

Página 24

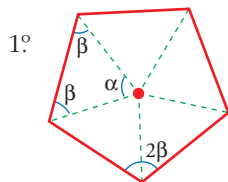
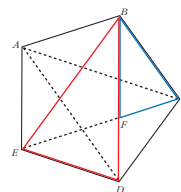
PARA EMPEZAR, REFLEXIONA Y RESUELVE

El número áureo

Para hallar la relación entre la diagonal y el lado del pentágono regular, da los siguientes pasos:

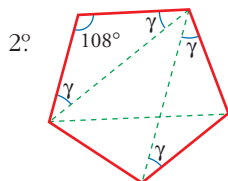
a) Demuestra que los triángulos BED y BCF son semejantes.

Recordamos los ángulos de un pentágono:



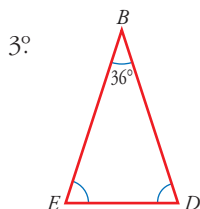
1°

$$\alpha = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ; \quad \beta = \frac{180^\circ - 72^\circ}{2} = 54^\circ; \quad 2\beta = 108^\circ$$



2°

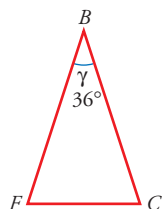
$$\gamma = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$$



3°

$$\hat{B} = 108^\circ - 2 \cdot 36^\circ = 36^\circ$$

$$\hat{E} = \hat{D} = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ$$



Sabíamos que $\gamma = 36^\circ$.

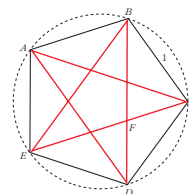
El triángulo BEC es idéntico al BED :

$$\hat{C} = \hat{E} = \hat{D} = 72^\circ \Rightarrow \hat{F} = 72^\circ$$

Luego los dos triángulos tienen sus ángulos iguales \Rightarrow son semejantes.

b) Llamando $l = \overline{BE} = \overline{BD} = \overline{EC}$ y tomando como unidad el lado del pentágono, $\overline{BC} = \overline{BF} = \overline{ED} = \overline{EF} = 1$, a partir de la semejanza anterior has de llegar a la siguiente ecuación:

$$\frac{l}{1} = \frac{1}{l-1}$$



Despejando l obtendrás su valor.

Por ser semejantes (apartado a)) $\Rightarrow \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{FC}}$, es decir: $\frac{l}{1} = \frac{1}{l-1}$.

Despejamos l :

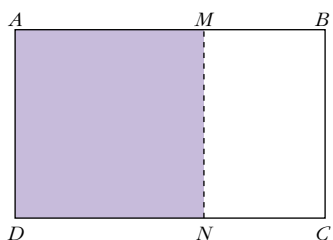
$$l(l-1) = 1 \Rightarrow l^2 - l - 1 = 0 \Rightarrow l = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Como l es una longitud, la solución válida es la positiva:

$$l = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}. \text{ Este es el número áureo, } \Phi$$

Página 25

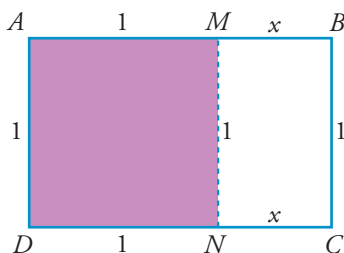
El rectángulo áureo



El rectángulo adjunto tiene la peculiaridad de que si le suprimimos un cuadrado, el rectángulo que queda, $MBCN$, es semejante al rectángulo inicial $ABCD$. Comprueba que, efectivamente, en tal caso, el rectángulo es áureo, es decir:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \Phi \text{ (número de oro)}$$

Tomamos como unidad el lado pequeño del rectángulo: $\overline{AD} = \overline{BC} = 1$, y llamamos $x = \overline{MB} = \overline{NC}$. Así:



Al ser semejantes los rectángulos, tenemos que: $\frac{1+x}{1} = \frac{1}{x}$

Despejamos x :

$$x(1+x) = 1 \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Como x es una longitud, la solución válida es la positiva:

$$x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

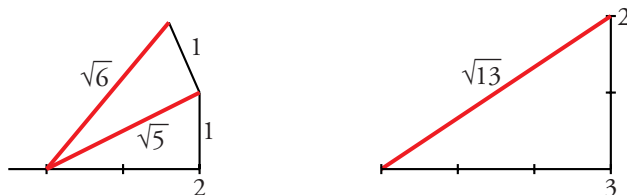
Hallamos la razón entre los lados del rectángulo:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{1+x}{1} = 1+x = 1 + \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{2-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$$

Obtenemos el número de oro.

Página 27

1. Halla gráficamente $\sqrt{6}$ y $\sqrt{13}$.



2. Inventa dos números irracionales dados en forma decimal.

Por ejemplo: 2,01001000100001 ...

3,12233344445555 ...

3. Razonando sobre la figura del margen, CONSTRUCCIÓN DEL NÚMERO ÁUREO, justifica que si $\overline{AC} = \overline{BC} = 1$, entonces $\overline{BD} = \Phi$.

• Si $\overline{AC} = 1$, entonces $\overline{OA} = \overline{OC} = \overline{OD} = \frac{1}{2}$.

• Si $\overline{OA} = \frac{1}{2}$ y $\overline{AB} = 1$, aplicando el teorema de Pitágoras, tenemos que:

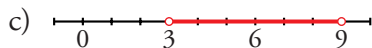
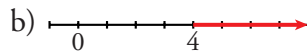
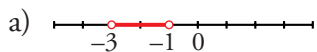
$$\overline{OB} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

• Por tanto: $\overline{BD} = \overline{OD} + \overline{OB} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{2 + \sqrt{5}}{2} = \Phi$.

Página 29

1. Representa los siguientes conjuntos:

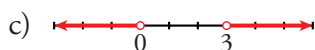
a) $(-3, -1)$ b) $[4, +\infty)$ c) $(3, 9]$ d) $(-\infty, 0)$



2. Representa los siguientes conjuntos:

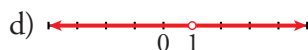
a) $\{x / -2 \leq x < 5\}$

c) $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$



b) $[-2, 5) \cup (5, 7]$

d) $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$



Página 30

1. Halla los siguientes valores absolutos:

a) $|-11|$

b) $|\pi|$

c) $|-\sqrt{5}|$

d) $|0|$

e) $|3 - \pi|$

f) $|3 - \sqrt{2}|$

g) $|1 - \sqrt{2}|$

h) $|\sqrt{2} - \sqrt{3}|$

i) $|7 - \sqrt{50}|$

a) 11

b) π

c) $\sqrt{5}$

d) 0

e) $\pi - 3$

f) $|3 - \sqrt{2}| = 3 - \sqrt{2}$

g) $|1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$

h) $|\sqrt{2} - \sqrt{3}| = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

i) $|7 - \sqrt{50}| = \sqrt{50} - 7$

2. Averigua para qué valores de x se cumplen las siguientes relaciones:

a) $|x| = 5$

b) $|x| \leq 5$

c) $|x - 4| = 2$

d) $|x - 4| \leq 2$

e) $|x - 4| > 2$

f) $|x + 4| > 5$

a) 5 y -5

b) $-5 \leq x \leq 5$; $[-5, 5]$

c) 6 y 2

d) $2 \leq x \leq 6$; $[2, 6]$

e) $x < 2$ o $x > 6$; $(-\infty, 2) \cup (6, +\infty)$

f) $x < -9$ o $x > 1$; $(-\infty, -9) \cup (1, +\infty)$

Página 31

1. Simplifica:

a) $\sqrt[12]{x^9}$

b) $\sqrt[12]{x^8}$

c) $\sqrt[5]{y^{10}}$

d) $\sqrt[6]{8}$

e) $\sqrt[9]{64}$

f) $\sqrt[8]{81}$

a) $\sqrt[12]{x^9} = \sqrt[4]{x^3}$

b) $\sqrt[12]{x^8} = \sqrt[3]{x^2}$

c) $\sqrt[5]{y^{10}} = y^2$

d) $\sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$

e) $\sqrt[9]{64} = \sqrt[9]{2^6} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$

f) $\sqrt[8]{81} = \sqrt[8]{3^4} = \sqrt{3}$

2. ¿Cuál es mayor, $\sqrt[4]{31}$ o $\sqrt[3]{13}$?

Reducimos a índice común:

$$\sqrt[4]{31} = \sqrt[12]{29791}; \quad \sqrt[3]{13} = \sqrt[12]{28561}$$

Por tanto, es mayor $\sqrt[4]{31}$.

