita en $x = 0$ (asíntota vertical).
- d) Rama infinita en $x = 0$ (asíntota vertical).
- e) Salto en $x = 3$.
- f) Salto en $x = 4$.

Página 278

1. Calcula el valor de los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x-2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x - 1)$

a) $-\frac{3}{2}$

b) -2

2. Calcula estos límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^2 - 3x + 5}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0,1} \log_{10} x$

a) $\sqrt{3}$

b) -1

Página 279

3. Calcula k para que $y = \begin{cases} x^3 - 2x + k & \text{si } x \neq 3 \\ 7 & \text{si } x = 3 \end{cases}$ sea continua en \mathbb{R} .

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3} (x^3 - 2x + k) = 21 + k \\ f(3) = 7 \end{array} \right\} 21 + k = 7 \rightarrow k = -14$$

Página 281

4. Calcula los límites de las funciones siguientes en los puntos que se indican. Donde convenga, especifica el valor del límite a la izquierda y a la derecha del punto. Representa gráficamente los resultados.

a) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$ en $-2, 0$ y 2

b) $f(x) = \frac{4x-12}{(x-2)^2}$ en $2, 0$ y 3

c) $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x^2+2x-3}$ en 1 y -3

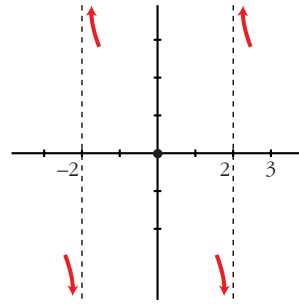
d) $f(x) = \frac{x^4}{x^3+3x^2}$ en 0 y -3

$$a) f(x) = \frac{x^3}{(x+2)(x-2)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \text{No existe } \lim_{x \rightarrow -2} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

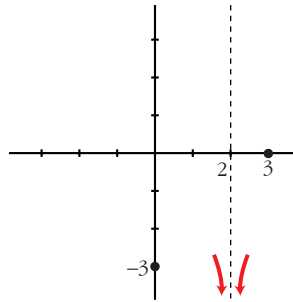


$$b) f(x) = \frac{4(x-3)}{(x-2)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -3$$

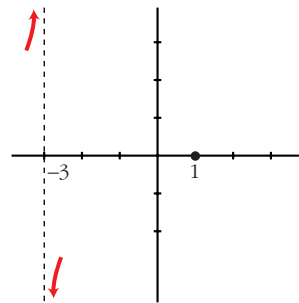
$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0$$



$$c) f(x) = \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+3)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

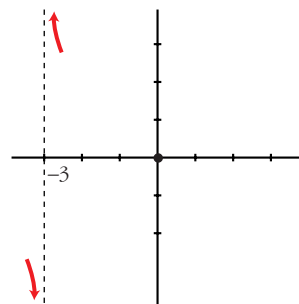
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \text{No existe } \lim_{x \rightarrow -3} f(x)$$



$$d) f(x) = \frac{x^4}{x^2(x+3)}$$

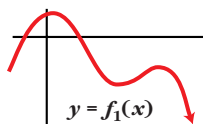
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \text{No existe } \lim_{x \rightarrow -3} f(x)$$



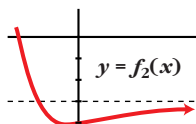
Página 282

1. Di el límite cuando $x \rightarrow +\infty$ de las siguientes funciones dadas por sus gráficas:



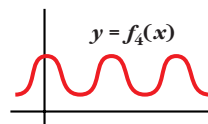
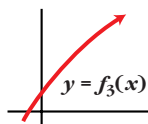
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_3(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_4(x) \text{ no existe}$$



Página 283

1. Di el valor del límite cuando $x \rightarrow +\infty$ de las siguientes funciones:

a) $f(x) = -x^2 + 3x + 5$

b) $f(x) = 5x^3 + 7x$

c) $f(x) = x - 3x^4$

d) $f(x) = \frac{1}{3x}$

e) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$

f) $f(x) = \frac{x^3 - 1}{-5}$

a) $-\infty$

b) $+\infty$

c) $-\infty$

d) 0

e) 0

f) $-\infty$

2. Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 200x^2) = +\infty$, halla un valor de x para el cual $x^3 - 200x^2$ sea mayor que 1 000 000.

Por ejemplo, para $x = 1000$, $f(x) = 800\,000\,000$.

3. Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 - 10x} = 0$, halla un valor de x para el cual $\frac{1}{x^2 - 10x}$ sea menor que 0,0001.

Por ejemplo, para $x = 1000$, $f(x) = 0,00000101$.

Página 284

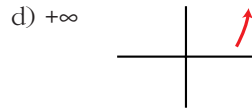
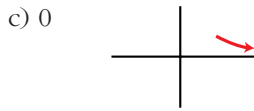
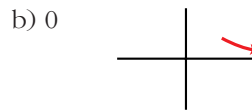
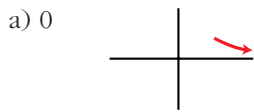
4. Calcula $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ y representa sus ramas:

a) $f(x) = \frac{1}{3x}$

b) $f(x) = \frac{3}{x}$

c) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$

d) $f(x) = 3x - 5$



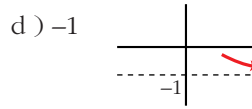
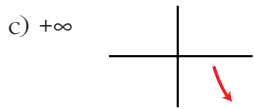
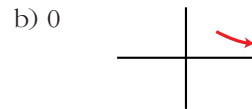
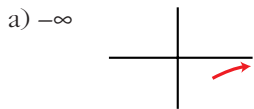
5. Calcula $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ y representa sus ramas:

a) $f(x) = \frac{x^3 - 1}{-5}$

b) $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^3}$

c) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 3}$

d) $f(x) = \frac{1 - x^3}{1 + x^3}$



Página 285

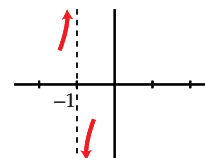
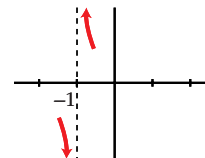
1. Halla las asíntotas verticales y sitúa la curva respecto a ellas:

a) $y = \frac{x^2 + 3x + 11}{x + 1}$

b) $y = \frac{x^2 + 3x}{x + 1}$

a) $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = -1 \text{ es asíntota vertical}$

b) $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} x = -1 \text{ es asíntota vertical}$

