

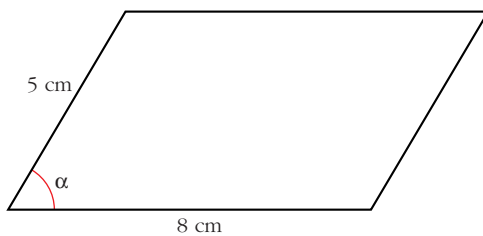
5

VECTORES EN EL ESPACIO

Página 130

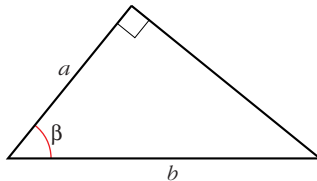
Problema 1

- Halla el área de este paralelogramo en función del ángulo α :



$$\text{Área} = 8 \cdot 5 \operatorname{sen} \alpha = 40 \operatorname{sen} \alpha \text{ cm}^2$$

- Halla el área de este triángulo en función del ángulo β :



$$\text{Área triángulo} = \frac{a b \operatorname{sen} \beta}{2} \text{ cm}^2$$

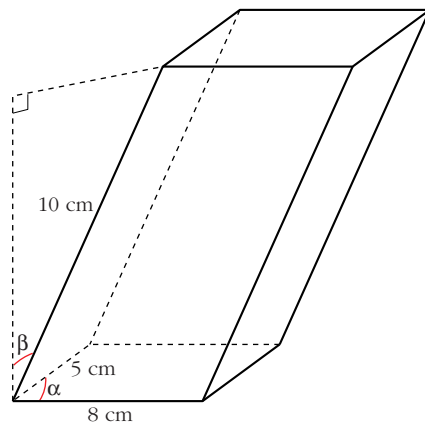
Página 131

Problema 2

- Halla el volumen de este paralelepípedo en función de α y de β .

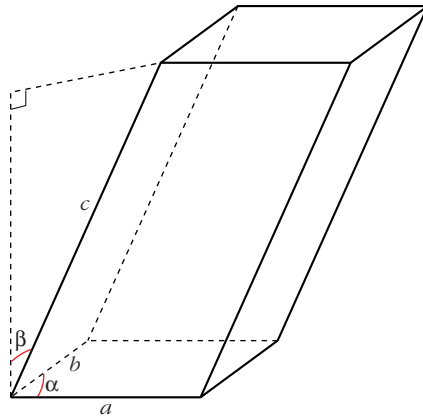
$$\left. \begin{array}{l} \text{Área base} = 40 \operatorname{sen} \alpha \\ \text{Altura} = 10 \cos \beta \end{array} \right\}$$

$$\text{Volumen} = 400 \operatorname{sen} \alpha \cos \beta \text{ cm}^3$$



- ¿Cuál será el volumen de un paralelepípedo de aristas a , b , c , tal que las dos aristas de la base formen entre sí un ángulo α , y las aristas laterales formen un ángulo β con la perpendicular?

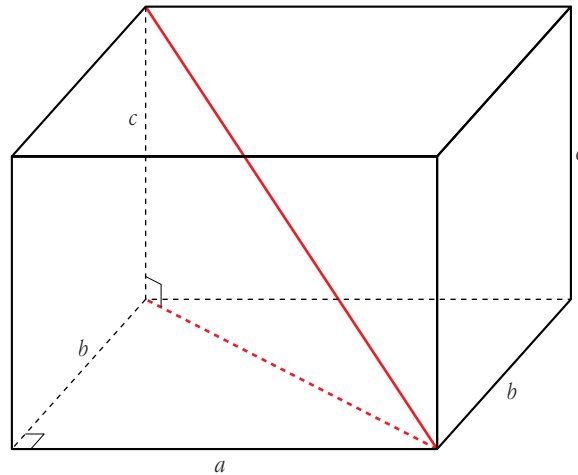
$$\text{Volumen} = a b c \operatorname{sen} \alpha \cos \beta$$



Problema 3

- Halla la diagonal de un ortoedro cuyas dimensiones son: $c = 3$ cm, $b = 4$ cm y $a = 12$ cm.

$$\begin{aligned} \text{Diagonal} &= \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} = \\ &= \sqrt{169} = 13 \text{ cm} \end{aligned}$$



- Escribe la expresión general de la diagonal de un ortoedro de aristas a , b y c .

$$\text{En general: Diagonal} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Página 133

1. La propiedad $a \cdot (b \cdot \vec{v}) = (a \cdot b) \cdot \vec{v}$ relaciona el producto de números por vectores con el producto entre números.