3. Reduce a índice común:

a) $\sqrt[12]{a^5}$ y $\sqrt[18]{a^7}$

b) $\sqrt[3]{51}$ y $\sqrt[2]{132650}$

a) $\sqrt[12]{a^5} = \sqrt[36]{a^{15}}$; $\sqrt[18]{a^7} = \sqrt[36]{a^{14}}$

b) $\sqrt[3]{51} = \sqrt[6]{132651}$; $\sqrt[2]{132650}$

4. Simplifica:

a) $(\sqrt{\sqrt{\sqrt{k}}})^8$

b) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^{10}}}$

c) $\sqrt[3]{(\sqrt{x})^6}$

a) $(\sqrt[8]{k})^8 = k$

b) $\sqrt[15]{x^{10}} = \sqrt[3]{x^2}$

c) $\sqrt[6]{x^6} = x$

Página 32

5. Reduce:

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{2}$

b) $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[6]{3}$

c) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2}$

a) $\sqrt[15]{2^5} \cdot \sqrt[15]{2^3} = \sqrt[15]{2^8}$

b) $\sqrt[6]{3^4} \cdot \sqrt[6]{3} = \sqrt[6]{3^5}$

c) $\sqrt[8]{2^4} \cdot \sqrt[8]{2^2} \cdot \sqrt[8]{2} = \sqrt[8]{2^7}$

6. Simplifica:

a) $\frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}}$

b) $\frac{\sqrt{a \cdot b}}{\sqrt[3]{a \cdot b}}$

c) $\frac{\sqrt[6]{a^3}}{\sqrt[3]{a^2}}$

d) $\frac{\sqrt[4]{a^3 \cdot b^5 \cdot c}}{\sqrt{a \cdot b^3 \cdot c^3}}$

a) $\sqrt{\frac{x^3}{x^5}} = \sqrt{\frac{1}{x^2}} = \sqrt{x^{-2}}$

b) $\sqrt[6]{\frac{a^3 b^3}{a^2 b^2}} = \sqrt[6]{a b}$

c) $\sqrt[6]{\frac{a^3}{a^4}} = \sqrt[6]{\frac{1}{a}} = \sqrt[6]{a^{-1}}$

d) $\sqrt[4]{\frac{a^3 b^5 c}{a^2 b^6 c^6}} = \sqrt[4]{\frac{a}{b c^5}} = \frac{1}{c} \sqrt[4]{\frac{a}{b c}}$

7. Reduce:

a) $\frac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt{3}}$

b) $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt[3]{3}}$

c) $\frac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt{2}}$

d) $\frac{\sqrt[4]{729}}{\sqrt{3}}$

a) $\sqrt[6]{\frac{3^4}{3^3}} = \sqrt[6]{3}$

b) $\sqrt[6]{\frac{3^6}{3^2}} = \sqrt[6]{3^4} = \sqrt[3]{3^2}$

c) $\sqrt[10]{\frac{2^8}{2^5}} = \sqrt[10]{2^3} = \sqrt[10]{8}$

d) $\sqrt[4]{\frac{3^6}{3^2}} = \sqrt[4]{3^4} = 3$

8. Suma y simplifica:

a) $5\sqrt{x} + 3\sqrt{x} + 2\sqrt{x}$

b) $\sqrt{9 \cdot 2} + \sqrt{25 \cdot 2} - \sqrt{2}$

c) $\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{2} - \sqrt{8}$

d) $\sqrt{27} - \sqrt{50} + \sqrt{12} + \sqrt{8}$

e) $\sqrt{50a} - \sqrt{18a}$

a) $10\sqrt{x}$

b) $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - \sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

c) $\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{2} - \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 3^2} + \sqrt{2 \cdot 5^2} - \sqrt{2} - \sqrt{2^3} =$
 $= 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - \sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

d) $\sqrt{3^3} - \sqrt{2 \cdot 5^2} + \sqrt{2^2 \cdot 3} + \sqrt{2^3} = 3\sqrt{3} - 5\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$

e) $\sqrt{2 \cdot 5^2 \cdot a} - \sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot a} = 5\sqrt{2a} - 3\sqrt{2a} = 2\sqrt{2a}$

Página 33

9. Racionaliza denominadores y simplifica cuando puedas:

a) $\frac{5}{\sqrt{7}}$

b) $\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$

c) $\sqrt{\frac{7}{3}}$

d) $\frac{1}{\sqrt{a^3}}$

e) $\frac{3}{\sqrt{50}}$

f) $\frac{4}{\sqrt{18}}$

g) $\frac{2}{\sqrt[3]{25}}$

h) $\frac{1}{\sqrt[3]{40}}$

i) $\frac{3}{\sqrt[3]{36}}$

j) $\frac{2}{\sqrt[3]{100}}$

a) $\frac{5}{\sqrt{7}} = \frac{5\sqrt{7}}{7}$

b) $\frac{3}{\sqrt[3]{4}} = \frac{3}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$

c) $\sqrt{\frac{7}{3}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{21}}{3}$

d) $\frac{1}{\sqrt{a^3}} = \frac{1}{a\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a^2}$

e) $\frac{3}{\sqrt{50}} = \frac{3}{\sqrt{2 \cdot 5^2}} = \frac{3}{5\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{10}$

f) $\frac{4}{\sqrt{18}} = \frac{4}{\sqrt{2 \cdot 3^2}} = \frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

g) $\frac{2}{\sqrt[3]{25}} = \frac{2}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{2\sqrt[3]{5}}{5}$

h) $\frac{1}{\sqrt[3]{40}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^3 \cdot 5}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[3]{5^2}}{10} = \frac{\sqrt[3]{25}}{10}$

i) $\frac{3}{\sqrt[3]{36}} = \frac{3}{\sqrt[3]{2^2 \cdot 3^2}} = \frac{3\sqrt[3]{2 \cdot 3}}{2 \cdot 3} = \frac{3\sqrt[3]{6}}{6} = \frac{\sqrt[3]{6}}{2}$

j) $\frac{2}{\sqrt[3]{100}} = \frac{2}{\sqrt[3]{2^2 \cdot 5^2}} = \frac{2\sqrt[3]{2 \cdot 5}}{2 \cdot 5} = \frac{2\sqrt[3]{10}}{10} = \frac{\sqrt[3]{10}}{5}$

10. Racionaliza denominadores y simplifica cuando puedas:

a) $\frac{1}{\sqrt{2} + 1}$

b) $\frac{x+y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$

c) $\frac{a-1}{\sqrt{a}-1}$

d) $\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$

e) $\frac{1}{2\sqrt{3} - \sqrt{5}}$

f) $\frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}$

g) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{\sqrt{2}+1}$

h) $\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} = \sqrt{2}-1 \\
 \text{b)} \quad & \frac{(x+y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})} = \frac{(x+y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y} = \frac{x\sqrt{x}-x\sqrt{y}+y\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{x-y} \\
 \text{c)} \quad & \frac{(a-1)(\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} = \frac{(a-1)(\sqrt{a}+1)}{(a-1)} = \sqrt{a}+1 \\
 \text{d)} \quad & \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})} = \frac{x+y+2\sqrt{xy}}{x-y} \\
 \text{e)} \quad & \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{(2\sqrt{3}-\sqrt{5})(2\sqrt{3}+\sqrt{5})} = \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{12-5} = \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{7} \\
 \text{f)} \quad & \frac{(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})^2}{18-12} = \frac{18+12+12\sqrt{6}}{6} = \frac{30+12\sqrt{6}}{6} = 5+2\sqrt{6} \\
 \text{g)} \quad & \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}+1}{1} + \frac{\sqrt{2}-1}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \\
 \text{h)} \quad & \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y} = \frac{2\sqrt{x}}{x-y}
 \end{aligned}$$

Página 35

1. Calcula en notación científica sin usar la calculadora:

$$\text{a) } (800\,000 : 0,0002) \cdot 0,5 \cdot 10^{12} \qquad \text{b) } 0,486 \cdot 10^{-5} + 93 \cdot 10^{-9} - 6 \cdot 10^{-7}$$

$$\begin{aligned}
 \text{a) } (800\,000 : 0,0002) \cdot 0,5 \cdot 10^{12} &= [(8 \cdot 10^5) : (2 \cdot 10^{-4})] \cdot (5 \cdot 10^{11}) = \\
 &= (4 \cdot 10^9) \cdot (5 \cdot 10^{11}) = 20 \cdot 10^{20} = 2 \cdot 10^{21}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } 0,486 \cdot 10^{-5} + 93 \cdot 10^{-9} - 6 \cdot 10^{-7} &= 4860 \cdot 10^{-9} + 93 \cdot 10^{-9} - 600 \cdot 10^{-9} = \\
 &= (4860 + 93 - 600) \cdot 10^{-9} = 4353 \cdot 10^{-9} = 4,353 \cdot 10^{-6}
 \end{aligned}$$

2. Opera con la calculadora:

$$\text{a) } (3,87 \cdot 10^{15} \cdot 5,96 \cdot 10^{-9}) : (3,941 \cdot 10^{-6}) \quad \text{b) } 8,93 \cdot 10^{-10} + 7,64 \cdot 10^{-10} - 1,42 \cdot 10^{-9}$$

$$\text{a) } 3,87 \text{ [EXP] } 15 \text{ [x]} 5,96 \text{ [EXP] } 9 \text{ [+/-] } \text{[÷]} 3,941 \text{ [EXP] } 6 \text{ [+/-] } \text{[=]} \quad \boxed{5.85262623712}$$

Es decir: $5,85 \cdot 10^{12}$

$$\text{b) } 8,93 \text{ [EXP] } 10 \text{ [+/-] } \text{[+]} 7,64 \text{ [EXP] } 10 \text{ [+/-] } \text{[-]} 1,42 \text{ [EXP] } 9 \text{ [+/-] } \text{[=]} \quad \boxed{2.3718}$$

Es decir: $2,37 \cdot 10^{-10}$

Página 38

1. Halla:

a) $\log_2 16$ b) $\log_2 0,25$ c) $\log_9 1$ d) $\log_{10} 0,1$ e) $\log_4 64$
f) $\log_7 49$ g) $\ln e^4$ h) $\ln e^{-1/4}$ i) $\log_5 0,04$ j) $\log_6 \left(\frac{1}{216}\right)$

a) $\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$ b) $\log_2 0,25 = \log_2 2^{-2} = -2$ c) $\log_9 1 = 0$
d) $\log_{10} 0,1 = \log_{10} 10^{-1} = -1$ e) $\log_4 64 = \log_4 4^3 = 3$ f) $\log_7 49 = \log_7 7^2 = 2$
g) $\ln e^4 = 4$ h) $\ln e^{-1/4} = -\frac{1}{4}$
i) $\log_5 0,04 = \log_5 5^{-2} = -2$ j) $\log_6 \left(\frac{1}{216}\right) = \log_6 6^{-3} = -3$

