2 ÁLGEBRA DE MATRICES

Página 48

■ **Ayudándote de la tabla...**

De la tabla podemos deducir muchas cosas:

— Al consejero A no le gusta ninguno de sus colegas como presidente.

— B solo tiene un candidato (el C).

— Dos consejeros (C y E) están de acuerdo en los mismos candidatos (B, C y D).

— El consejero F no opta por ninguno de sus compañeros.

— Al candidato E no le prefiere ninguno de los otros consejeros. De hecho, es el único que no se considera idóneo para el cargo.

— Los candidatos B y D han obtenido los mismos resultados.

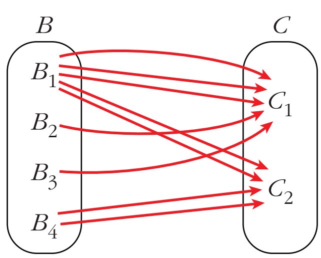
— Solo A y C se consideran idóneos para el puesto de presidente.

— ...

Según los resultados, el candidato C es el más idóneo para presidir la empresa (por lo menos eso piensan sus compañeros del consejo).

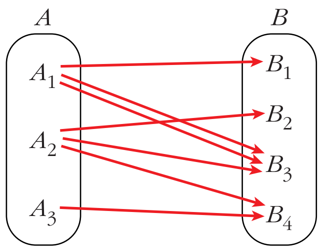
Página 49

■ **Aquí tienes representados, mediante flechas, los vuelos que hay el martes desde el país *B* hasta el país *C*. Representa, mediante una tabla, la información recogida en el diagrama.**



	C_1	C_2
B_1	3	2
B_2	1	0
B_3	1	0
B_4	0	2

■ **Una persona quiere salir el lunes de A, pasar la noche en B y llegar el martes a C.**



En total tenemos 5 posibles formas de ir de A_1 a C_1.

Continúa tú, rellenando razonadamente el resto de la tabla y explicando, en cada caso, cómo llegas a la respuesta.

	C_1	C_2
A_1	**5**	2
A_2	2	2
A_3	0	2

Página 51

1. Escribe las matrices traspuestas de:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 6 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 7 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

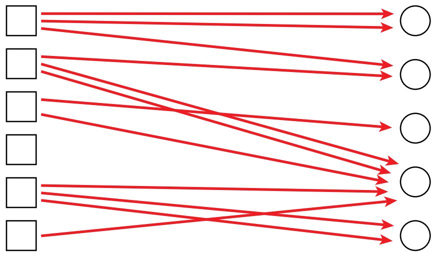
$$A^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad B^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \qquad C^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D^t = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 7 & 2 \end{pmatrix} \qquad E^t = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 7 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad F^t = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Escribe una matriz X tal que $X^t = X$.

Por ejemplo, $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

3. **Escribe una matriz que describa lo siguiente:**



$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Página 52

1. **Sean las matrices:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 8 & -10 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Calcula $E = 2A - 3B + C - 2D$.

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 8 & 2 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ -12 & 3 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 8 & -10 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & 2 & 10 \\ 12 & 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -1 & -18 \\ 16 & -15 & -23 \end{pmatrix}$$

Página 55

2. **Efectúa todos los posibles productos entre las siguientes matrices:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 & 5 \\ 24 & -4 & -1 & -10 \end{pmatrix}; \qquad A \cdot D = \begin{pmatrix} 7 & 18 & -4 \\ 0 & 30 & 5 \end{pmatrix}; \qquad B \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & 14 & 21 \\ -3 & 3 & -2 \\ -2 & 5 & 1 \\ -5 & 26 & 13 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot B = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 39 & 3 \\ -9 & -4 \end{pmatrix}; \qquad D \cdot C = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 2 & 5 \\ 26 & 5 & 2 & 0 \\ 28 & 38 & -1 & 10 \end{pmatrix}; \qquad D \cdot D = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 4 & 31 & 4 \\ -4 & 4 & 17 \end{pmatrix}$$

3. **Intenta conseguir una matriz I_3 de dimensión 3×3 que, multiplicada por cualquier otra matriz $A(3 \times 3)$, la deje igual.**

Es decir: $A \cdot I_3 = I_3 \cdot A = A$

La matriz I_3 se llama matriz unidad de orden 3. Cuando la tengas, sabrás obtener una matriz unidad de cualquier orden.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Página 56

1. **Comprueba las propiedades 2, 3 y 4 anteriores, referentes al producto de números por matrices, tomando: $a = 3$, $b = 6$**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2)\ 9A = \begin{pmatrix} 27 & 45 & -9 \\ 18 & -27 & 0 \end{pmatrix} \\ \quad 3A + 6A = \begin{pmatrix} 9 & 15 & -3 \\ 6 & -9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 & 30 & -6 \\ 12 & -18 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 45 & -9 \\ 18 & -27 & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

$$9A = 3A + 6A$$

$$\left.\begin{array}{l} 3)\ 3(A + B) = 3\begin{pmatrix} 10 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 9 & 0 \\ 18 & 9 & 24 \end{pmatrix} \\ \quad 3A + 3B = \begin{pmatrix} 9 & 15 & -3 \\ 6 & -9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 21 & -6 & 3 \\ 12 & 18 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 9 & 0 \\ 18 & 9 & 24 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

$$3(A + B) = 3A + 3B$$

$$4)\ 1 \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} = A$$

Página 57

2. **Comprueba las propiedades distributivas para las siguientes matrices:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 0 & 9 & -2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 5 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} A \cdot (B + C) = A \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 & 7 \\ 3 & -1 & 14 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 2 & 68 & 19 \\ 15 & -5 & 70 & 15 \\ 21 & 0 & 96 & 25 \end{pmatrix} \\ A \cdot B + A \cdot C = \begin{pmatrix} 11 & 5 & 42 & -1 \\ 15 & 0 & 45 & -10 \\ 17 & 5 & 60 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -3 & 26 & 20 \\ 0 & -5 & 25 & 25 \\ 4 & -5 & 36 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 2 & 68 & 19 \\ 15 & -5 & 70 & 15 \\ 21 & 0 & 96 & 25 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

$$\left.\begin{array}{l} (B+C)\cdot D = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 & 7 \\ 3 & -1 & 14 & 3 \end{pmatrix} \cdot D = \begin{pmatrix} -24 \\ -60 \end{pmatrix} \\ B \cdot D + C \cdot D = \begin{pmatrix} 0 \\ -48 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -24 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ -60 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

$(B + C) \cdot D = B \cdot D + C \cdot D$

Página 60

1. Calcula x, y, z, t para que se cumpla: $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - z & 2y - t \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x - z = 5 \\ 2y - t = 1 \\ z = 0 \\ t = 2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{5}{2} \\ y = \dfrac{3}{2} \\ z = 0 \\ t = 2 \end{array}\right\}$$

Solución: $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 & 3/2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