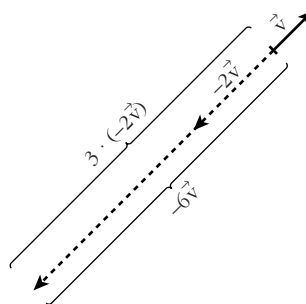
a) De los cuatro productos que aparecen, ¿cuáles son del primer tipo y cuáles del segundo?

b) Interpreta dicha propiedad para $a = 3$, $b = -2$ y \vec{v} un vector cualquiera representado sobre el papel.

a) Producto de números por vectores: $b \cdot \vec{v}$; $(a \cdot b) \cdot \vec{v}$; $a \cdot (b \cdot \vec{v})$

Producto entre números: $a \cdot b$

$$\left. \begin{array}{l} \text{b) } a \cdot (b \cdot \vec{v}) = 3 \cdot (-2\vec{v}) \\ (a \cdot b) \cdot \vec{v} = -6\vec{v} \end{array} \right\} 3 \cdot (-2\vec{v}) = -6\vec{v}$$



2. La propiedad $(a + b) \cdot \vec{v} = a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v}$ relaciona la suma de números con la suma de vectores.

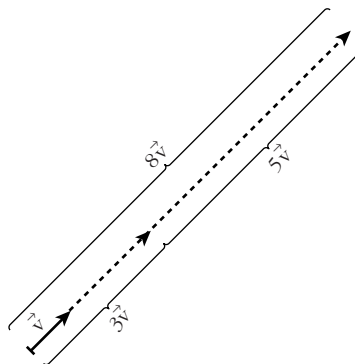
a) De las dos sumas que aparecen, ¿cuál es de cada tipo?

b) Interpreta dicha propiedad para $a = 3$, $b = 5$ y \vec{v} un vector cualquiera representado sobre el papel.

a) Suma de números: $a + b$

Suma de vectores: $a\vec{v} + b\vec{v}$

$$\left. \begin{array}{l} \text{b) } (a + b) \cdot \vec{v} = 8\vec{v} \\ a\vec{v} + b\vec{v} = 3\vec{v} + 5\vec{v} \end{array} \right\} 8\vec{v} = 3\vec{v} + 5\vec{v}$$



Página 135

1. Si $\vec{u}(-3, 5, 1)$, $\vec{v}(7, 4, -2)$, halla las coordenadas:

a) $2\vec{u}$

b) $0\vec{v}$

c) $-\vec{u}$

d) $2\vec{u} + \vec{v}$

e) $\vec{u} - \vec{v}$

f) $5\vec{u} - 3\vec{v}$

a) $2\vec{u} = 2 \cdot (-3, 5, 1) = (-6, 10, 2)$

b) $0 \cdot \vec{v} = (0, 0, 0)$

c) $-\vec{u} = -(-3, 5, 1) = (3, -5, -1)$

d) $2\vec{u} + \vec{v} = 2(-3, 5, 1) + (7, 4, -2) = (1, 14, 0)$

e) $\vec{u} - \vec{v} = (-3, 5, 1) - (7, 4, -2) = (-10, 1, 3)$

f) $5\vec{u} - 3\vec{v} = 5(-3, 5, 1) - 3(7, 4, -2) = (-36, 13, 11)$

2. Sean los vectores $\vec{x}(1, -5, 2)$, $\vec{y}(3, 4, -1)$, $\vec{z}(6, 3, -5)$, $\vec{w}(24, -26, -6)$. Halla a , b , c para que se cumpla: $a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z} = \vec{w}$

$$a(1, -5, 2) + b(3, 4, -1) + c(6, 3, -5) = (24, -26, -6)$$

$$(a + 3b + 6c, -5a + 4b + 3c, 2a - b - 5c) = (24, -26, -6)$$

$$\left. \begin{array}{l} a + 3b + 6c = 24 \\ -5a + 4b + 3c = -26 \\ 2a - b - 5c = -6 \end{array} \right\} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -5 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -92$$