2. Halla la parte entera de:

a) $\log_2 60$ b) $\log_5 700$ c) $\log_{10} 43\,000$
d) $\log_{10} 0,084$ e) $\log_9 60$ f) $\ln e$

a) $2^5 = 32$; $2^6 = 64$; $32 < 60 < 64$
 $5 < \log_2 60 < 6 \rightarrow \log_2 60 = 5, \dots$
b) $5^4 = 625$; $5^5 = 3125$; $625 < 700 < 3125$
 $4 < \log_5 700 < 5 \rightarrow \log_5 700 = 4, \dots$
c) $10^4 = 10\,000$; $10^5 = 100\,000$; $10\,000 < 43\,000 < 100\,000$
 $4 < \log_{10} 43\,000 < 5 \rightarrow \log_{10} 43\,000 = 4, \dots$
d) $10^{-2} = 0,01$; $10^{-1} = 0,1$; $0,01 < 0,084 < 0,1$
 $-2 < \log_{10} 0,084 < -1 \rightarrow \log_{10} 0,084 = -1, \dots$
e) $9^1 = 9$; $9^2 = 81$; $9 < 60 < 81$
 $1 < \log_9 60 < 2 \rightarrow \log_9 60 = 1, \dots$
f) $\ln e = 1$

3. Aplica la propiedad 8 para obtener los siguientes logaritmos con la ayuda de la calculadora:

a) $\log_2 1\,500$ b) $\log_5 200$ c) $\log_{100} 200$ d) $\log_{100} 40$

En cada caso, comprueba el resultado utilizando la potenciación.

a) $\frac{\log 1500}{\log 2} = 10,55$; $2^{10,55} \approx 1500$ b) $\frac{\log 200}{\log 5} = 3,29$; $5^{3,29} \approx 200$

$$c) \frac{\log 200}{\log 100} = 1,15; \quad 100^{1,15} \approx 200$$

$$d) \frac{\log 40}{\log 100} = 0,80; \quad 100^{0,80} \approx 40$$

4. Sabiendo que $\log_5 A = 1,8$ y $\log_5 B = 2,4$, calcula:

$$a) \log_5 \sqrt[3]{\frac{A^2}{25B}}$$

$$b) \log_5 \frac{5\sqrt{A^3}}{B^2}$$

$$a) \log_5 \sqrt[3]{\frac{A^2}{25B}} = \frac{1}{3} [2 \log_5 A - \log_5 25 - \log_5 B] = \frac{1}{3} [2 \cdot 1,8 - 2 - 2,4] = \frac{-0,8}{3} \approx -0,27$$

$$b) \log_5 \frac{5\sqrt{A^3}}{B^2} = \log_5 5 + \frac{3}{2} \log_5 A - 2 \log_5 B = 1 + \frac{3}{2} \cdot 1,8 - 2 \cdot 2,4 = 1 + 2,7 - 4,8 = -1,1$$

5. Averigua la relación que hay entre x e y , sabiendo que se verifica:

$$\ln y = 2x - \ln 5$$

$$\ln y = 2x - \ln 5 \rightarrow \ln y = \ln e^{2x} - \ln 5$$

$$\ln y = \ln \frac{e^{2x}}{5} \rightarrow y = \frac{e^{2x}}{5}$$

Página 43

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Números racionales e irracionales

1 Expresa como fracción cada decimal y opera:

$$0,1\overline{2} - 5,6\overline{6} - 0,2\overline{3} + 3,1$$

• Recuerda que $5,6\overline{6} = \frac{56-5}{9}$; $0,2\overline{3} = \frac{23-2}{90}$.

$$\frac{12}{99} - \frac{51}{99} - \frac{21}{90} + \frac{31}{10} = -\frac{442}{165} = -2,6\overline{78}$$

2 Demuestra que el producto $4,0\overline{9} \cdot 1,3\overline{9}$ es un decimal exacto.

• Comprueba, pasando a fracción, que los dos factores son decimales exactos.

$$4,0\overline{9} = \frac{409-40}{90} = \frac{369}{90} = 4,1 \quad 1,3\overline{9} = \frac{139-13}{90} = \frac{126}{90} = 1,4$$

$$4,0\overline{9} \cdot 1,3\overline{9} = 4,1 \cdot 1,4 = 5,74$$

3 Calcula: a) $\sqrt{1,7}$ b) $\sqrt{\frac{1,3}{3}}$

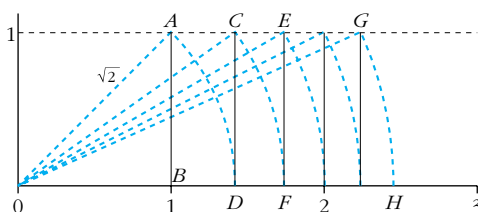
a) $\sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3} = 1,3$ b) $\frac{4}{9} = \frac{2}{3} = 0,6$

4 Indica cuál, de cada par de números, es mayor:

a) $\frac{140}{99}$ y $\sqrt{2}$ b) $0,52\overline{6}$ y $0,52\overline{6}$ c) $4,8\overline{9}$ y $2\sqrt{6}$ d) $-2,098$ y $-2,1$

a) $\sqrt{2}$ b) $0,52\overline{6}$ c) $4,8\overline{9}$ d) $-2,098$

5 Observa cómo hemos representado algunos números irracionales:



En el triángulo OAB , $\overline{OB} = 1$, $\overline{AB} = 1$ y $\overline{OA} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Por tanto, el punto D representa a $\sqrt{2}$.

¿Qué números representan los puntos F y H ? Justifica tu respuesta.

F representa: $\sqrt{3}$ pues $\overline{OF} = \overline{OC} = \sqrt{\overline{OD}^2 + \overline{DC}^2} = (\sqrt{2})^2 + 1^2 = \sqrt{3}$

H representa: $\sqrt{6}$ pues $\overline{OH} = \overline{OG} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 1^2} = \sqrt{6}$

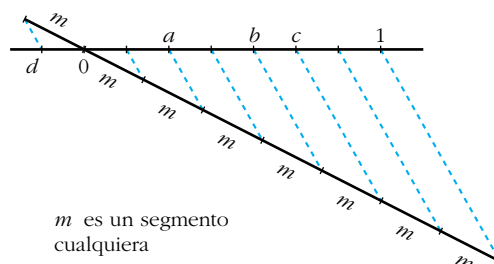
6 ¿Cuáles son los números racionales a , b , c , d representados en este gráfico?

$a = \frac{2}{7}$

$b = \frac{4}{7}$

$c = \frac{5}{7}$

$d = -\frac{1}{7}$



Potencias

7 Halla sin calculadora: $\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{4}\right)^{-2} \left(\frac{1}{3} - \frac{7}{9}\right)^{-1} + 4$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(-\frac{4}{9}\right)^{-1} + 4 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \cdot \left(-\frac{9}{4}\right) + 4 = -4 + 4 = 0$$

8 Simplifica, utilizando las propiedades de las potencias:

a) $\frac{3^6 \cdot 2^5 \cdot 5^2}{9^3 \cdot 4^3 \cdot 5}$ b) $\frac{3^4 \cdot 16 \cdot 9^{-1}}{5^{-1} \cdot 3^5}$ c) $\frac{15^2 \cdot 8^{-1}}{6^3 \cdot 10^2}$ d) $\frac{a^{-3} b^{-4} c^7}{a^{-5} b^2 c^{-1}}$

• *Mira, en EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS, el nº 4 a).*

a) $\frac{3^6 \cdot 2^5 \cdot 5^2}{3^6 \cdot 2^6 \cdot 5} = \frac{5}{2}$ b) $\frac{3^4 \cdot 2^4 \cdot 3^{-2}}{5^{-1} \cdot 3^5} = \frac{2^4 \cdot 5}{3^3} = \frac{80}{27}$
c) $\frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot 2^{-3}}{2^3 \cdot 3^3 \cdot 2^2 \cdot 5^2} = \frac{1}{2^8} = 2^{-8} = \frac{1}{256}$ d) $\frac{c^7 a^5 c}{a^3 b^4 b^2} = \frac{a^2 c^8}{b^6}$

9 Expresa los siguientes radicales mediante potencias de exponente fraccionario y simplifica:

a) $\sqrt[5]{a^2} \cdot \sqrt{a}$ b) $\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}$ c) $\frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}$

a) $a^{2/5} \cdot a^{1/2} = a^{9/10} = \sqrt[10]{a^9}$ b) $\frac{x^{2/3}}{x^{1/2}} = x^{1/6} = \sqrt[6]{x}$ c) $a^{-3/4} = \sqrt[4]{a^{-3}}$

10 Resuelve, sin utilizar la calculadora:

a) $\sqrt[5]{32}$ b) $\sqrt[3]{343}$ c) $\sqrt[4]{625}$ d) $\sqrt{0,25}$ e) $\sqrt[3]{8^4}$ f) $\sqrt[3]{0,001}$

a) $\sqrt[5]{2^5} = 2$ b) $\sqrt[3]{7^3} = 7$ c) $\sqrt[4]{5^4} = 5$

d) $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} = 0,5$ e) $\sqrt[3]{2^{12}} = 2^4 = 16$ f) $\sqrt[3]{0,1^3} = 0,1$