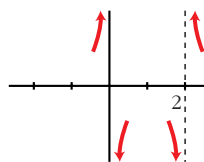


2. Halla las asíntotas verticales y sitúa la curva respecto a ellas:

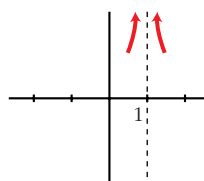
a) $y = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2x}$ b) $y = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2x + 1}$

a) $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} x = 0 \text{ es asíntota vertical}$

$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 2 \text{ es asíntota vertical}$



b) $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 1 \text{ es asíntota vertical}$

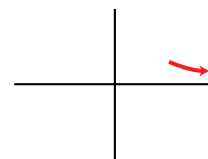


Página 287

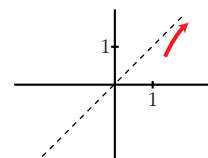
3. Halla las ramas infinitas, cuando $x \rightarrow +\infty$, de estas funciones. Sitúa la curva respecto a su asíntota:

a) $y = \frac{x}{1 + x^2}$ b) $y = \frac{x^3}{1 + x^2}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \rightarrow y = 0$ es asíntota horizontal.



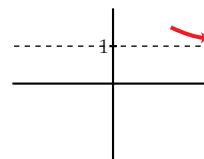
b) $y = x + \frac{-x}{1 + x^2} \rightarrow y = x$ es asíntota oblicua.



4. Halla las ramas infinitas, $x \rightarrow +\infty$, de estas funciones. Sitúa la curva respecto a sus asíntotas, si las hay:

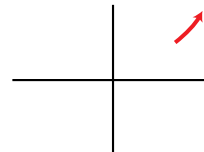
a) $y = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2x}$ b) $y = \frac{2x^3 - 3x^2 + 7}{x}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \rightarrow y = 1$ es asíntota horizontal.



b) grado de P - grado de $Q \geq 2$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \rightarrow$ rama parabólica hacia arriba.



Página 288

1. Halla $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y representa la rama correspondiente:

$$f(x) = -2x^3 + 7x^4 - 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 7x^4 = +\infty$$



2. Halla $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y traza las ramas correspondientes:

a) $f(x) = (x^2 + 3)/(-x^3)$

b) $f(x) = -x^3/(x^2 + 3)$

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{-x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-x} = 0$



b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$



Página 289

3. Halla las ramas infinitas, $x \rightarrow -\infty$ de estas funciones y sitúa la curva respecto a las asíntotas:

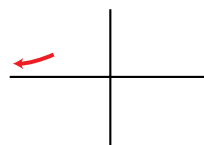
a) $y = \frac{1}{x^2 + 1}$

b) $y = \frac{x}{1 + x^2}$

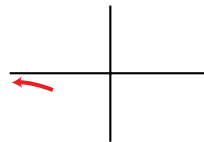
c) $y = \frac{x^2}{1 + x^2}$

d) $y = \frac{x^3}{1 + x^2}$

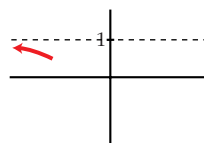
a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \rightarrow y = 0$ es asíntota horizontal.



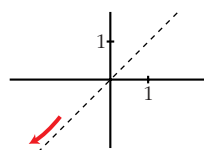
b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \rightarrow y = 0$ es asíntota horizontal.



c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 \rightarrow y = 1$ es asíntota horizontal.



d) $y = x + \frac{-x}{1+x^2} \rightarrow y = x$ es asíntota oblicua.



4. Halla las ramas infinitas, cuando $x \rightarrow -\infty$, y si tienen asíntotas, sitúa la curva respecto a ellas:

a) $y = \frac{x^4}{x^2 + 1}$

b) $y = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2x}$

c) $y = \frac{x^2 + 3x}{x + 1}$

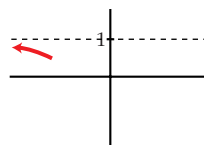
d) $y = \frac{2x^3 - 3x^2}{x}$

a) grado $P - \text{grado } Q \geq 2$

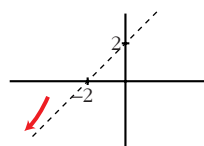
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \rightarrow$ rama parabólica.



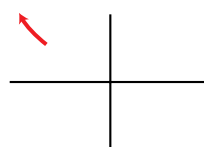
b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 \rightarrow y = 1$ es asíntota horizontal.



c) $y = x + 2 + \frac{-2}{x+1} \rightarrow y = x + 2$ es asíntota oblicua.



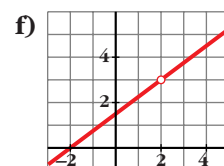
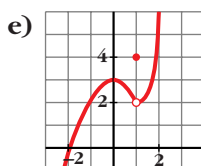
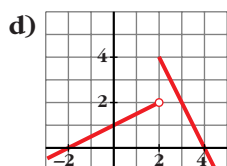
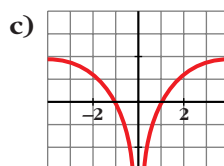
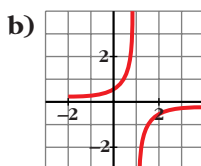
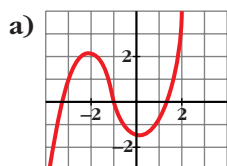
d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2 - 3x) = +\infty$



EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

- 1 a) ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a una función continua?
 b) Señala, en cada una de las otras cinco, la razón de su discontinuidad.



- a) Solo la a).
 b) b) Rama infinita en $x = 1$ (asíntota vertical).
 c) Rama infinita en $x = 0$ (asíntota vertical).
 d) Salto en $x = 2$.
 e) Punto desplazado en $x = 1$; $f(1) = 4$; $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$.
 f) No está definida en $x = 2$.