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 24 & 3 & 6 \\ -26 & 4 & 3 \\ -6 & -1 & -5 \end{vmatrix}}{-92} = \frac{-552}{-92} = 6; \quad b = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 24 & 6 \\ -5 & -26 & 3 \\ 2 & -6 & -5 \end{vmatrix}}{-92} = \frac{184}{-92} = -2$$

$$c = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 24 \\ -5 & 4 & -26 \\ 2 & -1 & -6 \end{vmatrix}}{-92} = \frac{-368}{-92} = 4$$

Solución: $a = 6$, $b = -2$, $c = 4$, es decir, $6\vec{x} - 2\vec{y} + 4\vec{z} = \vec{w}$.

Página 139

1. Dados los vectores $\vec{u}(5, -1, 2)$, $\vec{v}(-1, 2, -2)$, calcula:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ b) $|\vec{u}|$ y $|\vec{v}|$ c) (\vec{u}, \vec{v})

d) Proj. de \vec{u} sobre \vec{v} y proy. de \vec{v} sobre \vec{u} .

e) ¿Cuánto ha de valer x para que el vector $(7, 2, x)$ sea perpendicular a \vec{u} ?

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -5 - 2 - 4 = -11$

b) $|\vec{u}| = \sqrt{25 + 1 + 4} = \sqrt{30} \approx 5,48$

$|\vec{v}| = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3$

c) $\cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{-11}{\sqrt{30} \cdot 3} \approx -0,669 \rightarrow (\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) = 132^\circ 1' 26''$

d) Proj. de \vec{u} sobre $\vec{v} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{-11}{3} = -3,67$

Significa que el vector proyección de \vec{u} en la dirección de \vec{v} tiene módulo 3,67 y sentido contrario al de \vec{v} .

Proj. de \vec{v} sobre $\vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|} = \frac{-11}{\sqrt{30}} \approx -2,008$

e) $(5, -1, 2) \cdot (7, 2, x) = 35 - 2 + 2x = 33 + 2x = 0 \rightarrow x = \frac{-33}{2}$

2. Obtén tres vectores perpendiculares a \vec{v} que no sean paralelos entre sí: $\vec{v}(3, 2, 7)$

Un vector, $\vec{u}(x, y, z)$, es perpendicular a $\vec{v}(3, 2, 7)$ si: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3x + 2y + 7z = 0$

Por ejemplo: $(0, -7, 2)$; $(-7, 0, 3)$; $(-2, 3, 0)$

3. Halla un vector que sea perpendicular a los dos vectores dados:

$$\vec{u}(5, -1, 2) \qquad \vec{v}(-1, 2, -2)$$

Queremos hallar las coordenadas de un vector $\vec{w}(x, y, z)$ que sea perpendicular a \vec{u} y a \vec{v} :

$$\left. \begin{aligned} \vec{w} \perp \vec{u} &\Rightarrow (5, -1, 2) \cdot (x, y, z) = 5x - y + 2z = 0 \\ \vec{w} \perp \vec{v} &\Rightarrow (-1, 2, -2) \cdot (x, y, z) = -x + 2y - 2z = 0 \end{aligned} \right\}$$

Este sistema tiene infinitas soluciones proporcionales. Una de ellas es $x = -2, y = 8, z = 9$.

Es decir, el vector buscado puede ser $(-2, 8, 9)$ o cualquier otro paralelo a él.