11 Expresa como una potencia de base 2:

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $(-32)^{1/5}$ c) $(\sqrt[8]{2})^4$

a) $2^{-1/2}$ b) $(-2^5)^{1/5} = -2$ c) $2^{4/8} = 2^{1/2}$

12 Calcula utilizando potencias de base 2, 3 y 5:

a) $4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^3$ b) $\left(-\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^{-1} \cdot \frac{1}{8}$

c) $\frac{(-5)^3 (-8)^3 (-9)^2}{15^2 \cdot 20^4}$ d) $\frac{(-30)^{-1} \cdot 15^2}{10^3}$

a) $2^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{(-3)^3}{2^3} = \frac{-9}{2} = \frac{-9}{2}$ b) $\frac{1}{2^4} \cdot \frac{3^2}{2} \cdot \frac{1}{2^3} = \frac{3^2}{2^8} = \frac{9}{256}$

c) $\frac{(-5)^3 \cdot (-2^3)^3 \cdot (-3^2)^2}{3^2 \cdot 5^2 \cdot (2^2 \cdot 5)^4} = \frac{5^3 \cdot 2^9 \cdot 3^4}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 2^8 \cdot 5^4} = \frac{2 \cdot 3^2}{5^3} = \frac{18}{125}$

d) $\frac{3^2 \cdot 5^2}{-2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2^3 \cdot 5^3} = -\frac{3}{5^2 \cdot 2^4} = \frac{-3}{400}$

13 Expresa en forma de potencia, efectúa las operaciones y simplifica:

a) $\frac{\sqrt[4]{a^3} \cdot a^{-1}}{a \sqrt{a}}$

b) $16^{1/4} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{\sqrt[6]{4}}$

a) $\frac{a^{3/4} \cdot a^{-1}}{a \cdot a^{1/2}} = a^{-7/4} = \frac{1}{\sqrt[4]{7}}$

b) $(2^4)^{1/4} \cdot (2^2)^{-1/3} \cdot (2^2)^{-1/6} = 2 \cdot 2^{-2/3} \cdot 2^{-1/3} = 2^0 = 1$

14 Justifica las igualdades que son verdaderas. Escribe el resultado correcto en las falsas:

a) $\frac{a^2 \cdot b^{-2}}{a^{-2} \cdot b^2} = 1$

b) $(3^{-2})^{-3} \left(\frac{1}{27}\right)^2 = 1$

c) $\frac{3^{-2} - 5^{-2}}{3^{-1} - 5^{-1}} = \frac{8}{15}$

d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - (-3)^{-2} = \frac{80}{9}$

a) Falsa. $\frac{a^2 \cdot b^{-2}}{a^{-2} \cdot b^2} = \frac{a^4}{b^4}$

b) Verdadera. $(3^{-2})^{-3} \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^2 = 3^6 \cdot \left(\frac{1}{3^3}\right)^2 = 3^6 \cdot \frac{1}{3^6} = \frac{3^6}{3^6} = 1$

c) Verdadera. $\frac{3^{-2} - 5^{-2}}{3^{-1} - 5^{-1}} = \frac{(1/3^2) - (1/5^2)}{1/3 - 1/5} = \frac{(1/3 - 1/5)(1/3 + 1/5)}{(1/3 - 1/5)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$

d) Verdadera. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - (-3)^{-2} = 3^2 - \frac{1}{(-3)^2} = 3^2 - \frac{1}{3^2} = 9 - \frac{1}{9} = \frac{81 - 1}{9} = \frac{80}{9}$

15 Demuestra, utilizando potencias, que:

a) $(0,125)^{1/3} = 2^{-1}$

b) $(0,25)^{-1/2} = 2$

a) $(0,125)^{1/3} = \left(\frac{125}{1000}\right)^{1/3} = \left(\frac{1}{8}\right)^{1/3} = \left(\frac{1}{2^3}\right)^{1/3} = \frac{1}{2} = 2^{-1}$

b) $(0,25)^{-1/2} = \left(\frac{25}{100}\right)^{-1/2} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-1/2} = \left(\frac{1}{2^2}\right)^{-1/2} = (2^2)^{1/2} = 2$

Página 44

Radicales

16 Introduce los factores dentro de cada raíz:

a) $2\sqrt[3]{3}$

b) $4\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$

c) $\frac{2}{x}\sqrt{\frac{3x}{8}}$

d) $\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{25}{9}}$

e) $2\sqrt[4]{4}$

f) $\frac{1}{5}\sqrt[3]{15}$

a) $\sqrt[3]{3 \cdot 2^3} = \sqrt[3]{24}$

b) $\sqrt[3]{\frac{4^3}{4}} = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{16}$

c) $\sqrt{\frac{2^2 \cdot 3x}{x^2 \cdot 2^3}} = \sqrt{\frac{3}{2x}}$

d) $\sqrt[3]{\frac{3^3 \cdot 5^2}{5^3 \cdot 3^2}} = \sqrt[3]{\frac{3}{5}}$

e) $\sqrt[4]{2^4 \cdot 2^2} = \sqrt[4]{2^6} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8}$

f) $\sqrt[3]{\frac{3 \cdot 5}{5^3}} = \sqrt[3]{\frac{3}{5^2}} = \sqrt[3]{\frac{3}{25}}$

17 Sacar de la raíz el factor que puedas:

a) $\sqrt[3]{16}$

b) $4\sqrt{8}$

c) $\sqrt{1000}$

d) $\sqrt[3]{8a^5}$

e) $\sqrt{\frac{125a^2}{16b}}$

f) $\frac{1}{4} + \frac{1}{9}$

g) $\sqrt{\frac{16}{a^3}}$

h) $\sqrt{4a^2 + 4}$

i) $\frac{a}{9} + \frac{a}{16}$

a) $\sqrt[3]{2^4} = 2\sqrt[3]{2}$

b) $4\sqrt{2^3} = 4 \cdot 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

c) $\sqrt{2^3 \cdot 5^3} = 10\sqrt{10}$

d) $\sqrt[3]{2^3 \cdot a^5} = 2a\sqrt[3]{a^2}$

e) $\sqrt{\frac{5^3 \cdot a^2}{2^4 \cdot b}} = \frac{5a}{4}\sqrt{\frac{5}{b}}$

f) $\sqrt{\frac{13}{36}} = \frac{1}{6}\sqrt{13}$

g) $\frac{4}{a}\sqrt{\frac{1}{a}}$

h) $\sqrt{4(a^2 + 1)} = 2\sqrt{a^2 + 1}$

i) $\sqrt{\frac{25a}{16 \cdot 9}} = \frac{5\sqrt{a}}{12}$

18 Simplifica:

a) $\sqrt[6]{0,027}$

b) $\sqrt[8]{0,0016}$

c) $\sqrt[4]{1 + \frac{9}{16}}$

a) $\sqrt[6]{\frac{27}{1000}} = \sqrt[6]{\frac{3^3}{10^3}} = \sqrt[6]{\left(\frac{3}{10}\right)^3} = \left(\frac{3}{10}\right)^{3/6} = \left(\frac{3}{10}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{3}{10}}$

b) $\sqrt[8]{\frac{16}{10000}} = \sqrt[8]{\frac{2^4}{10^4}} = \sqrt[8]{\left(\frac{2}{10}\right)^4} = \left(\frac{1}{5}\right)^{4/8} = \left(\frac{1}{5}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{1}{5}}$

c) $\sqrt[4]{\frac{25}{16}} = \sqrt[4]{\frac{5^2}{4^2}} = \left(\frac{5}{4}\right)^{2/4} = \left(\frac{5}{4}\right)^{1/2} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

19 Simplifica los siguientes radicales:

a) $\sqrt[3]{24}$

b) $\sqrt[6]{27}$

c) $\sqrt[3]{-108}$

d) $\sqrt[12]{64y^3}$

e) $\sqrt[4]{\frac{81}{64}}$

f) $\sqrt[8]{625} : \sqrt[4]{25}$

a) $\sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = 2\sqrt[3]{3}$

b) $\sqrt[6]{3^3} = 3^{3/6} = 3^{1/2} = \sqrt{3}$

c) $-\sqrt[3]{3^3 \cdot 2^2} = -3\sqrt[3]{2^2}$

d) $\sqrt[12]{2^6 \cdot y^3} = \sqrt[4]{2^2 \cdot y} = \sqrt[4]{2^2} \cdot \sqrt[4]{y} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{y}$

e) $\sqrt[4]{\frac{3^4}{2^6}} = \frac{3}{\sqrt{2^3}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

f) $\sqrt[8]{5^4} : \sqrt[4]{5^2} = \sqrt{5} : \sqrt{5} = 1$

20 Reduce a índice común y ordena de menor a mayor:

a) $\sqrt[4]{4}, \sqrt[3]{3}, \sqrt{2}$

b) $\sqrt{6}, \sqrt[3]{4}$

c) $\sqrt[4]{6}, \sqrt[5]{10}$

d) $\sqrt[4]{72}, \sqrt[3]{9}, \sqrt[6]{100}$

a) $\sqrt[12]{64}, \sqrt[12]{81}, \sqrt[12]{64}; \sqrt[4]{4} = \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$

b) $\sqrt[6]{216}, \sqrt[6]{16}; \sqrt[3]{4} < \sqrt{6}$

c) $\sqrt[20]{7776}, \sqrt[20]{10000}; \sqrt[4]{6} < \sqrt[5]{10}$

d) $\sqrt[12]{373248}, \sqrt[12]{6561}, \sqrt[12]{10000}; \sqrt[3]{9} < \sqrt[6]{100} < \sqrt[4]{72}$

21 Realiza la operación y simplifica si es posible:

a) $4\sqrt{27} \cdot 5\sqrt{6}$

b) $2\sqrt{\frac{4}{3}} \cdot \sqrt{\frac{27}{8}}$

c) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{8}}$

d) $(\sqrt[3]{12})^2$

e) $(\sqrt[6]{32})^3$

f) $\sqrt[3]{24} : \sqrt[3]{3}$

a) $20\sqrt{27 \cdot 6} = 20\sqrt{3^3 \cdot 2 \cdot 3} = 20\sqrt{2 \cdot 3^4} = 180\sqrt{2}$

b) $2\sqrt{\frac{4 \cdot 27}{3 \cdot 8}} = 2\sqrt{\frac{9}{2}} = 6\sqrt{\frac{1}{2}}$

c) $\sqrt{\frac{2}{8}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

d) $(\sqrt[3]{2^2 \cdot 3})^2 = \sqrt[3]{2^4 \cdot 3^2} = 2\sqrt[3]{2 \cdot 3^2} = 2\sqrt[3]{18}$

e) $(\sqrt[6]{2^5})^3 = \sqrt[6]{2^{15}} = \sqrt{2^5} = 2^2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

f) $\sqrt[3]{2^3 \cdot 3} : \sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3} : \sqrt[3]{3} = 2$