- 2 Halla los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{3}{x^2 + x}$

b) $y = \frac{x}{(x-2)^2}$

c) $y = \frac{x-1}{2x+1}$

d) $y = \frac{1}{x^2 + 2x + 3}$

e) $y = \frac{2}{5x - x^2}$

f) $y = \frac{1}{x^2 - 2}$

- a) 0 y -1
 b) 2
 c) $-\frac{1}{2}$
 d) Continua
 e) 0 y 5
 f) $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$

3 Comprueba si las siguientes funciones son continuas en $x = 0$ y en $x = -2$:

a) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$

b) $y = \frac{x}{x^2 - 4}$

c) $y = \sqrt{x^2 - 4}$

d) $y = \sqrt{7 - 2x}$

- a) No es continua ni en $x = 0$ ni en $x = -2$.
b) Sí es continua en $x = 0$, no en $x = -2$.
c) No es continua en $x = 0$, sí en $x = -2$.
d) Continua en $x = 0$ y en $x = -2$.

4 Indica para qué valores de \mathbb{R} son continuas las siguientes funciones:

a) $y = 5 - \frac{x}{2}$

b) $y = \sqrt{x - 3}$

c) $y = \sqrt{-3x}$

d) $y = \sqrt{5 - 2x}$

a) \mathbb{R}

b) $[3, +\infty)$

c) $(-\infty, 0]$

d) $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right]$

5 Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(5 - \frac{x}{2}\right)$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 - x)$

c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1 - x}{x - 2}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0,5} 2^x$

e) $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{10 + x - x^2}$

f) $\lim_{x \rightarrow 4} \log_2 x$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x$

h) $\lim_{x \rightarrow 2} e^x$

a) 5

b) 0

c) -2

d) $\sqrt{2}$

e) 4

f) 2

g) 1

h) e^2

6 Calcula el límite cuando $x \rightarrow +\infty$ de cada una de las siguientes funciones. Representa el resultado que obtengas.

a) $f(x) = x^3 - 10x$

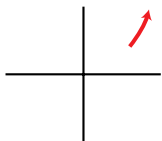
b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

c) $f(x) = \frac{3 - x}{2}$

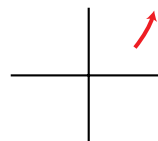
d) $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{-3}$

• Dale a x "valores grandes" y saca conclusiones.

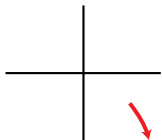
a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$



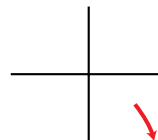
b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$



c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$



d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

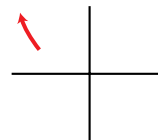


7 Calcula el límite de las funciones del ejercicio anterior cuando $x \rightarrow -\infty$ y representa la información que obtengas.

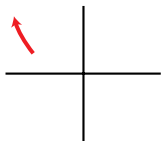
a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$



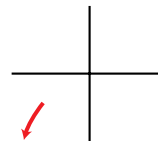
b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$



c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$



d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$



8 Comprueba, dando valores grandes a x , que las siguientes funciones tienden a 0 cuando $x \rightarrow +\infty$.

a) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 10}$

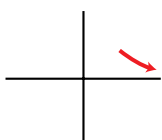
b) $f(x) = \frac{100}{3x^2}$

c) $f(x) = \frac{-7}{\sqrt{x}}$

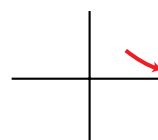
d) $f(x) = \frac{2}{10x^2 - x^3}$

Representa gráficamente su posición sobre el eje OX o bajo el eje OX .

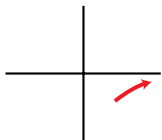
a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$



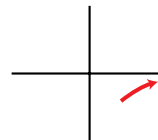
b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$



c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$



d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$



9

Calcula los siguientes límites y representa la información que obtengas:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (7 + x - x^3)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 10x - 32}{5}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{x^4}{3} + \frac{x}{2} - 17 \right)$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} (7 - x)^2$$

10 Calcula el límite de las funciones del ejercicio anterior cuando $x \rightarrow -\infty$ y representa la información que obtengas.

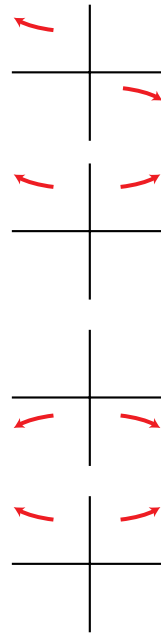
Resolución de los ejercicios 9 y 10:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (7 + x - x^3) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (7 + x - x^3) = +\infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 10x - 32}{5} = +\infty$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{-x^4}{3} + \frac{x}{2} - 17 \right) = -\infty$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (7 - x)^2 = +\infty$$



Página 298

11

Calcula los siguientes límites y representa las ramas que obtengas:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{(x-1)^2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{3-x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x^2-1}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(2-x)^3}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x+2}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+5}{1-x}$$

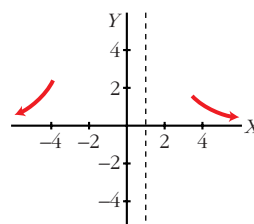
$$g) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2-3x}{x+3}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3-2x}{5-2x}$$

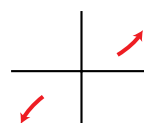
12 Calcula el límite de todas las funciones del ejercicio anterior cuando $x \rightarrow -\infty$.