2. Para las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, **comprueba:**

a) $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$

b) $(A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C)$

c) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

$$\left.\begin{array}{l} \text{a) } A \cdot (B + C) = A \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 41 & 10 \end{pmatrix} \\ A \cdot B + A \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 26 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 15 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 41 & 10 \end{pmatrix} \end{array}\right\} A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{b) } (A + B) \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \cdot C = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 30 & 6 \end{pmatrix} \\ A \cdot C + B \cdot C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 15 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 15 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 30 & 6 \end{pmatrix} \end{array}\right\} (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{c) } A \cdot (B \cdot C) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 15 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 107 & 3 \end{pmatrix} \\ (A \cdot B) \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 26 & 3 \end{pmatrix} \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 107 & 3 \end{pmatrix} \end{array}\right\} A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

3. **Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.**

Encuentra X que cumpla: $3 \cdot X - 2 \cdot A = 5 \cdot B$

$$3X = 5B + 2A = \begin{pmatrix} 0 & 30 \\ 5 & -15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 10 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 30 \\ 15 & -17 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 5 & -17/3 \end{pmatrix}$$

4. **Encuentra dos matrices, A y B, de dimensión 2×2 que cumplan:**

$$2A + B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad A - B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2A + B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ \\ A - B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \text{Sumando: } 3A = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = A - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución: $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

5. **Encuentra dos matrices X e Y que verifiquen:**

$$2X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } X - Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ \\ X - Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 2X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ \\ -2X + 2Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -6 & -12 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

$$\text{Sumando: } -Y = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -10 \end{pmatrix} \rightarrow Y = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$

6. **Averigua cómo ha de ser una matriz X que cumpla:**

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X$$

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x+y \\ z & z+t \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z & y+t \\ z & t \end{pmatrix} \end{array}\right\} \text{ han de ser iguales}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = x + z \\ x + y = y + t \\ z = z \\ z + t = t \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = t \\ \\ z = 0 \end{array}\right\} \quad \textit{Solución: } X = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}, \text{ donde } x \text{ e } y \text{ son números reales cualesquiera.}$$

7. Efectúa las siguientes operaciones con las matrices dadas:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

a) $(A \cdot B) + (A \cdot C)$

b) $(A - B) \cdot C$

c) $A \cdot B \cdot C$

a) $A \cdot B + A \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 18 & 6 \end{pmatrix}$

b) $(A - B) \cdot C = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -15 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

c) $A \cdot B \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 12 \\ 9 & -9 \end{pmatrix}$

8. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ comprueba que $(A - I)^2 = 0$.

$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

9. Halla la inversa de las matrices:

a) $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$

a) $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 7x + 3z & 7y + 3t \\ 2x + z & 2y + t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} 7x + 3z = 1 \\ 2x + z = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 1 \\ z = -2 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{l} 7y + 3t = 0 \\ 2y + t = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = -3 \\ t = 7 \end{array}$$

Por tanto, la inversa es $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3x - 2z & 3y - 2t \\ -8x + 5z & -8y + 5t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{r}3x - 2z = 1\\ -8x + 5z = 0\end{array}\right\} \begin{array}{l}x = -5\\ z = -8\end{array} \qquad \left.\begin{array}{r}3y - 2t = 0\\ -8y + 5t = 1\end{array}\right\} \begin{array}{l}y = -2\\ t = -3\end{array}$$

Por tanto, la inversa es $\begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}$.

Página 61

1. Considera $\vec{u}(7, 4, -2)$, $\vec{v}(5, 0, 6)$, $\vec{w}(4, 6, -3)$, $a = 8$, $b = -5$, elementos de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}$. Comprueba las ocho propiedades que se enumeran arriba.

- *Asociativa*: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

  $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = (12, 4, 4) + \vec{w} = (16, 10, 1)$

  $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} + (9, 6, 3) = (16, 10, 1)$

- *Conmutativa*: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

  $\vec{u} + \vec{v} = (12, 4, 4) = \vec{v} + \vec{u}$

- *Vector nulo*: $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$

  $\vec{v} + \vec{0} = (5, 0, 6) + (0, 0, 0) = (5, 0, 6) = \vec{v}$

- *Vector opuesto*: $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$

  $\vec{v} + (-\vec{v}) = (5, 0, 6) + (-5, 0, -6) = (0, 0, 0)$

- *Asociativa*: $(a \cdot b) \cdot \vec{v} = a \cdot (b \cdot \vec{v})$

  $(8 \cdot (-5)) \cdot (5, 0, 6) = -40 \cdot (5, 0, 6) = (-200, 0, -240)$

  $8 \cdot [-5 \cdot (5, 0, 6)] = 8 \cdot (-25, 0, -30) = (-200, 0, -240)$

- *Distributiva I*: $(a + b) \cdot \vec{v} = a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v}$

  $(a + b) \cdot \vec{v} = 3 \cdot (5, 0, 6) = (15, 0, 18)$

  $a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v} = 8 \cdot (5, 0, 6) - 5 \cdot (5, 0, 6) = (40, 0, 48) - (25, 0, 30) = (15, 0, 18)$

- *Distributiva II*: $a \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = a \cdot \vec{u} + a \cdot \vec{v}$

  $a \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = 8 \cdot (12, 4, 4) = (96, 32, 32)$

  $a \cdot \vec{u} + a \cdot \vec{v} = 8 \cdot (7, 4, -2) + 8 \cdot (5, 0, 6) = (56, 32, -16) + (40, 0, 48) = (96, 32, 32)$

- *Producto por 1*: $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$

  $1 \cdot \vec{v} = 1 \cdot (5, 0, 6) = (5, 0, 6) = \vec{v}$

Página 63

Comprueba si los siguientes conjuntos de *n*-uplas son L.I. o L.D.

2. (3, 0, 1, 0), (2, –1, 5, 0), (0, 0, 1, 1), (4, –2, 0, –5)

Aplicamos la propiedad fundamental:

$$x(3, 0, 1, 0) + y(2, -1, 5, 0) + z(0, 0, 1, 1) + w(4, -2, 0, -5) = (0, 0, 0, 0)$$

Operando, llegamos a:

$$(3x + 2y + 4w, -y - 2w, x + 5y + z, z - 5w) = (0, 0, 0, 0)$$

Esta igualdad da lugar al siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 3x + 2y \qquad + 4w = 0 \\ -y \qquad - 2w = 0 \\ x + 5y + z \qquad = 0 \\ z - 5w = 0 \end{array}\right\}$$

Este sistema tiene como solución única $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $w = 0$. Por tanto, los vectores son linealmente independientes.

3. **(3, 0, 1, 0), (2, –1, 5, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1)**

Aplicamos la propiedad fundamental:

$$x(3, 0, 1, 0) + y(2, -1, 5, 0) + z(0, 0, 1, 1) + w(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 0)$$

Operando, llegamos a:

$$(3x + 2y, -y, x + 5y + z, z + w) = (0, 0, 0, 0)$$

Esta igualdad da lugar al sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 3x + 2y \qquad = 0 \\ -y \qquad = 0 \\ x + 5y + z \qquad = 0 \\ z + w = 0 \end{array}\right\}$$

Este sistema tiene como solución única $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $w = 0$. Por tanto, los vectores son linealmente independientes.