22 Efectúa y simplifica, si es posible:

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3}$ b) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{a}} \cdot \sqrt{a}$ c) $\left(\frac{\sqrt[6]{32}}{\sqrt{8}}\right)^3$ d) $\sqrt[3]{2\sqrt{3}} : \sqrt[3]{\sqrt{4}}$

• En b) y c) puedes expresar los radicales como potencias de bases a y 2 , respectivamente.

a) $\sqrt[6]{2^2 \cdot 3^3} = \sqrt[6]{108}$

b) $\sqrt[3]{a} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{a}} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a}$

c) $\left(\sqrt[6]{\frac{2^5}{2^9}}\right)^3 = \left(\sqrt[6]{\frac{1}{2^4}}\right)^3 = \sqrt[6]{\frac{1}{2^{12}}} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt{2^2 \cdot 3}} : \sqrt[3]{\sqrt{2^2}} = \sqrt[6]{2^2 \cdot 3} : \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{3}$

23 Expresa con una única raíz:

a) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{4}}$ b) $\sqrt[3]{2\sqrt[4]{8}}$ c) $(\sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[5]{a^4}) : \sqrt{a}$

a) $\sqrt[12]{4}$

b) $\sqrt[12]{2^4 \cdot 2^3} = \sqrt[12]{2^7} = \sqrt[12]{128}$

c) $\sqrt[20]{\frac{a^{15} \cdot a^{16}}{a^{10}}} = \sqrt[20]{a^{21}} = a \sqrt[20]{a}$

24 Racionaliza los denominadores y simplifica:

a) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{18}}$ b) $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$ c) $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$ d) $\frac{3}{3+\sqrt{3}}$ e) $\frac{\sqrt{72} + 3\sqrt{32} - \sqrt{8}}{\sqrt{8}}$

a) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2 \cdot 3^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{6}}{3 \cdot 2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

b) $\frac{2\sqrt[3]{4}}{2} = \sqrt[3]{4}$

c) $\frac{(\sqrt{2}-1)\sqrt{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$

d) $\frac{3(3-\sqrt{3})}{9-3} = \frac{9-3\sqrt{3}}{6} = \frac{3(3-\sqrt{3})}{2 \cdot 3} = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$

e) $\frac{\sqrt{2^3 \cdot 3^2} + 3\sqrt{2^5} - \sqrt{2^3}}{\sqrt{2^3}} = \frac{3\sqrt{8} + 6\sqrt{8} - \sqrt{8}}{\sqrt{8}} = \frac{8\sqrt{8}}{\sqrt{8}} = 8$

25 Calcula y simplifica:

a) $5\sqrt{125} + 6\sqrt{45} - 7\sqrt{20} + \frac{3}{2}\sqrt{80}$ b) $\sqrt[3]{16} + 2\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{54} - \frac{21}{5}\sqrt[3]{250}$

c) $\sqrt{125} + \sqrt{54} - \sqrt{45} - \sqrt{24}$ d) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{6} - 1)$

a) $25\sqrt{5} + 18\sqrt{5} - 14\sqrt{5} + 6\sqrt{5} = 35\sqrt{5}$

b) $2\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{2} - 21\sqrt[3]{2} = -20\sqrt[3]{2}$

c) $5\sqrt{5} + 3\sqrt{6} - 3\sqrt{5} - 2\sqrt{6} = 2\sqrt{5} + \sqrt{6}$

d) $\sqrt{12} - \sqrt{2} + \sqrt{18} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3} - \sqrt{2} + 3\sqrt{2} - \sqrt{3} = \sqrt{3} + 2\sqrt{2}$

26 Simplifica al máximo las siguientes expresiones:

a) $3\sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{250} + 5\sqrt[3]{54} - 4\sqrt[3]{2}$

b) $\sqrt{\frac{2}{5}} - 4\sqrt{\frac{18}{125}} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8}{45}}$

c) $7\sqrt[3]{81a} - 2\sqrt[3]{3a^4} + \frac{\sqrt[3]{3a}}{5}$

a) $3\sqrt[3]{2^4} - 2\sqrt[3]{2 \cdot 5^3} + 5\sqrt[3]{2 \cdot 3^3} - 4\sqrt[3]{2} = 6\sqrt[3]{2} - 10\sqrt[3]{2} + 15\sqrt[3]{2} - 4\sqrt[3]{2} = 7\sqrt[3]{2}$

b) $\sqrt{\frac{2}{5}} - 4\sqrt{\frac{2 \cdot 3^2}{5^3}} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2^3}{3^2 \cdot 5}} = \sqrt{\frac{2}{5}} - \frac{12}{5}\sqrt{\frac{2}{5}} + \frac{2}{9}\sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{-53}{45}\sqrt{\frac{2}{5}}$

c) $7\sqrt[3]{3^4 \cdot a} - 2\sqrt[3]{3a^4} + \frac{\sqrt[3]{3a}}{5} = 21\sqrt[3]{3a} - 2a\sqrt[3]{3a} + \frac{\sqrt[3]{3a}}{5} = \left(\frac{106}{5} - 2a\right)\sqrt[3]{3a}$

27 Efectúa y simplifica:

a) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$ b) $(\sqrt{6} + \sqrt{5})2\sqrt{2}$

c) $(\sqrt{5} - \sqrt{6})(\sqrt{5} + \sqrt{6})$ d) $(2\sqrt{5} - 3\sqrt{2})^2$

e) $(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)\sqrt{3}$

a) $(\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{2}) = 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{6}$

b) $2\sqrt{12} + 2\sqrt{10} = 4\sqrt{3} + 2\sqrt{10}$

c) $5 - 6 = -1$

d) $20 + 18 - 12\sqrt{10} = 38 - 12\sqrt{10}$

e) $(2 - 1)\sqrt{3} = \sqrt{3}$

28 Racionaliza y simplifica:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{18}} & \text{b)} \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{12}} & \text{c)} \frac{1}{2(\sqrt{3}-\sqrt{5})} \\ \text{d)} \frac{3}{\sqrt{5}-2} & \text{e)} \frac{11}{2\sqrt{5}+3} & \text{f)} \frac{3\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}+2} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{a)} \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot 3^2} &= \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{(2\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{2}}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{6}-2}{3 \cdot 2} = \\ &= \frac{2(\sqrt{6}-1)}{3 \cdot 2} = \frac{\sqrt{6}-1}{3} \end{aligned}$$

$$\text{b)} \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2^2} \cdot 3} = \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{(2\sqrt{3}+\sqrt{2})\sqrt{3}}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{6+\sqrt{6}}{6} = 1 + \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$\text{c)} \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{2(\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{3}+\sqrt{5})} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2(3-5)} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{-4} = -\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{4}$$

$$\text{d)} \frac{3(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)} = \frac{3(\sqrt{5}+2)}{5-4} = 3(\sqrt{5}+2) = 3\sqrt{5}+6$$

$$\text{e)} \frac{11(2\sqrt{5}-3)}{(2\sqrt{5}+3)(2\sqrt{5}-3)} = \frac{11(2\sqrt{5}-3)}{20-9} = \frac{11(2\sqrt{5}-3)}{11} = 2\sqrt{5}-3$$

$$\begin{aligned} \text{f)} \frac{(3\sqrt{6}+2\sqrt{2})(3\sqrt{3}-2)}{(3\sqrt{3}+2)(3\sqrt{3}-2)} &= \frac{9\sqrt{18}-6\sqrt{6}+6\sqrt{6}-4\sqrt{2}}{27-4} = \frac{9\sqrt{2} \cdot 3^2 - 4\sqrt{2}}{23} = \\ &= \frac{27\sqrt{2}-4\sqrt{2}}{23} = \frac{23\sqrt{2}}{23} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

29 Racionaliza y efectúa:

$$\text{a)} \frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \qquad \text{b)} \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$$

$$\text{a)} \frac{3(\sqrt{3}+\sqrt{2})-2(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{3\sqrt{3}+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3}+5\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \frac{(\sqrt{7}-\sqrt{5})^2-(\sqrt{7}+\sqrt{5})^2}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})} &= \frac{(\sqrt{7}-\sqrt{5}+\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5}-\sqrt{7}-\sqrt{5})}{7-5} = \\ &= \frac{2\sqrt{7}(-2\sqrt{5})}{2} = -2\sqrt{35} \end{aligned}$$

Página 45

30 Opera y simplifica: $\frac{1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}} + \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}}$

$$\frac{1}{\frac{1 + \sqrt{3} - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}} + \frac{1}{\frac{1 - \sqrt{3} + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}} = 1 + \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} = 2$$

Notación científica

31 Efectúa y da el resultado en notación científica con tres cifras significativas:

a) $\frac{(3,12 \cdot 10^{-5} + 7,03 \cdot 10^{-4}) 8,3 \cdot 10^8}{4,32 \cdot 10^3}$

b) $\frac{(12,5 \cdot 10^7 - 8 \cdot 10^9)(3,5 \cdot 10^{-5} + 185)}{9,2 \cdot 10^6}$

c) $\frac{5,431 \cdot 10^3 - 6,51 \cdot 10^4 + 385 \cdot 10^2}{8,2 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-4}}$

a) $1,41 \cdot 10^2$

b) $-1,58 \cdot 10^5$

c) $-2,65 \cdot 10^6$

32 Ordena de mayor a menor los números de cada apartado. Para ello, pasa a notación científica los que no lo estén:

a) $3,27 \cdot 10^{13}$; $85,7 \cdot 10^{12}$; $453 \cdot 10^{11}$

b) $1,19 \cdot 10^{-9}$; $0,05 \cdot 10^{-7}$; $2000 \cdot 10^{-12}$

a) $8,57 \cdot 10^{13} > 4,53 \cdot 10^{13} > 3,27 \cdot 10^{13}$

b) $5 \cdot 10^{-9} > 2 \cdot 10^{-9} > 1,19 \cdot 10^{-9}$

33 Efectúa: $\frac{2 \cdot 10^{-7} - 3 \cdot 10^{-5}}{4 \cdot 10^6 + 10^5}$

$-7,268 \cdot 10^{-12}$

34 Expresa en notación científica y calcula: $\frac{60\,000^3 \cdot 0,00002^4}{100^2 \cdot 72\,000\,000 \cdot 0,0002^5}$

$$\frac{(6 \cdot 10^4)^3 \cdot (2 \cdot 10^{-5})^4}{10^4 \cdot 7,2 \cdot 10^7 \cdot (2 \cdot 10^{-4})^5} = 150$$

35 Considera los números: $A = 3,2 \cdot 10^7$; $B = 5,28 \cdot 10^4$ y $C = 2,01 \cdot 10^5$

Calcula $\frac{B + C}{A}$.