Resolución de los ejercicios 11 y 12:

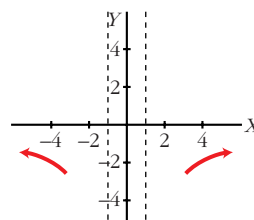
$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{(x-1)^2} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{(x-1)^2} = 0$$



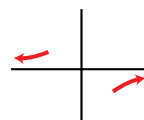
$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{3-x} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^2}{3-x} = -\infty$$



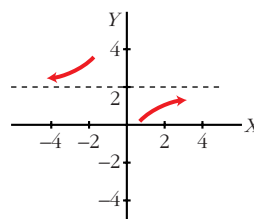
$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x^2-1} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x^2-1} = 0$$



$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(2-x)^3} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{(2-x)^3} = 0$$



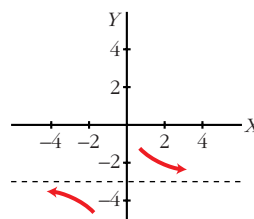
$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x+2} = 2; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{x+2} = 2$$



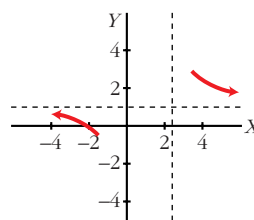
$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+5}{1-x} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+5}{1-x} = +\infty$$



$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2-3x}{x+3} = -3; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-3x}{x+3} = -3$$



$$\text{h) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3-2x}{5-2x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-2x}{5-2x} = 1$$



13 Dada la función $y = \frac{2x}{1-x}$, halla:

a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x}{1-x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x}{1-x}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{1-x}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{1-x}$

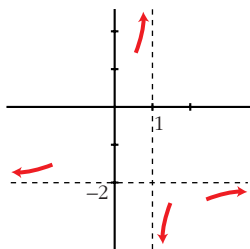
Representa gráficamente los resultados obtenidos.

a) $+\infty$

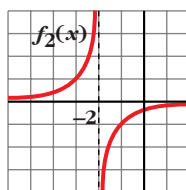
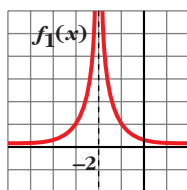
b) $-\infty$

c) -2

d) -2



14



Estas son, respectivamente, las gráficas de las funciones:

$$f_1(x) = \frac{1}{(x+2)^2} \quad \text{y} \quad f_2(x) = \frac{-1}{x+2}$$

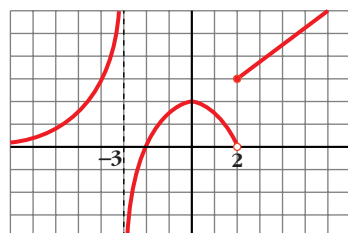
¿Cuál es el límite de cada una de estas funciones cuando $x \rightarrow -2$?

• Observa la función cuando $x \rightarrow -2$ por la izquierda y por la derecha.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f_1(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f_1(x) = +\infty \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow -2} f_1(x) = +\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f_2(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f_2(x) = -\infty \end{array} \right\} \text{No existe } \lim_{x \rightarrow -2} f_2(x)$$

15



Sobre la gráfica de la función $f(x)$, halla:

a) $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

e) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

f) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

h) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

a) $+\infty$

b) $-\infty$

c) 2

d) 0

e) 0

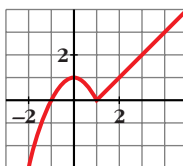
f) 3

g) $+\infty$

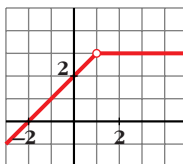
h) 0

16 Comprueba que las gráficas de estas funciones corresponden a la expresión analítica y di si son continuas o discontinuas en $x = 1$.

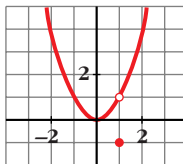
a) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$



b) $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$



c) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 1 \\ -1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$



a) Continua

b) Discontinua

c) Discontinua

17 Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, halla:

a) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

➡ Para que exista límite en el punto de ruptura, tienen que ser iguales los límites laterales.

a) 5

b) 4

c) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

- 18 Comprueba si la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ es continua en $x = 0$.

• Recuerda que para que f sea continua en $x = 0$, debe verificarse que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1 = f(0)$$

Es continua en $x = 0$.

Página 299

- 19 Comprueba si las siguientes funciones son continuas en los puntos que se indican:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} (3-x)/2 & \text{si } x < -1 \\ 2x+4 & \text{si } x > -1 \end{cases} \text{ en } x = -1$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} 2-x^2 & \text{si } x < 2 \\ (x/2)-3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \text{ en } x = 2$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \leq 1 \\ x+3 & \text{si } x > 1 \end{cases} \text{ en } x = 1$$

a) No, pues no existe $f(-1)$.

b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) = -2$. Sí es continua en $x = 2$.

c) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3 \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4$. No es continua en $x = 1$.

PARA RESOLVER

- 20 Calcula los siguientes límites:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{x^2 - 2x}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 3x}{x}$$

$$\text{c) } \lim_{b \rightarrow 0} \frac{3b^3 - 2b^2}{b}$$

$$\text{d) } \lim_{b \rightarrow 0} \frac{b^2 - 7b}{4b}$$

• Sacar factor común y simplificar cada fracción.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{x(x-2)} = -2$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(2x+3)}{x} = 3$$

$$\text{c) } \lim_{b \rightarrow 0} \frac{b^2(3b-2)}{b} = 0$$

$$\text{d) } \lim_{b \rightarrow 0} \frac{b(b-7)}{4b} = -\frac{7}{4}$$

21 Resuelve los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + x}$

c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 2}{x^2 - 4}$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

e) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x + 3}{x^2 + 4x + 3}$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 1)(x - 1)}{(x - 1)} = 2$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x^2 - x + 1)}{x(x + 1)} = \frac{3}{-1} = -3$

c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 2)}{(x + 2)(x - 2)} = -\frac{1}{4}$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 1)(x - 2)}{(x - 2)} = 3$

e) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x + 3)}{(x + 3)(x + 1)} = -\frac{1}{2}$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1)}{(x - 1)(x + 1)} = 2$

22 Resuelve los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{(x - 1)^2}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - (x - 2)^2$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x}{(2x + 1)^2}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 1}{5x}$

- a) 3 b) $-\infty$ c) 0 d) $+\infty$

23 Calcula el límite cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$ de las siguientes funciones y representa las ramas que obtengas:

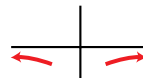
a) $f(x) = \frac{-1}{x^2}$

b) $f(x) = 10x - x^3$

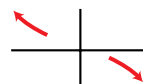
c) $f(x) = \frac{x^2}{x - 1}$

d) $f(x) = \frac{1 - 12x^2}{3x^2}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$



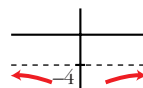
b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$



c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$



d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -4; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -4$



- 24** Calcula el límite de la función $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + x}$ en $x = 3$, $x = 0$ y $x = -1$.