4. **(2, –4, 7), (1, 0, 2), (0, 1, 2)**

Aplicamos la propiedad fundamental:

$$x(2, -4, 7) + y(1, 0, 2) + z(0, 1, 2) = (0, 0, 0)$$

Operando, llegamos a:

$$(2x + y, -4x + z, 7x + 2y + 2z) = (0, 0, 0)$$

Esta igualdad da lugar al sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + \ \ y \qquad = 0 \\ -4x \qquad + \ \ z = 0 \\ 7x + 2y + 2z = 0 \end{array}\right\}$$

Este sistema tiene como solución única $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Por tanto, los vectores son linealmente independientes.

5. **(1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 0, 0)**

Explica por qué si en un conjunto de vectores está el vector cero, entonces son L.D.

- Aplicamos la propiedad fundamental:

$$x(1, 0, 0) + y(1, 1, 0) + z(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$$

Si hacemos $x = 0$, $y = 0$, z puede tomar cualquier valor, por tanto, los vectores son *linealmente dependientes*.

- Si en un conjunto de vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ está el vector cero, podemos conseguir una combinación lineal de ellos:

$$x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \dots + x_{n-1}\vec{u}_{n-1} + x_n\vec{0} = (0, 0, 0, \dots, 0)$$

en la que $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 0$ y $x_n \neq 0$. Como no todos los coeficientes son nulos, los vectores son linealmente dependientes.

Página 65

1. Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{5} \\ \mathbf{1} & \mathbf{10} & \mathbf{-8} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{8} & \mathbf{7} & \mathbf{9} & \mathbf{4} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} 1^a \\ 2^a + 1^a \\ 3^a - 2 \cdot 1^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & -6 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2 \cdot 2^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & -20 & 0 \end{pmatrix} \to ran\,(A) = 3$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 10 & -8 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 1^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & 7 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 2^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to ran\,(B) = 2$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 1^a \\ 4^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 8 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ -2 \cdot 3^a + 2^a \\ 4^a - 4 \cdot 2^a \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -11 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 11 & 5 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a \\ 4^a + 3^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -11 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to ran\,(C) = 3$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} 1^a \\ 2^a + 1^a \\ 3^a - 2 \cdot 1^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 5 \cdot 2^a \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to ran\,(D) = 2$$

Página 70

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Operaciones con matrices

1 **Dadas las matrices** $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$**, calcula:**

a) $-2A + 3B$ **b)** $\frac{1}{2} A \cdot B$ **c)** $B \cdot (-A)$ **d)** $A \cdot A - B \cdot B$

a) $\begin{pmatrix} -23 & 4 \\ -12 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -17/2 & -2 \\ -11/2 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 21 & -6 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 43 & -16 \\ 24 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & -16 \\ 22 & -9 \end{pmatrix}$

2 **Efectúa el producto** $(-3 \quad 2) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$(7 \quad 7) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (7)$

3 **a) ¿Son iguales las matrices** $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ **y** $B = (2 \quad 3)$**?**

b) Halla, si es posible, las matrices AB; BA; $A + B$; $A^t - B$.

a) No, A tiene dimensión 2×1 y B tiene dimensión 1×2. Para que dos matrices sean iguales, deben tener la misma dimensión y coincidir término a término.

b) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$; $B \cdot A = (1 \quad 3)$; $A + B$ no se puede hacer, pues no tienen la misma dimensión.

$A^t - B = (2 \quad 3) - (2 \quad 3) = (0 \quad 0)$

4 **Dadas las matrices:** $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **comprueba que:**

a) $(A + B)^t = A^t + B^t$

b) $(3A)^t = 3A^t$

$$\left.\begin{array}{l} \text{a) } (A+B)^t = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \\ A^t + B^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} (A+B)^t = A^t + B^t$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{b) } (3A)^t = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ 9 & 0 & 3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -6 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \\ \\ 3A^t = 3\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -6 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \end{array}\right\} (3A)^t = 3A^t$$

5 **Calcula $3AA^t - 2I$, siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.**

$$3A\,A^t - 2I = 3\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 10 & 17 \\ 17 & 29 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 30 & 51 \\ 51 & 87 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 51 \\ 51 & 85 \end{pmatrix}$$

6 **Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, comprueba que $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.**

$$\left.\begin{array}{l} A \cdot B = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \;\to\; (A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \\ \\ B^t \cdot A^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} (A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$$

7 **Calcula, en cada caso, la matriz B que verifica la igualdad:**

a) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} + B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

b) $2\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} - 3B = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

b) $2\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} - 3B = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \;\to\; 3B = 2\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 4/3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

Matriz inversa

8 **Comprueba que la matriz inversa de A es A^{-1}:**

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$A \cdot A^{-1} = I$

9 **¿Cuál es la matriz inversa de la matriz unidad?**

La matriz unidad, I.

10 **Halla la matriz inversa de** $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ **y la de** $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

$|A| = 2 \quad \to \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

$|B| = -4 \quad \to \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$

11 **Con las matrices** $\boldsymbol{A}$ **y** $\boldsymbol{B}$ **del ejercicio anterior y sus inversas,** $\boldsymbol{A^{-1}}$ **y** $\boldsymbol{B^{-1}}$**, comprueba que:**

a) $\boldsymbol{(A + B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}}$

b) $\boldsymbol{(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{a) } (A+B)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \\[2ex] A^{-1} + B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3/4 \end{pmatrix} \end{array}\right\} (A+B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{b) } (A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/8 & -3/8 \end{pmatrix} \\[2ex] B^{-1} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/8 & -3/8 \end{pmatrix} \end{array}\right\} (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

Rango de una matriz

12 **Estudia la dependencia o independencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores:**

a) $\boldsymbol{\vec{u}_1 = (1, -1, 3, 7)}$, $\boldsymbol{\vec{u}_2 = (2, 5, 0, 4)}$ **y di cuál es el rango de la matriz cuyas columnas son** $\boldsymbol{\vec{u}_1}$ **y** $\boldsymbol{\vec{u}_2}$.

b) $\boldsymbol{\vec{v}_1 = (1, 0, -2, 3, 1)}$, $\boldsymbol{\vec{v}_2 = (2, -1, 3, 0, 2)}$, $\boldsymbol{\vec{v}_3 = (4, -1, -1, 6, 4)}$ **y di cuál es el rango de la matriz cuyas filas son** $\boldsymbol{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3}$.

$$\text{a) } M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \\ 3 & 0 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a + 1^a \\ 3^a - 3 \cdot 1^a \\ 4^a - 7 \cdot 1^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \\ 0 & -6 \\ 0 & -10 \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 6 \cdot 2^a + 7 \cdot 3^a \\ 10 \cdot 2^a + 7 \cdot 4^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to ran\ (M) = 2$$

Los vectores $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ son linealmente independientes.

$$\text{b) } M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 4 \cdot 1^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 7 & -6 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & -6 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2^a \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 7 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \ ran\ (M) = 2$$

El conjunto de vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ es linealmente dependiente. Hay dos vectores linealmente independientes.