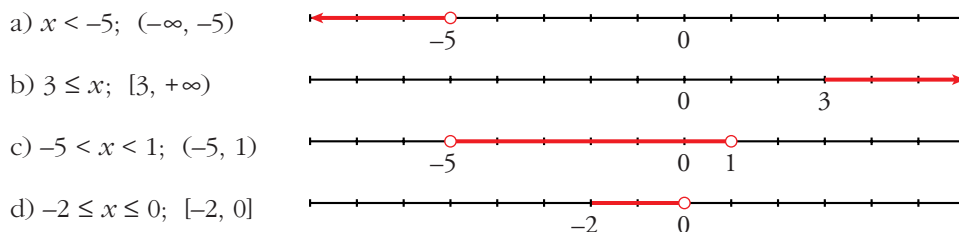
$0,00793125 = 7,93125 \cdot 10^{-3}$

- 36** Si $A = 3,24 \cdot 10^6$; $B = 5,1 \cdot 10^{-5}$; $C = 3,8 \cdot 10^{11}$ y $D = 6,2 \cdot 10^{-6}$, calcula $\left(\frac{A}{B} + C\right) \cdot D$.
 $2\,749\,882,353 \approx 2,7499 \cdot 10$

Intervalos y valor absoluto

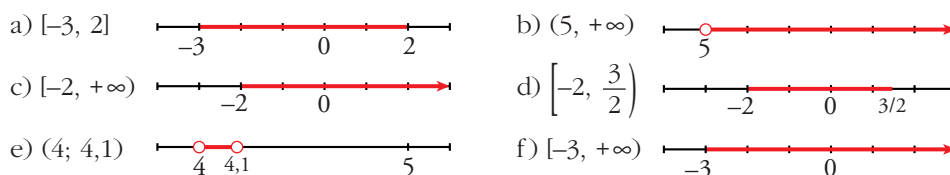
- 37** Expresa como desigualdad y como intervalo y represéntalos:

- a) x es menor que -5 .
 b) 3 es menor o igual que x .
 c) x está comprendido entre -5 y 1 .
 d) x está entre -2 y 0 , ambos incluidos.



- 38** Representa gráficamente y expresa como intervalos estas desigualdades:

- a) $-3 \leq x \leq 2$ b) $5 < x$ c) $x \geq -2$
 d) $-2 \leq x < 3/2$ e) $4 < x < 4,1$ f) $-3 \leq x$



- 39** Escribe la desigualdad que verifica todo número x que pertenece a estos intervalos:

- a) $[-2, 7]$ b) $[13, +\infty)$ c) $(-\infty, 0)$
 d) $(-3, 0]$ e) $[3/2, 6)$ f) $(-\infty, +\infty)$

- a) $-2 \leq x \leq 7$ b) $x \geq 13$ c) $x < 0$
 d) $-3 < x \leq 0$ e) $\frac{3}{2} \leq x < 6$ f) $-\infty < x < +\infty$

- 40** Expresa como intervalo la parte común de cada pareja de intervalos $(A \cap B)$ e $(I \cap J)$:

- a) $A = [-3, 2]$; $B = [0, 5]$ b) $I = [2, \infty)$; $J = (0, 10)$
 a) $[0, 2]$ b) $[2, 10]$

41 Escribe en forma de intervalos los números que verifican estas desigualdades:

a) $x < 3$ y $x \geq 5$

b) $x > 0$ y $x < 4$

c) $x \leq -1$ y $x > 1$

d) $x < 3$ y $x \leq -2$

• Representálos gráficamente, y si son dos intervalos separados, como en a), escribe: $(-\infty, 3) \cup [5, +\infty)$

a) $(-\infty, 3) \cup [5, \infty)$

b) $(0, 4)$

c) $(-\infty, -1] \cup (1, \infty)$

d) $(-\infty, -2]$

42 Expresa, en forma de intervalo, los números que cumplen cada una de estas expresiones:

a) $|x| < 7$

b) $|x| \geq 5$

c) $|2x| < 8$

d) $|x - 1| \leq 6$

e) $|x + 2| > 9$

f) $|x - 5| \geq 1$

a) $|x| < 7 \rightarrow -7 < x < 7 \rightarrow$ Intervalo $(-7, 7)$.

b) $|x| \geq 5 \rightarrow x \leq -5$ ó $x \geq 5 \rightarrow (-\infty, -5] \cup [5, +\infty)$.

c) $|2x| < 8 \rightarrow |x| < 4 \rightarrow -4 < x < 4 \rightarrow$ Intervalo $(-4, 4)$.

d) $|x - 1| \leq 6 \rightarrow -5 \leq x \leq 7 \rightarrow$ Intervalo $[-5, 7]$.

e) $|x + 2| > 9 \rightarrow x < -11$ ó $x > 7 \rightarrow (-\infty, -11) \cup [7, +\infty)$.

f) $|x - 5| \geq 1 \rightarrow x \leq 4$ ó $x \geq 6 \rightarrow (-\infty, 4] \cup [6, +\infty)$.

43 Averigua qué valores de x cumplen:

a) $|x - 2| = 5$

b) $|x - 4| \leq 7$

c) $|x + 3| \geq 6$

a) 7 y -3

b) $-3 \leq x \leq 11$; $[-3, 11]$

c) $x \leq -9$ y $x \geq 3$; $(-\infty, -9) \cup [3, \infty)$

44 Escribe, mediante intervalos, los valores que puede tener x para que se pueda calcular la raíz en cada caso:

a) $\sqrt{x-4}$

b) $\sqrt{2x+1}$

c) $\sqrt{-x}$

d) $\sqrt{3-2x}$

e) $\sqrt{-x-1}$

f) $\sqrt{1+\frac{x}{2}}$

a) $x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4$; $[4, +\infty)$

b) $2x + 1 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq -1 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{2}$; $[-\frac{1}{2}, +\infty)$

c) $-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$; $(-\infty, 0]$

$$d) 3 - 2x \geq 0 \Rightarrow 3 \geq 2x \Rightarrow x \leq \frac{3}{2}; \left(-\infty, \frac{3}{2}\right]$$

$$e) -x - 1 \geq 0 \Rightarrow -1 \geq x; (-\infty, -1]$$

$$f) 1 + \frac{x}{2} \geq 0 \Rightarrow 2 + x \geq 0 \Rightarrow x \geq -2; [-2, +\infty)$$

45 Halla la distancia entre los siguientes pares de números:

a) 7 y 3 b) 5 y 11 c) -3 y -9 d) -3 y 4

$$a) d(7, 3) = |7 - 3| = 4$$

$$b) d(5, 11) = |11 - 5| = 6$$

$$c) d(-3, -9) = |-9 - (-3)| = 6$$

$$d) d(-3, 4) = |4 - (-3)| = 7$$

46 Expresa como un único intervalo:

$$a) (1, 6] \cup [2, 5)$$

$$b) [-1, 3) \cup (0, 3]$$

$$c) (1, 6] \cap [2, 7)$$

$$d) [-1, 3) \cap (0, 4)$$

$$a) (1, 6] \cup [2, 5) = (1, 6]$$

$$b) [-1, 3) \cup (0, 3] = [-1, 3]$$

$$c) (1, 6] \cap [2, 7) = [2, 6]$$

$$d) [-1, 3) \cap (0, 4) = (0, 3)$$

Página 46

Logaritmos

47 Calcula, utilizando la definición de logaritmo:

$$a) \log_2 64 + \log_2 \frac{1}{4} - \log_3 9 - \log_2 \sqrt{2}$$

$$b) \log_2 \frac{1}{32} + \log_3 \frac{1}{27} - \log_2 1$$

$$a) 6 - 2 - 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$b) -5 - 3 - 0 = -8$$