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \frac{3}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$$

- 25** Calcula los límites de las siguientes funciones en los puntos que anulan su denominador:

a) $f(x) = \frac{3x}{2x + 4}$

b) $f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 2x}$

c) $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4}$

d) $f(t) = \frac{t^3 - 2t^2}{t^2}$

a) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$

b) $f(x) = \frac{x - 1}{x(x - 2)}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$
; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$

c) $f(x) = \frac{x(x - 2)}{(x - 2)(x + 2)}$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$
; $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$

d) $f(t) = \frac{t^2(t - 2)}{t^2}$; $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = -2$

- 26** Halla las asíntotas de las siguientes funciones y sitúa la curva con respecto a ellas:

a) $f(x) = \frac{2x}{x - 3}$

b) $f(x) = \frac{x - 1}{x + 3}$

c) $f(x) = \frac{1}{2 - x}$

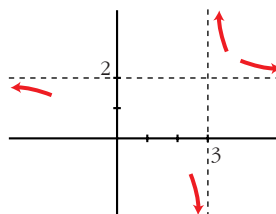
d) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 9}$

e) $f(x) = \frac{3x}{x^2 - 1}$

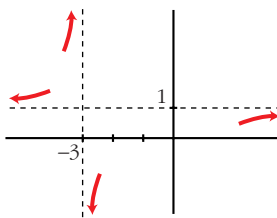
f) $f(x) = \frac{-1}{(x + 2)^2}$

a) Asíntota vertical: $x = 3$

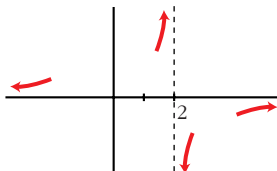
Asíntota horizontal: $y = 2$



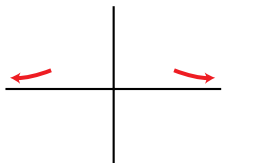
- b) Asíntota vertical: $x = -3$
 Asíntota horizontal: $y = 1$



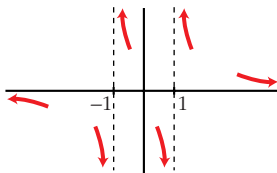
- c) Asíntota vertical: $x = 2$
 Asíntota horizontal: $y = 0$



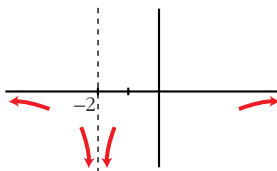
- d) Asíntota vertical: $y = 0$
 No tiene más asíntotas.



- e) Asíntota vertical: $x = 1, x = -1$
 Asíntota horizontal: $y = 0$



- f) Asíntota vertical: $x = -2$
 Asíntota horizontal: $y = 0$



27 Cada una de las siguientes funciones tiene una asíntota oblicua.

Hállala y estudia la posición de la curva respecto a ella:

a) $f(x) = \frac{3x^2}{x+1}$

b) $f(x) = \frac{3+x-x^2}{x}$

c) $f(x) = \frac{4x^2-3}{2x}$

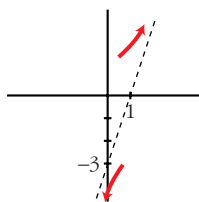
d) $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x-3}$

e) $f(x) = \frac{2x^3-3}{x^2-2}$

f) $f(x) = \frac{-2x^2+3}{2x-2}$

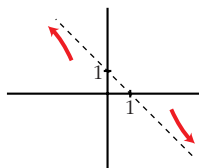
$$a) \frac{3x^2}{x+1} = 3x - 3 + \frac{3}{x+1}$$

Asíntota oblicua: $y = 3x - 3$



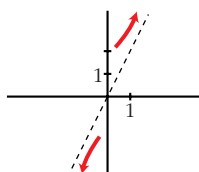
$$b) \frac{3+x-x^2}{x} = -x + 1 + \frac{3}{x}$$

Asíntota oblicua: $y = -x + 1$



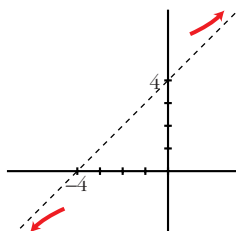
$$c) \frac{4x^2-3}{2x} = 2x - \frac{3}{2x}$$

Asíntota oblicua: $y = 2x$



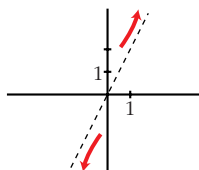
$$d) \frac{x^2+x-2}{x-3} = x + 4 + \frac{10}{x-3}$$

Asíntota oblicua: $y = x + 4$



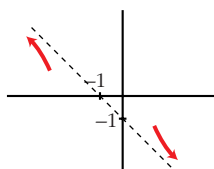
$$e) \frac{2x^3-3}{x^2-2} = 2x + \frac{4x-3}{x^2-2}$$