13 **S** **Estudia el rango de estas matrices y di, en cada caso, el número de columnas que son L.I.:**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{5} & \mathbf{11} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{6} & \mathbf{29} \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{6} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-3} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{3} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{7} & \mathbf{5} & \mathbf{5} \end{pmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 11 \\ 1 & -1 & 6 & 29 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 1^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & -2 & 5 & 27 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 2 \cdot 2^a \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 11 & 41 \end{pmatrix} \rightarrow \ ran\ (A) = 3$$

Hay 3 columnas linealmente independientes en A.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 3 \cdot 1^a \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2^a \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \ ran\ (B) = 2$$

Hay 2 columnas linealmente independientes en B.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 3^a \\ 2^a \\ 1^a \\ 4^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & -1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 1^a \\ 4^a - 3 \cdot 1^a \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 2^a \\ 4^a - 2^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \ ran\ (C) = 2$$

Hay dos columnas linealmente independientes en C.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 1^a \\ 4^a - 1^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \ ran\ (D) = 4$$

Las cuatro columnas de D son linealmente independientes.

Ecuaciones con matrices

14 S **Halla las matrices X e Y que verifican el sistema**

$$\mathbf{2X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad X - Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ \\ X - Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \text{ Sumando las dos ecuaciones, queda:}$$

$$3X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; X = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Despejamos Y en la 2ª ecuación:

$$Y = X - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $X = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $Y = \begin{pmatrix} -1/3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

15 S **Calcula X tal que $X - B^2 = A \cdot B$, siendo:**

$$\mathbf{A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$X = A \cdot B + B^2$

$$\left.\begin{array}{l} A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ \\ B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

16 S **Determina los valores de m para los cuales**

$$\mathbf{X = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ verifique } X^2 - \frac{5}{2}X + I = 0.}$$

$$X^2 - \frac{5}{2}X + I = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \frac{5}{2}\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} m^2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \frac{5}{2}\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^2 - (5/2)m + 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tiene que cumplirse que:

$$m^2 - \frac{5}{2}m + 1 = 0 \;\rightarrow\; 2m^2 - 5m + 2 = 0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow \quad m = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} m = 2 \\ m = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Hay dos soluciones: $m_1 = 2$; $m_2 = \dfrac{1}{2}$

17 S **Resuelve:** $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} & \mathbf{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} x-y \\ 3x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2x \\ 3y-2 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{aligned} x - y &= 3 + 2x \\ 3x + 2y &= 3y - 2 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x + y &= -3 \\ 3x - y &= -2 \end{aligned}\right\}$$

Sumando: $4x = -5 \rightarrow x = \dfrac{-5}{4} \rightarrow y = -3 - x = -3 + \dfrac{5}{4} = \dfrac{-7}{4}$

Solución: $x = \dfrac{-5}{4}$; $y = \dfrac{-7}{4}$

Página 71

PARA PRACTICAR

18 S **Dada la matriz** $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{-4} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{-4} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$**, calcula** $\boldsymbol{A^2, A^3, \ldots, A^{128}}$**.**

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I; \quad A^4 = A^3 \cdot A = I \cdot A = A$$

$$A^{128} = A^{42 \cdot 3 + 2} = (A^3)^{42} \cdot A^2 = I^{42} \cdot A^2 = I \cdot A^2 = A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

19 S **Comprueba que** $\boldsymbol{A^2 = 2A - I}$**, siendo:** $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{-4} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{4} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$ **e** $\boldsymbol{I}$ **la matriz unidad de orden 3.**

Utiliza esa igualdad para calcular $\boldsymbol{A^4}$**.**

$$\left.\begin{aligned} A^2 = A \cdot A &= \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} \\ 2A - I &= \begin{pmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} A^2 = 2A - I$$

Calculamos A^4:

$A^4 = (A^2)^2 = (2A - I)^2 = (2A - I)(2A - I) = 4A^2 - 2A - 2A + I^2 =$

$= 4(2A - I) - 4A + I = 8A - 4I - 4A + I = 4A - 3I =$

$$= 4\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -16 & 8 \\ 8 & -4 & 4 \\ -16 & 16 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix}$$

20 S **Determina a y b de forma que la matriz**

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}$ verifique $A^2 = A$.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-a & -2-b \\ 2a+ab & -a+b^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \quad \to \quad \begin{pmatrix} 4-a & -2-b \\ 2a+ab & -a+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{cases} 4 - a = 2 & \to \quad a = 2 \\ -2 - b = -1 & \to \quad b = -1 \\ 2a + ab = a & \to \quad 4 - 2 = 2 \\ -a + b^2 = b & \to \quad -2 + 1 = -1 \end{cases}$$

Por tanto, $a = 2$ y $b = -1$.

21 S **Calcula A^n y B^n siendo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$**

- $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2/7 & 2/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

  $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2/7 & 2/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3/7 & 3/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

  Así, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/7 & n/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Lo probamos por inducción:

  Acabamos de comprobar que para $n = 2$ (primer caso relevante), funciona.

  Suponemos que es cierto para $n - 1$:

  $A^n = A^{n-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & n-1/7 & n-1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n/7 & n/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

  $B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{pmatrix}$

Por tanto, $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$. Lo probamos por inducción:

Igual que en el caso anterior, para $n = 2$ se cumple.

Suponemos que es cierto para $n - 1$:

$$B^n = B^{n-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

22
S **Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, halla una matriz B tal que $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.**

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} AB = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow B = A \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos A^{-1}: $|A| = -3$; $A^{-1} = \dfrac{-1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Por tanto:

$$B = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

23
S **Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, prueba que A^3 es la matriz nula.**

Demuestra después que la matriz $I + A + A^2$ es la matriz inversa de $I - A$.

☛ ***Multiplica $I + A + A^2$ por $I - A$.***

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Veamos que $I + A + A^2$ es la inversa de $I - A$:

$$(I + A + A^2)(I - A) = I - A + A - A^2 + A^2 - A^3 = I - A^3 = I - \mathbf{0} = I.$$

Como $(I + A + A^2) \cdot (I - A) = I$, entonces $I + A + A^2$ es la inversa de $I - A$.