48 Calcula la base de estos logaritmos:

$$a) \log_x 125 = 3$$

$$b) \log_x \frac{1}{9} = -2$$

$$a) x^3 = 125; x = 5$$

$$b) x^{-2} = \frac{1}{9}; x = 3$$

49 Calcula el valor de x en estas igualdades:

a) $\log 3^x = 2$

b) $\log x^2 = -2$

c) $7^x = 115$

d) $5^{-x} = 3$

a) $x = \frac{2}{\log 3} = 4,19$

b) $2 \log x = -2; x = \frac{1}{10}$

c) $x = \frac{\log 115}{\log 7} = 2,438$

d) $x = -\frac{\log 3}{\log 5} = -0,683$

50 Halla con la calculadora y comprueba el resultado con la potenciación.

a) $\log \sqrt{148}$

b) $\log 2,3 \cdot 10^{11}$

c) $\log 7,2 \cdot 10^{-5}$

d) $\log_3 42,9$

e) $\log_5 1,95$

f) $\log_2 0,034$

a) 1,085

b) $\ln(2,3 \cdot 10^{11}) \approx 26,161 \rightarrow e^{26,161} \approx 2,3 \cdot 10^{11}$

c) $\ln(7,2 \cdot 10^{-5}) \approx -9,539 \rightarrow e^{-9,539} \approx 7,2 \cdot 10^{-5}$

d) 3,42

e) 0,41

f) -4,88

51 Halla el valor de x en estas expresiones aplicando las propiedades de los logaritmos:

a) $\log x = \log 17 + \log 13$

b) $\ln x = \ln 36 - \ln 9$

c) $\ln x = 3 \ln 5$

d) $\log x = \log 12 + \log 25 - 2 \log 6$

e) $\log x = 4 \log 2 - \frac{1}{2} \log 25$

• **Logaritmo de un producto:** $\ln x = \ln(17 \cdot 13)$

a) $\ln x = \ln 17 + \ln 13 \rightarrow x = 17 \cdot 13 = 221 \rightarrow x = 221$

b) $\log x = \log \frac{36}{9} \rightarrow x = \frac{36}{9} = 4$

c) $\ln x = 3 \ln 5 \rightarrow x = 5^3 = 125 \rightarrow x = 125$

d) $\log x = \log \frac{12 \cdot 25}{6^2} \rightarrow x = \frac{25}{3}$

e) $\ln x = 4 \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 25 \rightarrow \ln x = \ln 2^4 - \ln 25^{1/2} \rightarrow$

$\rightarrow \ln x = \ln 16 - \ln 5 \rightarrow \ln x = \ln \frac{16}{5} \rightarrow x = \frac{16}{5}$

- 52** Sabiendo que $\log 3 = 0,477$, calcula el logaritmo decimal de 30; 300; 3 000; 0,3; 0,03; 0,003.

$$\log 30 = \log (3 \cdot 10) = \log 3 + \log 10 = 0,477 + 1 = 1,477$$

$$\log 300 = \log (3 \cdot 10^2) = \log 3 + 2 \log 10 = 2,477$$

$$\log 3\,000 = 0,477 + 3 = 3,477$$

$$\log 0,3 = \log (3 \cdot 10^{-1}) = 0,477 - 1 = -0,523$$

$$\log 0,03 = \log (3 \cdot 10^{-2}) = 0,477 - 2 = -1,523$$

$$\log 0,003 = 0,477 - 3 = -2,523$$

- 53** Sabiendo que $\log k = 14,4$, calcula el valor de las siguientes expresiones:

a) $\log \frac{k}{100}$ b) $\log 0,1 k^2$ c) $\log \sqrt[3]{\frac{1}{k}}$ d) $(\log k)^{1/2}$

a) $\log k - \log 100 = 14,4 - 2 = 12,4$

b) $\log 0,1 + 2 \log k = -1 + 2 \cdot 14,4 = 27,8$

c) $\frac{1}{3} (\log 1 - \log k) = -\frac{1}{3} \cdot 14,4 = -4,8$

d) $(14,4)^{1/2} = \sqrt{14,4} = 3,79$

- 54** Calcula la base de cada caso:

a) $\log_x 1/4 = 2$ b) $\log_x 2 = 1/2$ c) $\log_x 0,04 = -2$ d) $\log_x 4 = -1/2$

• *Aplica la definición de logaritmo y las propiedades de las potencias para despejar x .*

En c), $x^{-2} = 0,04 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{4}{100}$.

a) $x^2 = \frac{1}{4} \rightarrow x = \frac{1}{2}$

b) $x^{1/2} = 2 \rightarrow x = 4$

c) $x^{-2} = 0,04 \rightarrow x = 5$

d) $x^{-1/2} = 4 \rightarrow x = \frac{1}{16}$

- 55** Halla el valor de x que verifica estas igualdades:

a) $3^x = 0,005$

b) $0,8^x = 17$

c) $e^x = 18$

d) $1,5^x = 15$

e) $0,5^x = 0,004$

f) $e^x = 0,1$

a) $x = \frac{\log 0,005}{\log 3} = -4,82$

b) $x = \frac{\log 17}{\log 0,8} = -12,70$

c) $e^x = 18 \rightarrow x = \ln 18 \simeq 2,89 \rightarrow x \simeq 2,89$

d) $x = \frac{\log 15}{\log 1,5} = 6,68$

$$e) x = \frac{\log 0,004}{\log 0,5} = 7,97$$

$$f) e^x = 0,1 \rightarrow x = \ln 0,1 \approx -2,30 \rightarrow x \approx -2,30$$

56 Calcula x para que se cumpla:

a) $x^{2,7} = 19$

b) $\log_7 3x = 0,5$

c) $3^{2+x} = 172$

$$a) \log x^{2,7} = \log 19 \Rightarrow 2,7 \log x = \log 19 \Rightarrow \log x = \frac{\log 19}{2,7} = 0,47$$

$$x = 10^{0,47} = 2,98$$

$$b) 7^{0,5} = 3x \Rightarrow x = \frac{7^{0,5}}{3} = 0,88$$

$$c) \log 3^{2+x} = \log 172 \Rightarrow (2+x) \log 3 = \log 172 \Rightarrow 2+x = \frac{\log 172}{\log 3}$$

$$x = \frac{\log 172}{\log 3} - 2 = 2,685$$

57 Si $\log k = x$, escribe en función de x :

a) $\log k^2$

b) $\log \frac{k}{100}$

c) $\log \sqrt{10k}$

$$a) 2 \log k = 2x$$

$$b) \log k - \log 100 = x - 2$$

$$c) \frac{1}{2} \log 10k = \frac{1}{2} (1 + x)$$

58 Comprueba que $\frac{\log(1/a) + \log \sqrt{a}}{\log a^3} = -\frac{1}{6}$ (siendo $a \neq 1$).

$$\frac{-\log a + 1/2 \log a}{3 \log a} = \frac{-1/2 \log a}{3 \log a} = -\frac{1}{6}$$

Ha de ser $a \neq 1$ para que $\log a \neq 0$ y podamos simplificar.

Problemas aritméticos

59 Una parcela de 45 m de ancho y 70 m de largo cuesta 28 350 €. ¿Cuánto costará otra parcela de terreno de igual calidad de 60 × 50 m?

• **Calcula cuánto cuesta un metro cuadrado.**

Hallamos primero el precio del metro cuadrado:

$$45 \cdot 70 = 3\,150 \text{ m}^2 \text{ tiene la primera parcela}$$

$$28\,350 : 3\,150 = 9 \text{ € cuesta } 1 \text{ m}^2$$

La segunda parcela tiene como superficie: $60 \cdot 50 = 3\,000 \text{ m}^2$

Por tanto, costará: $3\,000 \cdot 9 = 27\,000 \text{ €}$

- 60** Tres informáticos, trabajando 8 horas diarias, hacen un trabajo en 15 días. ¿Cuánto tardarán en hacer ese mismo trabajo 5 informáticos en jornadas de 9 horas?

☛ *¿Cuántas horas lleva hacer todo el trabajo?*

$3 \cdot 8 \cdot 15 = 360$ horas lleva hacer todo el trabajo.

Trabajando $5 \cdot 9 = 45$ horas diarias, se tardará: $360 : 45 = 8$ días.

- 61** Tres empresas invierten 1, 4 y 5 millones de euros, respectivamente, en un negocio que produce, al cabo de un año, 1 800 000 € de beneficio. ¿Cómo se repartirán estos beneficios?

☛ *¿Cuántos millones se han invertido en total? ¿Qué beneficio corresponde a cada millón invertido?*

En total se han invertido $1 + 4 + 5 = 10$ millones de euros.

El beneficio que le corresponde a cada millón invertido será:

$$1\,800\,000 : 10 = 180\,000 \text{ €}$$

Por tanto, se repartiría así:

- Primera empresa $\rightarrow 180\,000 \text{ €}$
- Segunda empresa $\rightarrow 4 \cdot 180\,000 = 720\,000 \text{ €}$
- Tercera empresa $\rightarrow 5 \cdot 180\,000 = 900\,000 \text{ €}$

- 62** Tres socios aportan 4, 6 y 12 millones, respectivamente, para montar un negocio con la idea de mantenerlo abierto las 24 horas del día. Para compensar las diferencias en la inversión, deciden distribuir las horas de trabajo en relación inversa al dinero aportado. ¿Cuántas horas diarias debe atender el negocio cada uno?

- Primer socio \rightarrow aporta 4 millones \rightarrow trabajará x horas
- Segundo socio \rightarrow aporta 6 millones \rightarrow trabajará y horas
- Tercer socio \rightarrow aporta 12 millones \rightarrow trabajará z horas

Como el tercero aporta el triple que el primero, trabajará la tercera parte:

$$z = \frac{x}{3} \Rightarrow x = 3z$$

Como el tercero aporta el doble que el segundo, trabajará la mitad:

$$z = \frac{y}{2} \Rightarrow y = 2z$$

Además: $x + y + z = 24$

$$3z + 2z + z = 24 \Rightarrow 6z = 24 \Rightarrow z = 4, y = 8, x = 12$$

El primero trabajará 12 horas, el segundo 8 horas y el tercero 4 horas.

- 63** Dos poblaciones A y B distan 350 km. A la misma hora sale un autobús de A hacia B a una velocidad de 80 km/h y un turismo de B hacia A a 120 km/h. ¿Cuándo se cruzarán?