Asíntota oblicua: $y = 2x$



$$f) \frac{-2x^2+3}{2x-2} = -x - 1 + \frac{1}{2x-2}$$

Asíntota oblicua: $y = -x - 1$



28 Halla las asíntotas de las siguientes funciones y sitúa la curva respecto a cada una de ellas:

$$a) y = \frac{(3-x)^2}{2x+1}$$

$$b) y = \frac{5x-2}{2x-7}$$

$$c) y = \frac{x+2}{x^2-1}$$

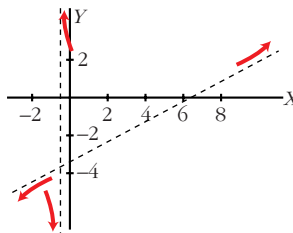
$$d) y = \frac{x^2}{x^2+x+1}$$

$$e) y = \frac{x^3}{x^2-4}$$

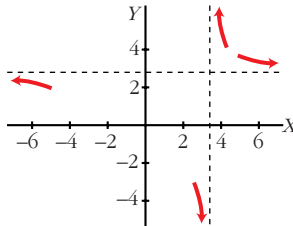
$$f) y = \frac{3x^2}{x+2}$$

$$a) y = \frac{1}{2}x - \frac{13}{4} + \frac{49/4}{2x+1}$$

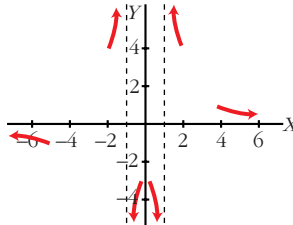
$$\text{Asíntotas: } x = -\frac{1}{2}; y = \frac{1}{2}x - \frac{13}{4}$$



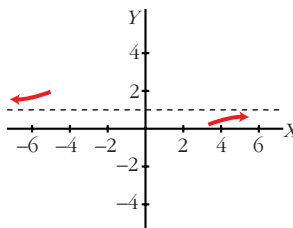
$$b) \text{ Asíntotas: } y = \frac{5}{2}; x = \frac{7}{2}$$



$$c) \text{ Asíntotas: } y = 0; x = \pm 1$$

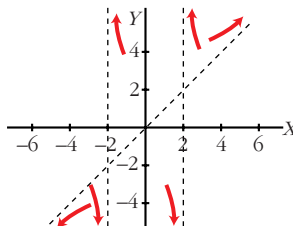


$$d) \text{ Asíntotas: } y = 1$$

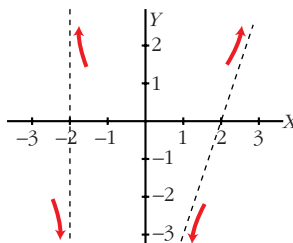


$$e) y = x + \frac{4x}{(x+2)(x-2)}$$

$$\text{Asíntotas: } y = x; x = -2, x = 2$$



$$f) \text{ Asíntotas: } x = -2; y = 3x - 6$$



29 Halla las ramas infinitas de estas funciones. Cuando tengan asíntotas, sitúa la curva:

a) $y = \frac{x^4 - 1}{x^2}$

b) $y = \frac{(x + 3)^2}{(x + 1)^2}$

c) $y = \frac{1}{9 - x^2}$

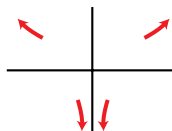
d) $y = \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 1}$

e) $y = \frac{2x^2}{x + 3}$

f) $y = \frac{x^3}{2x - 5}$

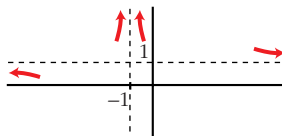
a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

Asíntota vertical: $x = 0$



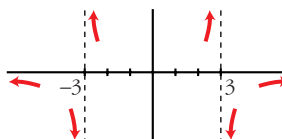
b) Asíntota vertical: $x = -1$

Asíntota horizontal: $y = 1$

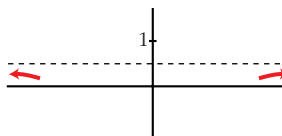


c) Asíntotas verticales: $x = 3, x = -3$

Asíntota horizontal: $y = 0$

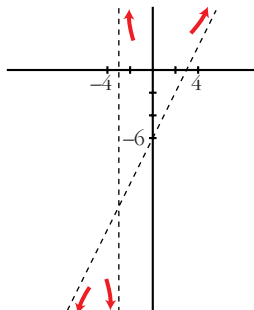


d) Asíntota horizontal: $y = \frac{1}{2}$



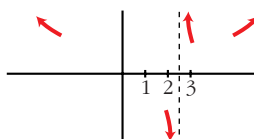
e) Asíntota vertical: $x = -3$

Asíntota oblicua: $y = 2x - 6$



f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

Asíntota vertical: $x = \frac{5}{2}$



Página 300

- 30** Prueba que la función $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}$ solo tiene una asíntota vertical y otra horizontal.

• Al ballar $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ verás que no es ∞ .

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2; \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$$

Asíntota vertical: $x = 0$

Asíntota horizontal: $y = 1$

- 31** Calcula los siguientes límites y representa gráficamente los resultados que obtengas:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1}$

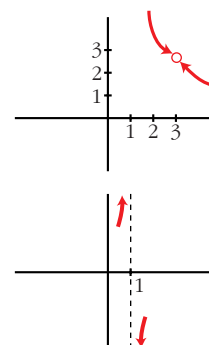
a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+2)}{x(x-3)} = \frac{5}{3}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{x-1}$

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-2}{x-1} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-2}{x-1} = -\infty$$

No existe $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1}$



- 32** Calcula los siguientes límites y representa los resultados que obtengas:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{x^3 + x^2}$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x^2}{x^2 + 2x + 1}$

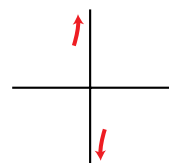
c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1}$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 4x + 4}$

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{x^3 + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-2)}{x^2(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-2}{x(x+1)}$$

Calculamos los límites laterales:

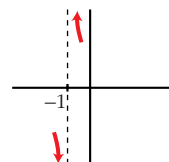
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-2}{x(x+1)} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-2}{x(x+1)} = -\infty$$



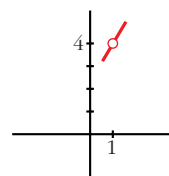
$$b) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x^2}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2(x+1)}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2}{x+1}$$

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2}{x+1} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2}{x+1} = +\infty$$



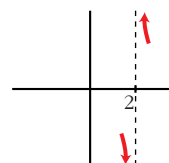
$$c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^3 + x^2 + x + 1)}{x - 1} = 4$$



$$d) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-2)(x+2)}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x+2)}{x-2}$$

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2(x+2)}{x-2} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2(x+2)}{x-2} = +\infty$$