24 **Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ comprueba que $(A + I)^2 = 0$ y expresa A^2 como combinación lineal de A e I.**

$$A + I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$(A + I)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Expresamos A^2 como combinación lineal de A e I:

$$(A+I)^2 = \mathbf{0} \;\rightarrow\; (A+I)(A+I) = A^2 + A + A + I = A^2 + 2A + I = \mathbf{0} \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; A^2 = -2A - I$$

25 **a) Comprueba que la inversa de A es A^{-1}:**

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 & 0 \\ -3/5 & 6/5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Calcula la matriz X que verifica $XA = B$, siendo A la matriz anterior y $B = (1 \;\; -2 \;\; 3)$.

a) $A \cdot A^{-1} = I$

b) $XA = B \;\rightarrow\; X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} \;\rightarrow\; X = B \cdot A^{-1}$

Por tanto:

$$X = (1 \;\; -2 \;\; 3) \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 & 0 \\ -3/5 & 6/5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{5} & \frac{1}{5} & -2 \end{pmatrix}$$

26 **Estudia la dependencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores según los valores del parámetro t:**

a) $\vec{u}_1 = (1, -1, 0, 2)$, $\vec{u}_2 = (2, 0, 1, -2)$, $\vec{u}_3 = (3, 1, 1, t)$

b) $\vec{v}_1 = (2, -2, 0, 0)$, $\vec{v}_2 = (1, 5, 3, 3)$, $\vec{v}_3 = (1, 1, t, 1)$, $\vec{v}_4 = (2, 6, 4, 4)$

a) Debemos estudiar el rango de la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \text{1ª} \\ \text{2ª} - 2 \cdot \text{1ª} \\ \text{3ª} - 3 \cdot \text{1ª} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 4 & 1 & t-6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \text{1ª} \\ \text{2ª} \\ \text{3ª} - 2 \cdot \text{2ª} \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 4 & -1 & t+6 \end{pmatrix} \rightarrow \; ran\,(M) = 3 \text{ para cualquier valor de } t$$

Los tres vectores son linealmente independientes, cualquiera que sea el valor de t.

b) Hallamos el rango de la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & t & 1 \\ 2 & 6 & 4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \text{1ª} : 2 \\ \text{2ª} \\ \text{4ª} : 2 \\ \text{3ª} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & t & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \text{1ª} \\ \text{2ª} - \text{1ª} \\ \text{3ª} - \text{1ª} \\ \text{4ª} - \text{1ª} \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & t & 1 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} 1^a \\ 2^a : 3 \\ 3^a : 2 \\ 4^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & t & 1 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2^a \\ 4^a - 2^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t-1 & 0 \end{pmatrix}$$

- *Si* $t = 1$, $ran\ (M) = 2 \to$ Hay dos vectores linealmente independientes.
- *Si* $t \neq 1$, $ran\ (M) = 3 \to$ Hay tres vectores linealmente independientes.

27 S **Estudia el rango de las siguientes matrices según el valor del parámetro k:**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & k & 2 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & k \\ 4 & 12 & 8 & -4 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & k \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix} \to \begin{matrix} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 2 \cdot 1^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & k+2 \end{pmatrix} \to$$

$\to ran\ (M) = 3$ para cualquier valor de k.

$$N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & k & 2 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} 1^a \\ 2^a + 1^a \\ 2 \cdot 3^a - 1^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1+2k & 0 \end{pmatrix} \to 1 + 2k = 0 \text{ si } k = -\frac{1}{2}$$

- *Si* $k = -\frac{1}{2}$, $ran\ (N) = 2$.
- *Si* $k \neq -\frac{1}{2}$, $ran\ (N) = 3$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & k \\ 4 & 12 & 8 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} 1^a \\ 3^a : 4 \\ 2^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & k \end{pmatrix} \to \begin{matrix} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 2 \cdot 1^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k+2 \end{pmatrix}$$

- *Si* $k = -2 \to ran\ (P) = 1$
- *Si* $k \neq -2 \to ran\ (P) = 2$

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & k \end{pmatrix} \to \begin{matrix} 1^a \\ 2^a + 1^a \\ 3^a + 2 \cdot 1^a \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 12 & 3 & k+4 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 3 \cdot 2^a \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix}$$

- *Si* $k = 2 \to ran\ (Q) = 2$
- *Si* $k \neq 2 \to ran\ (Q) = 3$

28 **Halla el valor de k para que el rango de la matriz A sea 2.**

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 \\ -5 & 3 & -1 \\ 0 & k & 7 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 \\ -5 & 3 & -1 \\ 0 & k & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} 1^a \\ 2^a + 1^a \\ 3^a \end{matrix}} \begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 \\ 0 & -2 & -7 \\ 0 & k & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 2^a \end{matrix}} \begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 \\ 0 & -2 & -7 \\ 0 & k-2 & 0 \end{pmatrix}$$

Para que $ran\,(A) = 2$, ha de ser $k - 2 = 0$; es decir, $k = 2$.

29 **Halla X e Y sabiendo que $5X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix}$ y $3X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$.**

$$\left.\begin{aligned} 5X + 3Y &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} \\ 3X + 2Y &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} -15X - 9Y &= \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 12 & -45 \end{pmatrix} \\ 15X + 10Y &= \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -10 & 45 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \text{Sumando: } Y = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} - 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -6 & 9 \end{pmatrix} \to X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

30 **Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ halla dos números reales m y n tales que $A + mA + nI = \mathbf{0}$.**

$$A + mA + nI = \mathbf{0} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 + 2m + n & 1 + m \\ 2 + 2m & 3 + 3m + n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to \left\{\begin{aligned} 2 + 2m + n &= 0 \to n = 0 \\ 1 + m &= 0 \to m = -1 \\ 2 + 2m &= 0 \to m = -1 \\ 3 + 3m + n &= 0 \to n = 0 \end{aligned}\right.$$

Solución: $m = -1$; $n = 0$

31 **Determina, si es posible, un valor de k para que la matriz $(A - kI)^2$ sea la matriz nula, siendo:**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A - kI = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix}$$

$$(A-kI)^2 = \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^2-1 & 2k-2 & 4k-4 \\ 2k-2 & k^2-1 & 4k-4 \\ 2-2k & 2-2k & k^2-6k+5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; k = 1$$

32 S **Una compañía de muebles fabrica butacas, mecedoras y sillas, y cada una de ellas de tres modelos: E (económico), M (medio) y L (lujo). Cada mes produce 20 modelos E, 15 M y 10 L de butacas; 12 modelos E, 8 M y 5 L de mecedoras, y 18 modelos E, 20 M y 12 L de sillas. Representa esta información en una matriz y calcula la producción de un año.**

Cada mes: $\begin{array}{l} \\ \text{BUTACAS} \\ \text{MECEDORAS} \\ \text{SILLAS} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \;E & \;M & \;L \end{array} \\ \begin{pmatrix} 20 & 15 & 10 \\ 12 & 8 & 5 \\ 18 & 20 & 12 \end{pmatrix} \end{array}$

Cada año: $12 \cdot \begin{pmatrix} 20 & 15 & 10 \\ 12 & 8 & 5 \\ 18 & 20 & 12 \end{pmatrix} = \begin{array}{l} \\ \text{BUTACAS} \\ \text{MECEDORAS} \\ \text{SILLAS} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \;E & \;\;M & \;\;L \end{array} \\ \begin{pmatrix} 240 & 180 & 120 \\ 144 & 96 & 60 \\ 216 & 240 & 144 \end{pmatrix} \end{array}$