Página 142

1. Halla el producto vectorial de $\vec{u}(3, 7, -6)$ y $\vec{v}(4, 1, -2)$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = (3, 7, -6) \times (4, 1, -2) = (-8, -18, -25)$$

2. Halla un vector perpendicular a $\vec{u}(3, 7, -6)$ y a $\vec{v}(4, 1, -2)$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = (3, 7, -6) \times (4, 1, -2) = (-8, -18, -25) \text{ o cualquier vector proporcional a él.}$$

3. Halla el área del triángulo determinado por los vectores: $\vec{u}(3, 7, -6)$ y $\vec{v}(4, 1, -2)$

Área del paralelogramo determinado por \vec{u} y \vec{v} :

$$\begin{aligned} |\vec{u} \times \vec{v}| &= |(3, 7, -6) \times (4, 1, -2)| = |(-8, -18, -25)| = \\ &= \sqrt{8^2 + 18^2 + 25^2} = \sqrt{1013} \end{aligned}$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{\sqrt{1013}}{2} \approx 15,91 \text{ u}^2$$

Página 143

1. Halla el volumen del paralelepípedo definido por $\vec{u}(3, -5, 1)$, $\vec{v}(7, 4, 2)$ y $\vec{w}(0, 6, 1)$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 7 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 53 \rightarrow \text{Volumen} = 53 \text{ u}^3$$

2. Halla el valor de x para que los vectores $\vec{u}(3, -5, 1)$, $\vec{v}(7, 4, 2)$ y $\vec{z}(1, 14, x)$ sean coplanarios (es decir, que el volumen del paralelepípedo determinado por ellos sea cero).

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 7 & 4 & 2 \\ 1 & 14 & x \end{vmatrix} = 47x = 0 \rightarrow x = 0$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Dependencia lineal

1 Dados los vectores $\vec{u}(3, 3, 2)$, $\vec{v}(5, -2, 1)$, $\vec{w}(1, -1, 0)$:

a) Halla los vectores $\vec{u} - 2\vec{v} + 3\vec{w}$, $-2\vec{u} + \vec{v} - 4\vec{w}$.

b) Calcula a y b tales que $\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$.

$$a) \vec{u} - 2\vec{v} + 3\vec{w} = (3, 3, 2) - 2(5, -2, 1) + 3(1, -1, 0) = (-4, 4, 0)$$

$$-2\vec{u} + \vec{v} - 4\vec{w} = -2(3, 3, 2) + (5, -2, 1) - 4(1, -1, 0) = (-5, -4, -3)$$

$$b) (3, 3, 2) = a(5, -2, 1) + b(1, -1, 0) = (5a + b, -2a - b, a)$$

$$\left. \begin{array}{l} 3 = 5a + b \\ 3 = -2a - b \\ 2 = a \end{array} \right\} \begin{array}{l} b = -7 \\ b = -7 \\ a = 2 \end{array} \quad \text{Solución: } a = 2, b = -7, \text{ es decir: } \vec{u} = 2\vec{v} - 7\vec{w}.$$

2 Comprueba que no es posible expresar el vector $\vec{x}(3, -1, 0)$ como combinación lineal de $\vec{u}(1, 2, -1)$ y $\vec{v}(2, -3, 5)$. ¿Son linealmente independientes \vec{x} , \vec{u} y \vec{v} ?

$$\vec{x} = a\vec{u} + b\vec{v} \rightarrow (3, -1, 0) = a(1, 2, -1) + b(2, -3, 5)$$

$$\left. \begin{array}{l} 3 = a + 2b \\ -1 = 2a - 3b \\ 0 = -a + 5b \end{array} \right\} A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \text{ Como } |A'| = 28 \neq 0, \text{ el sistema es incompatible.}$$

Luego **no** es posible expresar \vec{x} como combinación lineal de \vec{u} y \vec{v} .

Como $\text{ran}(A') = 3$, los tres vectores son linealmente independientes.

3 ¿Cuáles de los siguientes vectores tienen la misma dirección?

$$\vec{a}(1, -3, 2) \quad \vec{b}(2, 0, 1) \quad \vec{c}(-2, 6, -4) \quad \vec{d}(5, -15, 10) \quad \vec{e}(10, -30, 5)$$

\vec{a} , \vec{c} y \vec{d} , pues sus coordenadas son proporcionales.