33 Halla las asíntotas de las funciones:

$$a) y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

$$b) y = \frac{x^3 + 1}{x}$$

$$c) y = \frac{2x^2 + 5}{x^2 - 4x + 5}$$

$$d) y = \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}$$

$$e) y = \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 5}$$

$$f) y = x + 1 + \frac{5}{x}$$

$$a) y = x + \frac{x}{(x-1)(x+1)}$$

$$b) \text{Asíntota vertical: } x = 0$$

Asíntotas verticales: $x = -1, x = 1$

Asíntota oblicua: $y = x$

$$c) \text{Asíntota horizontal: } y = 2$$

$$d) \text{Asíntota horizontal: } y = 0$$

Asíntotas verticales: $x = \pm 1$

$$e) x = 5, y = x$$

$$f) \text{Asíntota vertical: } x = 0$$

Asíntota oblicua: $y = x + 1$

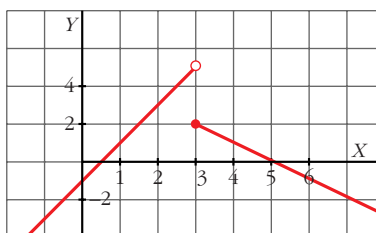
34 Representa las siguientes funciones y explica si son discontinuas en alguno de sus puntos:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 3 \\ 5 - x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

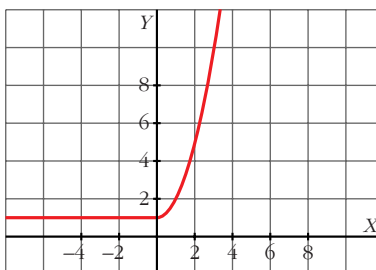
$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x < 2 \\ x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

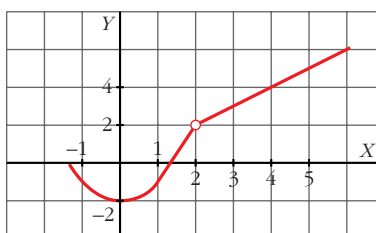
a) Discontinua en $x = 3$.



b) Función continua.



c) Discontinua en $x = 2$.



35 a) Calcula el límite de las funciones del ejercicio anterior en $x = -3$ y $x = 5$.

b) Halla, en cada una de ellas, el límite cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = -7; \quad \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 26; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 7; \quad \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 5; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

36 **Calcula los límites cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$ de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = 2^{x-1}$

b) $f(x) = 0,75^x$

c) $f(x) = 1 + e^x$

d) $f(x) = 1/e^x$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

37 **Halla las ramas infinitas de las siguientes funciones exponenciales:**

a) $y = 2^{x+3}$

b) $y = 1,5^x - 1$

c) $y = 2 + e^x$

d) $y = e^{-x}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

Asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$: $y = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$

Asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$: $y = -1$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$

Asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$: $y = 2$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

Asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$: $y = 0$

38 **Calcula, en cada caso, el valor de k para que la función $f(x)$ sea continua en todo \mathbb{R} .**

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \leq 3 \\ x + k & \text{si } x > 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 6 - (x/2) & \text{si } x < 2 \\ x^2 + kx & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} (x^2 + x)/x & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$

$$a) \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 5 = f(3) \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 3 + k \end{array} \right\} 5 = 3 + k \rightarrow k = 2$$

$$b) \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4 + 2k = f(2) \end{array} \right\} 5 = 4 + 2k \rightarrow k = 1/2$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+1)}{x} = 1 \rightarrow k = 1$$

39 Estudia la continuidad de estas funciones:

$$a) f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x < 1 \\ 1/x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } -1 \geq x \\ 1 - x^2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 2^{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$a) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 1 \rightarrow \text{Continua en } x = 1$$

$x \neq 1 \rightarrow$ Continua

Es continua en \mathbb{R} .

$$b) \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1) = 0 \rightarrow \text{Continua en } x = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 0 \rightarrow \text{Continua en } x = 1$$

$x \neq 1$ y $x \neq -1 \rightarrow$ Continua

Es continua en \mathbb{R} .

$$c) \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2 \rightarrow \text{Discontinua en } x = 0$$

Si $x \neq 0$, es continua.

40 Calcula a para que las siguientes funciones sean continuas en $x = 1$:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 4 - ax^2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} (x^2 - 1)/(x - 1) & \text{si } x \neq 1 \\ a & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 = f(1) \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4 - a \end{array} \right\} 2 = 4 - a \rightarrow a = 2$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = 2 \\ f(1) = a \end{array} \right\} a = 2$$

41 En una empresa se hacen montajes en cadena. El número de montajes realizados por un trabajador sin experiencia depende de los días de entrenamiento según la función $M(t) = \frac{30t}{t+4}$ (t en días).

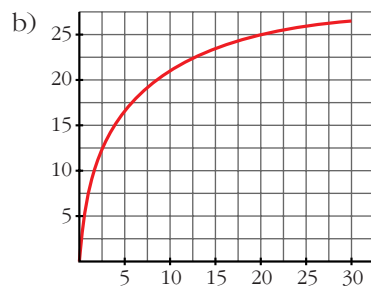
a) ¿Cuántos montajes realiza el primer día? ¿Y el décimo?

b) Representa la función sabiendo que el periodo de entrenamiento es de un mes.

c) ¿Qué ocurriría con el número de montajes si nunca acabara el entrenamiento?

a) $M(1) = 6$ montajes el primer día.

$M(10) = 21,43 \rightarrow 21$ montajes el décimo día.



c) Se aproxima a 30 (pues $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{30t}{t+4} = 30$).

Página 301

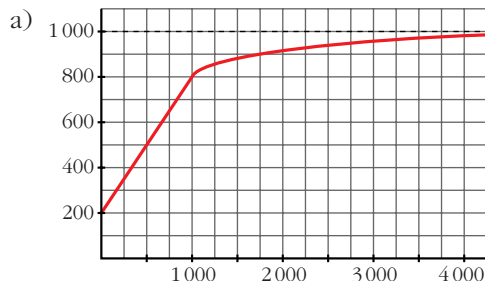
42 El gasto mensual en alimentación de una familia depende de su renta, x . Así:

$$g(x) = \begin{cases} 0,6x + 200 & \text{si } 0 \leq x \leq 1\,000 \\ 1\,000x/(x + 250) & \text{si } x > 1\,000 \end{cases}$$

donde los ingresos y los gastos vienen expresados en euros.

a) Representa $g(x)$ y di si es función continua.

b) Calcula el límite de $g(x)$ cuando $x \rightarrow +\infty$ y explica su significado.