Página 72

33 S **En un edificio hay tres tipos de viviendas: L3, L4 y L5. Las viviendas L3 tienen 4 ventanas pequeñas y 3 grandes; las L4 tienen 5 ventanas pequeñas y 4 grandes, y las L5, 6 pequeñas y 5 grandes. Cada ventana pequeña tiene 2 cristales y 4 bisagras, y las grandes, 4 cristales y 6 bisagras.**

a) Escribe una matriz que describa el número y tamaño de ventanas de cada vivienda y otra que exprese el número de cristales y bisagras de cada tipo de ventana.

b) Calcula la matriz que expresa el número de cristales y de bisagras de cada tipo de vivienda.

a) $\begin{array}{l} \\ L3 \\ L4 \\ L5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} P & G \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \end{array}; \quad \begin{array}{l} \\ P \\ G \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} C & B \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$

b) $\begin{array}{l} \\ L3 \\ L4 \\ L5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} P & G \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{l} \\ P \\ G \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} C & B \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{l} \\ L3 \\ L4 \\ L5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} C & B \end{array} \\ \begin{pmatrix} 20 & 34 \\ 26 & 44 \\ 32 & 54 \end{pmatrix} \end{array}$

34 **S** **Un industrial fabrica dos tipos de bombillas: transparentes (T) y opacas (O). De cada tipo se hacen cuatro modelos: M_1, M_2, M_3 y M_4.**

$$\begin{array}{c} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} T & O \end{array} \\ \begin{pmatrix} 300 & 200 \\ 400 & 250 \\ 250 & 180 \\ 500 & 300 \end{pmatrix} \end{array}$$

Esta tabla muestra la producción semanal de bombillas de cada tipo y modelo.

El porcentaje de bombillas defectuosas es el 2% en el modelo M_1, el 5% en el M_2, el 8% en el M_3 y el 10% en el M_4.

Calcula la matriz que expresa el número de bombillas transparentes y opacas, buenas y defectuosas, que se producen.

$$\begin{array}{c} \\ D \\ B \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}02 & 0{,}05 & 0{,}08 & 0{,}1 \\ 0{,}98 & 0{,}95 & 0{,}92 & 0{,}9 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} T & O \end{array} \\ \begin{pmatrix} 300 & 200 \\ 400 & 250 \\ 250 & 180 \\ 500 & 300 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ D \\ B \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} T & O \end{array} \\ \begin{pmatrix} 96 & 60{,}9 \\ 1\,354 & 869{,}1 \end{pmatrix} \end{array} \approx \begin{array}{c} \\ D \\ B \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} T & O \end{array} \\ \begin{pmatrix} 96 & 61 \\ 1\,354 & 869 \end{pmatrix} \end{array}$$

35 **S** **Halla todas las matrices $\boldsymbol{X}$ de la forma $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ tales que $\boldsymbol{X^2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.**

$$X^2 = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & a+b & 1 \\ 0 & b^2 & b+c \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = 1 \\ a + b = 0 \\ b^2 = 1 \\ b + c = 0 \\ c^2 = 1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a = \pm 1 \\ a = -b \\ b = \pm 1 \\ c = -b \\ c = \pm 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = 1 \;\to\; b = -1 \;\to\; c = 1 \\ a = -1 \;\to\; b = 1 \;\to\; c = -1 \end{array}$$

Hay dos soluciones: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

36 **S** **Calcula una matriz $\boldsymbol{X}$ que conmuta con la matriz $\boldsymbol{A}$, esto es, $\boldsymbol{A \cdot X = X \cdot A}$, siendo $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, y calcula $\boldsymbol{A^2 + 2A^{-1} \cdot X}$.**

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\to\; \left\{\begin{array}{l} A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} \\ \\ X \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} \end{array}\right\} \text{han de ser iguales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} a + c = a \\ b + d = a + b \\ d = c + d \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} c = 0 \\ d = a \\ c = 0 \end{array}\right\} \quad X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \text{ con } a, b \in \mathbb{R}$$

$$A^2 + 2A^{-1} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} a & b-a \\ 0 & a \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+2a & 2+2b-2a \\ 0 & 1+2a \end{pmatrix}$$

(Observamos que la matriz que hemos obtenido también es de las que conmutan con A).

37 S **Sean A y B las matrices dadas por:**

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Encuentra las condiciones que deben cumplir los coeficientes a, b, c para que se verifique $A \cdot B = B \cdot A$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+2c & 5b+2c & 0 \\ 2a+5c & 2b+5c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+2b & 2a+5b & 0 \\ 7c & 7c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para que $A \cdot B = B \cdot A$, debe cumplirse que:

$$\left.\begin{array}{l} 5a+2c = 5a+2b \\ 5b+2c = 2a+5b \\ 2a+5c = 7c \\ 2b+5c = 7c \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} c = b \\ c = a \\ 7c = 7c \\ 7c = 7c \end{array}\right\} \; a = b = c$$

38 S **Dada la matriz: $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ prueba que se verifica $A^3 + I = 0$ y utiliza esta igualdad para obtener A^{10}.**

Haz $A^{10} = (A^3)^3 \cdot A$ y ten en cuenta que $A^3 = -I$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}; \; A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \;\to\; A^3 + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos A^{10} (teniendo en cuenta que $A^3 + I = 0 \;\to\; A^3 = -I$):

$$A^{10} = (A^3)^3 \cdot A = (-I)^3 \cdot A = -I \cdot A = -A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

39 **S** **Una matriz cuadrada se llama *ortogonal* cuando su inversa coincide con su traspuesta.**

Calcula x e y para que esta matriz A sea ortogonal: $A = \begin{pmatrix} 3/5 & x & 0 \\ y & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Haz $A \cdot A^t = I$.

Si $A^{-1} = A^t$, ha de ser $A \cdot A^t = I$; entonces:

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 3/5 & x & 0 \\ y & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/5 & y & 0 \\ x & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/25 + x^2 & 3/5y - 3/5x & 0 \\ 3/5y - 3/5x & y^2 + 9/25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{9}{25} + x^2 = 1 \\[2ex] \dfrac{3}{5}y - \dfrac{3}{5}x = 0 \\[2ex] y^2 + \dfrac{9}{25} = 1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x^2 = \dfrac{16}{25} \\[2ex] y = x \\[2ex] y^2 = \dfrac{16}{25} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{4}{5} \\[2ex] y = x \end{array}\right\}$$

Hay dos soluciones: $x_1 = \frac{4}{5}$; $y_1 = \frac{4}{5}$ $\qquad x_2 = -\frac{4}{5}$; $y_2 = -\frac{4}{5}$

40 **S** **Resuelve la ecuación matricial:** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 22 & 14 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1/2 & -2 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 22 & 14 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 22 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1/2 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1/2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}$

CUESTIONES TEÓRICAS

41 **S** **Justifica por qué no es cierta la igualdad: $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$ cuando A y B son dos matrices cualesquiera.**

$(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - AB + BA - B^2$

Para que la igualdad fuera cierta, tendría que ser $AB = BA$; y, en general, no es cierto para dos matrices cualesquiera.

42 **S** **Sea A una matriz de dimensión 2×3:**

a) ¿Existe una matriz B tal que $A \cdot B$ sea una matriz de una sola fila?

b) ¿Y para $B \cdot A$?