4 Comprueba que cualquiera de los vectores $\vec{a}(1, 2, 3)$, $\vec{b}(2, 1, 3)$, $\vec{c}(1, 0, 1)$ puede expresarse como C.L. de los otros dos.

$$\vec{a} = x\vec{b} + y\vec{c} \rightarrow (1, 2, 3) = x(2, 1, 3) + y(1, 0, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} 1 = 2x + y \\ 2 = x \\ 3 = 3x + y \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = -3 \\ x = 2 \\ y = -3 \end{array} \quad \text{Por tanto: } \vec{a} = 2\vec{b} - 3\vec{c}$$

De aquí, también obtenemos que: $\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{c}$; $\vec{c} = \frac{-1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$

5 Halla, en cada caso, todos los valores de m , n y p tales que $m\vec{u} + n\vec{v} + p\vec{w} = \vec{0}$:

a) $\vec{u}(3, 0, 1)$, $\vec{v}(1, -1, 0)$, $\vec{w}(1, 0, 1)$

b) $\vec{u}(1, -1, 0)$, $\vec{v}(1, 1, 1)$, $\vec{w}(2, 0, 1)$

a) $m(3, 0, 1) + n(1, -1, 0) + p(1, 0, 1) = (0, 0, 0)$

$$\left. \begin{array}{r} 3m + n + p = 0 \\ -n = 0 \\ m + p = 0 \end{array} \right\} A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como $|A| = -2 \neq 0$, la única solución del sistema es: $m = 0$, $n = 0$, $p = 0$

(Luego \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} son linealmente independientes).

b) $m(1, -1, 0) + n(1, 1, 1) + p(2, 0, 1) = (0, 0, 0)$

$$\left. \begin{array}{r} m + n + 2p = 0 \\ -m + n = 0 \\ n + p = 0 \end{array} \right\} A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0; \text{ luego } \text{ran}(A) = 2.$$

Resolvemos el sistema:

$$\left. \begin{array}{r} -m + n = 0 \\ n + p = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} m = n \\ p = -n \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} -m + n = 0 \\ n + p = 0 \end{array}} \right\} \text{Soluciones: } m = \lambda, \quad n = \lambda, \quad p = -\lambda$$

6 Estudia la dependencia o independencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores:

a) $\vec{u}(1, 2, 1)$, $\vec{v}(-1, 0, 3)$, $\vec{w}(1, 2, -1)$

b) $\vec{a}(1, 2, 3)$, $\vec{b}(1, 4, 11)$, $\vec{c}(1, 1, -1)$, $\vec{d}(0, 1, 4)$

c) $\vec{u}(1, 1, 0)$, $\vec{v}(1, 0, 1)$, $\vec{w}(5, 2, 3)$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$. Luego \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} son **linealmente independientes**.

b) Al ser cuatro vectores en \mathbb{R}^3 , son **linealmente dependientes**.

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$. Por tanto, \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} son **linealmente dependientes**.

7 Determina k para que los siguientes conjuntos de vectores sean linealmente dependientes:

a) $\vec{u}(k, -3, 2)$, $\vec{v}(2, 3, k)$, $\vec{w}(4, 6, -4)$

b) $\vec{u}(3, 2, 5)$, $\vec{v}(2, 4, 7)$, $\vec{w}(1, -1, k)$

$$a) \begin{vmatrix} k & -3 & 2 \\ 2 & 3 & k \\ 4 & 6 & -4 \end{vmatrix} = -6k^2 - 24k - 24 = -6(k^2 + 4k + 4) = -6(k+2)^2 = 0 \rightarrow k = -2$$

Si $k = -2$, los vectores son linealmente dependientes.

$$b) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \\ 1 & -1 & k \end{vmatrix} = 8k + 5 = 0 \rightarrow k = \frac{-5}{8}$$

Si $k = \frac{-5}{8}$, los vectores son linealmente dependientes.

8 ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son una base?

$$A = \{(1, 2, 1), (1, 0, 1), (2, 2, 2)\}$$

$$B = \{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

$$C = \{(-3, 2, 1), (1, 2, -1), (1, 0, 1)\}$$

$$A = \{(1, 2, 1), (1, 0, 1), (2, 2, 2)\}$$

Como $(2, 2, 2) = (1, 2, 1) + (1, 0, 1)$, los vectores son linealmente dependientes. Por tanto, **no** son una base.

$$B = \{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

Al ser cuatro vectores en \mathbb{R}^3 , son dependientes, luego **no** son una base.

$$C = \{(-3, 2, 1), (1, 2, -1), (1, 0, 1)\}$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \rightarrow \text{Los vectores son linealmente independientes.}$$

Un conjunto de tres vectores de \mathbb{R}^3 , linealmente independientes, son una **base** de \mathbb{R}^3 .