Es continua.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1000.$

Como máximo gastan 1000 € al mes en alimentación.

CUESTIONES TEÓRICAS

43 ¿Se puede calcular el límite de una función en un punto en el que la función no esté definida? ¿Puede ser la función continua en ese punto?

Sí se puede calcular, pero no puede ser continua.

44 ¿Puede tener una función dos asíntotas verticales? En caso afirmativo, pon un ejemplo.

Sí. Por ejemplo, $f(x) = \frac{1}{x - x^2}$ tiene $x = 0$ y $x = 1$ como asíntotas verticales.

45 El denominador de una función $f(x)$ se anula en $x = a$. ¿Existe necesariamente una asíntota vertical en $x = a$? Pon ejemplos.

No. Por ejemplo, $f(x) = \frac{3x^2 + x}{x}$ en $x = 0$; puesto que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(3x + 1)}{x} = 1$$

46 ¿Puede tener una función más de dos asíntotas horizontales?

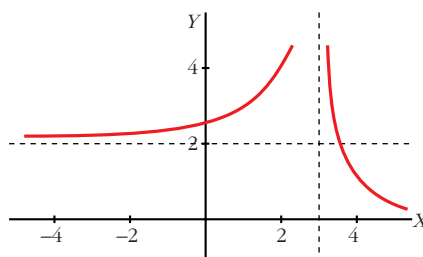
Sí.

47 Representa una función que cumpla estas condiciones:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

¿Es discontinua en algún punto?

Sí, es discontinua al menos en $x = 3$.



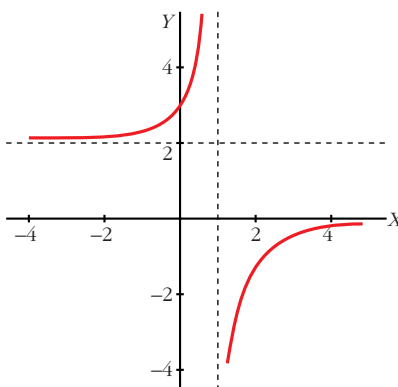
48 Representa una función que verifique estas condiciones:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$



49 Si $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$, ¿podemos afirmar que f es continua en $x = 2$?

No. Para que fuera continua debería ser, además, $f(2) = 5$.

50 ¿Existe algún valor de k para el cual la función $f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$ sea continua en $x = 0$? Justifica tu respuesta.

No, puesto que no existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

PARA PROFUNDIZAR

51 Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x+3}{x-2}}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+4}}$

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x+3}{x-2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1} = \sqrt{1} = 1$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|}{x} = -1$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+4}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{|x|} = 3$$

- 52** Puesto que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3x) = +\infty$ halla un valor de x para el cual $x^2 - 3x$ sea mayor que 5 000.

Por ejemplo, para $x = 100$, $f(x) = 9\,700$.

- 53** Halla un valor de x para el cual $f(x) = \frac{1}{3x-5}$ sea menor que 0,001.

Por ejemplo, para $x = 1\,000$, $f(x) = 0,00033$.

- 54** Halla los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - x)$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2^x - x^3)$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 0,75^x - x$

a) $-\infty$

b) $+\infty$

c) 0

d) $+\infty$

- 55** ¿Cuál es la asíntota vertical de estas funciones logarítmicas? Halla su límite cuando $x \rightarrow +\infty$:

a) $y = \log_2(x-3)$

b) $y = \ln(x+2)$

a) Asíntota vertical: $x = 3$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

b) Asíntota vertical: $x = -2$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

PARA PENSAR UN POCO MÁS

56 Raquel quiere subir en bicicleta al mirador de la montaña y luego bajar, de modo que la velocidad media con la que realice el recorrido de ida y vuelta sea de 40 km/h. Ya ha subido y lo ha hecho a 20 km/h. Se pregunta a qué velocidad deberá bajar para conseguir su objetivo.

a) Halla la velocidad media final para velocidades de bajada de 60, 80, 100 y 200 km/h.

b) Halla la expresión de la velocidad media final, V , para una velocidad de bajada de x km/h.

c) Comprueba que la velocidad media deseada, 40 km/h, es el límite $\lim_{x \rightarrow +\infty} V$. ¿Qué significa esto?

d) Vuelve sobre el enunciado razonando del siguiente modo: si la velocidad media en la subida es la mitad de la deseada es porque el tiempo empleado ha sido el doble, es decir, el tiempo que tardó en subir es tanto como tenía para subir y bajar. Se ha quedado sin tiempo. ¡Ha de bajar a velocidad infinita!

a)

VELOCIDAD DE BAJADA	60	80	100	200
VELOCIDAD MEDIA FINAL	30	32	33,33	36,36

b) Llamamos d = distancia que tiene que recorrer en la subida. Por tanto, entre la subida y la bajada recorre $2d$.

Recordamos que: $\text{velocidad} = \frac{\text{espacio}}{\text{tiempo}}$

El tiempo que tarda en total será el que tarda en subir (a 20 km/h) más el que tarda en bajar (a x km/h):

$$\frac{d}{20} + \frac{d}{x} = d \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{x} \right) = d \left(\frac{x + 20}{20x} \right)$$

La velocidad media final será entonces:

$$V = \frac{2d}{t} = \frac{2d}{d \left[\frac{x + 20}{20x} \right]} = \frac{2 \cdot 20x}{x + 20} = \frac{40x}{x + 20} \rightarrow V(x) = \frac{40x}{x + 20}$$

c) Por tanto: $\lim_{x \rightarrow +\infty} V(x) = 40$

Significa que, por muy rápido que baje, su velocidad media total no superará los 40 km/h.