Pon un ejemplo para cada caso, siendo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) No; $A \cdot B$ tendrá 2 filas necesariamente. Por ejemplo, tomando $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, tenemos que: $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) Sí; si tomamos una matriz de dimensión 1×2 (ha de tener dos columnas para poder multiplicar $B \cdot A$), el resultado tendrá una sola fila. Por ejemplo:

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = (1 \quad 2)$, entonces $B \cdot A = (5 \quad 2 \quad 0)$

43 **S** **Sean A y B dos matrices cuadradas de igual tamaño. Si A y B son simétricas, ¿lo es también su producto $A \cdot B$?**

Si la respuesta es afirmativa, justifícala, y si es negativa, pon un contraejemplo.

Si A y B son dos matrices cuadradas de igual tamaño, simétricas, su producto, $A \cdot B$, no tiene por qué ser una matriz simétrica. Por ejemplo:

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ $A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ no es simétrica.

Página 73

44 **S** **Definimos la *traza* de una matriz cuadrada A de orden 2 como $tr(A) = a_{11} + a_{22}$. Prueba que si A y B son dos matrices cuadradas de orden 2, entonces $tr(A \cdot B) = tr(B \cdot A)$.**

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$; entonces:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \; tr\,(A \cdot B) = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \; tr\,(B \cdot A) = a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} + a_{12}b_{21} + a_{22}b_{22}$$

Por tanto, $tr\,(A \cdot B) = tr\,(B \cdot A)$.

45 **Sea A una matriz cuadrada de orden 3 tal que $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$ (A es una matriz diagonal). Prueba que el producto de dos matrices diagonales es una matriz diagonal.**

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}$, su producto es:

$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$, que también es una matriz diagonal.

46 **Sean $A = (a_{ij})_{m,\,n}$, $B = (b_{ij})_{n,\,p}$, $C = (c_{ij})_{q,\,r}$. ¿Qué condiciones deben cumplir p, q y r para que se puedan efectuar las siguientes operaciones?**

a) $A \cdot C \cdot B$ **b) $A \cdot (B + C)$**

a) $n = q = r$ b) $n = q;\ p = r$

47
S **Sea A una matriz de dos filas y dos columnas cuyo rango es 2. ¿Puede variar su rango si le añadimos una fila o una columna?**

No, porque el número de filas linealmente independientes coincide con el número de columnas linealmente independientes. Si añadimos una fila, A seguiría teniendo dos columnas; y si añadimos una columna, A seguiría teniendo dos filas. Por tanto, el rango seguiría siendo 2.

48
S **Una matriz de 3 filas y 3 columnas tiene rango 3.**

a) ¿Cómo puede variar el rango si quitamos una columna?

b) Si suprimimos una fila y una columna, ¿podemos asegurar que el rango de la matriz resultante será 2?

a) Tendrá rango dos.

b) No. Podría ser dos o uno. Por ejemplo:

Si en $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ suprimimos la primera fila y la tercera columna,

queda $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, que tiene rango 1 ($A$ tenía rango 3).

49
S **a) Si A es una matriz regular de orden n y existe una matriz B tal que $AB + BA = 0$, probar que $BA^{-1} + A^{-1}B = 0$.**

b) Si $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, halla una matriz $B \neq 0$ tal que $AB + BA = 0$.

a) Multiplicamos por A^{-1} por la izquierda en la igualdad:

$AB + BA = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad A^{-1}AB + A^{-1}BA = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad B + A^{-1}BA = \mathbf{0}$

Ahora multiplicamos la igualdad obtenida por A^{-1} por la derecha:

$BA^{-1} + A^{-1}BAA^{-1} = \mathbf{0} \quad \to \quad BA^{-1} + A^{-1}B = \mathbf{0}$

b) Si $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, entonces:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a - 2c & -3b - 2d \\ 4a + 3c & 4b + 3d \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a + 4b & -2a + 3b \\ -3c + 4d & -2c + 3d \end{pmatrix}$$

Así:

$$AB + BA = \begin{pmatrix} -6a + 4b - 2c & -2a - 2d \\ 4a + 4d & 4b - 2c + 6d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} -6a + 4b - 2c = 0 \\ -2a - 2d = 0 \\ 4a + 4d = 0 \\ 4b - 2c + 6d = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3a - 2b + c = 0 \\ \left.\begin{array}{l} a + d = 0 \\ a + d = 0 \end{array}\right\} d = -a \\ 2b - c + 3d = 0 \;\to\; 3a - 2b + c = 0 \;\to \\ \to\; c = -3a + 2b \end{array}$$

Por tanto: $B = \begin{pmatrix} a & b \\ -3a + 2b & -a \end{pmatrix}$, a y $b \neq 0$

Por ejemplo, con $a = 1$ y $b = 1$, queda $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

50 S **Demuestra que si una matriz verifica $A^2 = \mathbf{0}$ (0 es la matriz nula), entonces A no puede tener inversa.**

Supongamos que se verifica que $A^2 = \mathbf{0}$, pero que A sí tiene inversa, que existe A^{-1}.

Multiplicando la igualdad $A^2 = \mathbf{0}$ por $(A^{-1})^2$, quedaría:

$(A^{-1})^2 \cdot A^2 = \mathbf{0} \quad \to \quad (A^{-1} \cdot A)^2 = 0 \quad \to \quad I = \mathbf{0}$; lo cual es absurdo.

Por tanto, deducimos que no existe A^{-1}.

51 S **¿Es posible añadir una fila a la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 7 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ de forma que la nueva matriz tenga rango 4?**

Razona la respuesta.

Calculemos el rango de la matriz dada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 7 & -3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2 \cdot 1^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 3 \cdot 2^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tiene rango 2; luego, añadiendo una fila, la matriz resultante no podrá tener rango 4 (tendría rango 2 ó 3).

PARA PROFUNDIZAR

52 **Sean A y B dos matrices cuadradas del mismo orden. De la igualdad $A \cdot B = A \cdot C$ no puede deducirse, en general, que $B = C$.**

a) Prueba esta afirmación buscando dos matrices B y C distintas tales que $A \cdot B = A \cdot C$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) ¿Qué condición debe cumplir la matriz A para que de $A \cdot B = A \cdot C$ se pueda deducir que $B = C$?

a) Por ejemplo, si $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = A \cdot C, \text{ pero } B \neq C.$$

b) Debe existir A^{-1}.

53 S **Halla una matriz cuadrada de orden 2, distinta de I y de $-I$, cuya inversa coincida con su traspuesta.**

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Si su inversa, A^{-1}, coincide con su traspuesta, A^t, ha de tenerse que $A \cdot A^t = I$. Es decir:

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} a^2 + b^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \\ c^2 + d^2 = 1 \end{array}\right\} \text{Por ejemplo, obtenemos, entre otras: } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

54 **Estudia el rango de las siguientes matrices según los valores de a:**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & a \\ a & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & a \\ a & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} - 2 \cdot 1^{a} \\ 3^{a} - 1^{a} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & a+2 \\ a-1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- *Si* $a = 1$, $ran\ (M) = 2$
- *Si* $a = -2$, $ran\ (M) = 2$
- *Si* $a \neq 1$ *y* $a \neq -2$, $ran\ (M) = 3$

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a} - 1^{a} \end{array} \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- *Si* $a = 0$, $ran\ (A) = 2$
- *Si* $a \neq 0$, $ran\ (A) = 3$

55 **S** **Se dice que una matriz es *antisimétrica* cuando su traspuesta es igual a su opuesta. Obtén la forma general de una matriz de orden 2 que sea antisimétrica.**

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, entonces $A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ y $-A = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$.