☛ Se aproximan a $80 + 120 = 200$ km/h. ¿Cuánto tardarán en recorrer los 350 km a esa velocidad?

Si se aproximan a $80 + 120 = 200$ km/h, en recorrer 350 km tardarán:

$$t = \frac{350}{200} = 1,75 \text{ horas} = 1 \text{ hora y } 45 \text{ minutos}$$

Página 47

- 64** Un automóvil tarda 3 horas en ir de A a B y otro tarda 5 horas en ir de B a A. Calcula el tiempo que tardarán en encontrarse si salen simultáneamente cada uno de su ciudad.

☛ ¿Qué fracción de la distancia AB recorre cada uno en una hora? ¿Y entre los dos?

El primero recorre $\frac{1}{3}$ del camino en 1 hora.

El segundo recorre $\frac{1}{5}$ del camino en 1 hora.

Entre los dos recorren: $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$ del camino en 1 hora.

Tardarán $\frac{15}{8}$ h = 1 h 52' 30" en encontrarse.

CUESTIONES TEÓRICAS

- 65** Explica si estas frases son verdaderas o falsas:

- Todo número entero es racional.
- Hay números irracionales que son enteros.
- Todo número irracional es real.
- Algunos números enteros son naturales.
- Hay números decimales que no pueden ser expresados como una fracción.
- Todos los números decimales son racionales.
- Entre dos números enteros hay siempre otro número entero.
- Entre dos números racionales siempre hay infinitos números racionales.
- Entre dos números racionales hay infinitos números irracionales.
- Los números racionales llenan la recta.

- | | | | | |
|------|------|------|------|------|
| a) V | b) F | c) V | d) V | e) V |
| f) F | g) F | h) V | i) V | j) F |

66 Si $x \in \mathbb{R}$, explica si es verdadera o falsa cada una de estas afirmaciones:

a) x^2 es siempre positivo o nulo.

b) x^3 es siempre positivo o nulo.

c) $\sqrt[3]{x}$ solo existe si $x \geq 0$.

d) x^{-1} es negativo si lo es x .

e) $-x^2$ es siempre negativo.

a) V b) F c) F d) V e) F (puede ser nulo)

67 ¿Es posible que una potencia de exponente negativo sea igual a un número entero? Acláralo con ejemplos.

Sí. Por ejemplo: $\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = 4$

68 Compara el cuadrado de x con el de $x + 1$. ¿Cómo varía el cuadrado de un número cuando a ese número le añadimos una unidad?

$$\left. \begin{array}{l} (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1 \\ (x)^2 = x^2 \end{array} \right\} \text{Varía en } 2x + 1$$

69 ¿Cómo varía el cuadrado de un número x cuando a ese número x lo multiplicamos por 3? ¿Y si lo dividimos entre 2?

$(3x)^2 = 9x^2 \rightarrow$ Se multiplica por 9

$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{4} = \rightarrow$ Se divide entre 4

70 ¿Cuál es el menor número real perteneciente al intervalo $[2, 5)$? ¿Y el mayor? Escribe un intervalo de la recta real que no tenga ni primer elemento ni último.

El menor es 2. No hay mayor.

Cualquier intervalo abierto no tiene ni primer ni último elemento.

71 Si $x \in \mathbb{N}$ y $x > 1$, ordena estos números:

$$\frac{1}{x+1} \quad x \quad \frac{1}{x} \quad -\frac{1}{x} \quad \frac{1}{-x-1}$$

$$-\frac{1}{x} < \frac{-1}{x+1} < \frac{1}{x+1} < \frac{1}{x} < x$$

72 Ordena de menor a mayor los números a , a^2 , $1/a$ y \sqrt{a} en estos dos casos:

1) Si $a > 1$

2) Si $0 < a < 1$

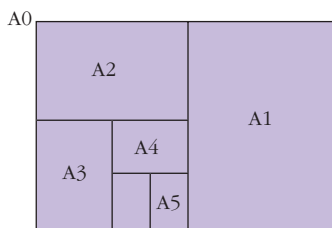
1) $\frac{1}{a} < \sqrt{a} < a < a^2$

2) $a^2 < a < \sqrt{a} < \frac{1}{a}$

PARA PENSAR UN POCO MÁS

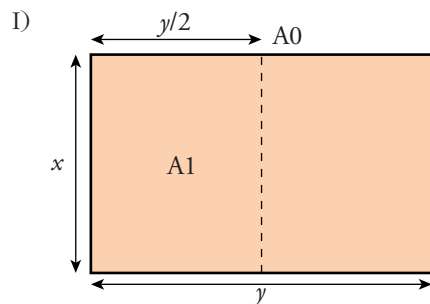
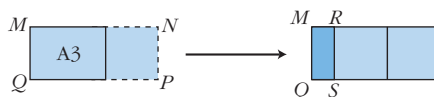
73 Los tamaños estándar de papel se denominan A0, A1, A2, A3, A4, A5... Cada uno de ellos es la mitad del anterior y semejante a él.

I Teniendo en cuenta lo anterior y sabiendo que la superficie de A0 es 1 m^2 , calcula las dimensiones de una hoja A4 (que es la de uso más frecuente) redondeando hasta los milímetros. Comprueba el resultado midiendo una hoja A4 que tengas a mano.



II Demuestra que cualquiera de las hojas anteriores cumple lo siguiente:

Si le añadimos un cuadrado, el rectángulo que se obtiene, $MNPQ$, tiene la peculiaridad de que al suprimirle dos cuadrados da lugar a otro rectángulo, $MRSQ$, semejante a él ($MNPQ$ semejante a $MRSQ$).



La superficie de A0 es 1 m^2 , es decir:

$$x y = 1 \text{ m}^2 \Rightarrow y = \frac{1}{x}$$

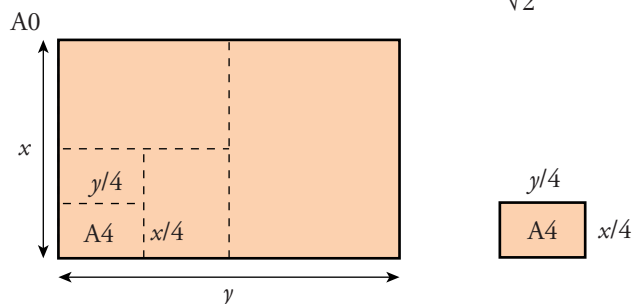
Por la semejanza entre A0 y A1, tenemos que:

$$\frac{y}{x} = \frac{x}{y/2} \Rightarrow \frac{y^2}{2} = x^2 \Rightarrow y^2 = 2x^2$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^2 = 2x^2 \Rightarrow \frac{1}{x^2} = 2x^2 \Rightarrow 1 = 2x^4 \Rightarrow \frac{1}{2} = x^4$$

$$x = \sqrt[4]{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \quad y = \sqrt[4]{2}$$

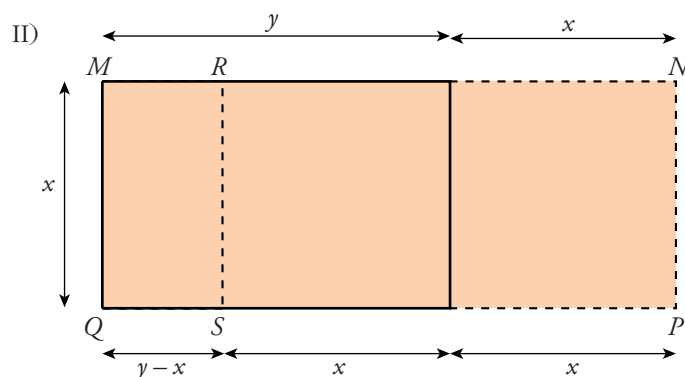
Las dimensiones de A0 son: $largo = \sqrt[4]{2}$ m, $ancho = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ m



Las dimensiones de A4 serán:

$$largo = \frac{\sqrt[4]{2}}{4} = 0,297 \text{ m} = 29,7 \text{ cm} = 297 \text{ mm}$$

$$ancho = \frac{1}{4\sqrt[4]{2}} = 0,210 \text{ m} = 21 \text{ cm} = 210 \text{ mm}$$



La razón entre los lados del rectángulo (A0, A1, ...) es: $\frac{y}{x} = \frac{\sqrt[4]{2}}{1/\sqrt[4]{2}} = (\sqrt[4]{2})^2 = \sqrt{2}$

(es la misma en A0, A1..., pues todos ellos son semejantes).

La razón entre los lados del rectángulo $MNPQ$ es:

$$\frac{y+x}{x} = \frac{y/x + x/x}{x/x} = \frac{\sqrt{2} + 1}{1} = \sqrt{2} + 1$$

Queremos probar que $MRQS$ es semejante a $MNPQ$; para ello bastará ver que:

$$\frac{\overline{MQ}}{\overline{MR}} = \sqrt{2} + 1$$

Veámoslo:

$$\frac{x}{y-x} = \frac{x/x}{y/x - x/x} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \sqrt{2} + 1$$

Como queríamos probar.

- 74** Para numerar las páginas de un libro, un tipógrafo ha empleado 2 993 dígitos. ¿Cuántas páginas tiene el libro? (El 0, el 1, el 2... son *dígitos*. El número 525 se escribe con tres dígitos).

Las 9 primeras páginas \rightarrow 9 dígitos

De la 10 a la 99 $\rightarrow 90 \cdot 2 = 180$ dígitos

De la 100 a la 999 $\rightarrow 900 \cdot 3 = 2\,700$ dígitos

Llevamos: $9 + 180 + 2\,700 = 2\,889$ dígitos

Nos faltan: $2\,993 - 2\,889 = 104$ dígitos, que pertenecen a números de cuatro cifras.

Luego: $104 : 4 = 26$ páginas más.

Así: $999 + 26 = 1\,025$ páginas tiene el libro.