Para que $A^t = -A$, ha de ser:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{array}{l} a = -a \\ c = -b \\ b = -c \\ d = -d \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = 0 \\ c = -b \\ \\ d = 0 \end{array}$$

Por tanto, una matriz *antisimétrica de orden 2* es de la forma: $\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$

PARA PENSAR UN POCO MÁS

56 **Recuerda que una matriz A es *simétrica* si $A^t = A$. Una matriz se llama *antisimétrica* si $-A^t = A$. (Tanto las matrices simétricas como las antisimétricas son, obviamente, cuadradas). Demuestra que en una matriz antisimétrica todos los elementos de la diagonal principal son ceros.**

- Si $A = (a_{ij})_{n \times n}$, los elementos de su diagonal principal son a_{ii}, $i = 1, 2, \ldots, n$.
- La traspuesta es $A^t = (a_{ji})_{n \times n}$; los elementos de su diagonal principal también serán a_{ii} (los mismos que los de A).
- La opuesta de la traspuesta es $-A^t = (a_{ji})_{n \times n}$; los elementos de su diagonal principal serán $-a_{ii}$.
- Para que $-A^t = A$, han de ser $a_{ii} = -a_{ii}$; por tanto, $a_{ii} = 0$, $i = 1, \ldots, n$ (es decir, los elementos de la diagonal principal son ceros).

57 **Decimos que una matriz cuadrada es *mágica* de suma k cuando la suma de los elementos de cada fila, así como los de cada columna y los de las dos diagonales es, en todos los casos, igual a k. ¿Cuánto vale k si una matriz mágica es antisimétrica? Halla todas las matrices mágicas antisimétricas de orden 3.**

- Hemos visto en el ejercicio anterior que, en una matriz antisimétrica, los elementos de la diagonal principal son ceros. Por tanto, si la matriz es antisimétrica, $k = 0$.
- Buscamos las matrices mágicas antisimétricas de orden 3: (sabemos que, en este caso, la suma ha de ser cero).

  Veamos cómo es una matriz antisimétrica de orden 3:

  $$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$$ · A antisimétrica si $A^t = -A$; es decir:

$$\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ -d & -e & -f \\ -g & -h & -i \end{pmatrix} \rightarrow \left\{\begin{array}{lll} a = -a & b = -d & c = -g \\ d = -b & e = -e & f = -h \\ g = -c & h = -f & i = -i \end{array}\right.$$

Luego, una matriz *antisimétrica* de orden 3 es de la forma: $A = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{pmatrix}$

Para que A sea *mágica*, ha de tenerse que: $\left.\begin{array}{r} b + c = 0 \\ -b + f = 0 \\ -c - f = 0 \end{array}\right] \left.\begin{array}{r} -b - c = 0 \\ b - f = 0 \\ c + f = 0 \end{array}\right\}$

es decir: $\begin{cases} c = -b \\ f = b \end{cases}$

Por tanto, las matrices mágicas antisimétricas de orden 3 son de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b & -b \\ -b & 0 & b \\ b & -b & 0 \end{pmatrix}, \text{ con } b \in \mathbb{R}.$$

58 **Obtén todas las matrices mágicas simétricas de orden 3 para $k = 0$.**

Una matriz simétrica de orden 3 es de la forma:

$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ (pues $A = A^t$). Para que sea mágica con $k = 0$, ha de ser:

$$\left.\begin{array}{l} a + b + c = 0 \\ b + d + e = 0 \\ c + e + f = 0 \\ a + d + f = 0 \\ 2c + d = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a \\ 4^a - 1^a \\ 5^a \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a \\ 4^a + 2^a \\ 5^a \end{array} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a \\ 4^a + 3^a \\ 5^a - 2 \cdot 3^a \end{array} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a \\ 4^a : 2 \\ 5^a + 4^a \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \begin{cases} a + b + c = 0 & \to \; a = -b - c = -f \\ b + d + e = 0 & \to \; b = -e = f \\ c + e + f = 0 & \to \; c = 0 \\ d + e + f = 0 & \to \; e = -f \\ 3d = 0 & \to \; d = 0 \end{cases}$$

Por tanto, una *matriz mágica simétrica de orden 3 con* $k = 0$, es de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} -f & f & 0 \\ f & 0 & -f \\ 0 & -f & f \end{pmatrix}, \quad \text{con } f \in \mathbb{R}.$$

59 **Obtén todas las matrices mágicas simétricas de orden 3 para $k = 3$.**

Una matriz *simétrica* de orden 3 es de la forma: $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$

Para que sea mágica con $k = 3$, ha de ser:

$$\left.\begin{array}{l} a + b + c = 3 \\ b + d + e = 3 \\ c + e + f = 3 \\ a + d + f = 3 \\ 2c + d = 3 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^{\underline{a}} \\ 2^{\underline{a}} \\ 3^{\underline{a}} \\ 4^{\underline{a}} - 1^{\underline{a}} \\ 5^{\underline{a}} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^{\underline{a}} \\ 2^{\underline{a}} \\ 3^{\underline{a}} \\ 4^{\underline{a}} + 2^{\underline{a}} \\ 5^{\underline{a}} \end{array} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^{\underline{a}} \\ 2^{\underline{a}} \\ 3^{\underline{a}} \\ 4^{\underline{a}} + 3^{\underline{a}} \\ 5^{\underline{a}} - 2 \cdot 3^{\underline{a}} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & -3 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^{\underline{a}} \\ 2^{\underline{a}} \\ 3^{\underline{a}} \\ 4^{\underline{a}} : 2 \\ 5^{\underline{a}} + 4^{\underline{a}} \end{array} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left\{\begin{array}{lcl} a + b + c = 3 & \to & a = 3 - b - c = 3 - f - 1 = 2 - f \\ b + d + e = 3 & \to & b = 3 - d - e = 3 - 1 - 2 + f = f \\ c + e + f = 3 & \to & c = 3 - e - f = 3 - 2 + f - f = 1 \\ d + e + f = 3 & \to & e = 3 - d - f = 3 - 1 - f = 2 - f \\ 3d = 3 & \to & d = 1 \end{array}\right.$$

Por tanto, una *matriz mágica simétrica de orden 3 con* $k = 3$, es de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} 2-f & f & 1 \\ f & 1 & 2-f \\ 1 & 2-f & f \end{pmatrix}, \quad \text{con } f \in \mathbb{R}$$

Por ejemplo, con $f = 0$, queda: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$