9 ¿Para qué valores de a el conjunto de vectores $S = \{(1, 1, 1), (a, 1, 1), (1, a, 0)\}$ es una base?

Como son tres vectores de \mathbb{R}^3 , formarán base cuando sean linealmente independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \end{vmatrix} = a^2 - a = a(a-1) = 0 \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

Por tanto, S es una base cuando $a \neq 0$ y $a \neq 1$.

Producto escalar

10 En una base ortonormal tenemos $\vec{a}(1, 2, 2)$ y $\vec{b}(-4, 5, -3)$. Calcula:

a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ b) $|\vec{a}|$ y $|\vec{b}|$ c) $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$ d) La proyección de \vec{b} sobre \vec{a} .

$$a) \vec{a} \cdot \vec{b} = (1, 2, 2) \cdot (-4, 5, -3) = -4 + 10 - 6 = 0$$

$$b) |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-4)^2 + 5^2 + (-3)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7,07$$

$$c) \text{ Como } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \rightarrow \widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = 90^\circ$$

$$d) \text{ Proyección de } \vec{b} \text{ sobre } \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} = 0$$

11 Dados los vectores: $\vec{a} = \vec{i} + m\vec{j} + k$ y $\vec{b} = -2\vec{i} + 4\vec{j} + m\vec{k}$, halla m para que los vectores \vec{a} y \vec{b} sean:

a) Paralelos. b) Ortogonales.

$$\vec{a}(1, m, 1) \quad \vec{b}(-2, 4, m)$$

$$a) \frac{-2}{1} = \frac{4}{m} = \frac{m}{1} \rightarrow m = -2$$

$$b) \vec{a} \cdot \vec{b} = (1, m, 1) \cdot (-2, 4, m) = -2 + 4m + m = 5m - 2 = 0 \rightarrow m = \frac{2}{5}$$

12 Halla la proyección del vector $\vec{u}(3, 1, 2)$ sobre el vector $\vec{v}(1, -1, 2)$.

$$\text{Proyección de } \vec{u} \text{ sobre } \vec{v} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{3 - 1 + 4}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} \approx 2,45$$

13 ¿Son $\vec{a}(1, 2, 3)$ y $\vec{b}(2, -2, 1)$ ortogonales? Si no lo son, halla el ángulo que forman.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, 2, 3) \cdot (2, -2, 1) = 2 - 4 + 3 = 1 \neq 0 \rightarrow \text{no son ortogonales.}$$

Si llamamos α al ángulo que forman, entonces:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{14} \sqrt{9}} \approx 0,089 \rightarrow \alpha = 84^\circ 53' 20''$$

14 Calcula m para que el vector $\vec{a}(1, 3, m)$ sea ortogonal al vector $\vec{b}(1, -2, 3)$.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = (1, 3, m) \cdot (1, -2, 3) = 1 - 6 + 3m = 3m - 5 = 0 \rightarrow m = \frac{5}{3}$$

15 Comprueba que el vector $\vec{u}(1/2, 1/2, 0)$ no es unitario y da las coordenadas de un vector unitario de la misma dirección que \vec{u} .

$$|\vec{u}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 1 \rightarrow \vec{u} \text{ no es unitario.}$$

Un vector unitario de la misma dirección que \vec{u} sería:

$$\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right). \text{ También podría ser } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right).$$

Producto vectorial

- 16** Dados $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{v} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, comprueba que los vectores $\vec{u} \times \vec{v}$ y $\vec{v} \times \vec{u}$ son opuestos, y halla su módulo.

$$\vec{u}(2, -1, 1) \quad \vec{v}(-1, 3, 2)$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (-5, -5, 5); \quad \vec{v} \times \vec{u} = (5, 5, -5) = -\vec{u} \times \vec{v}$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2 + 5^2} = \sqrt{3 \cdot 25} = 5\sqrt{3} \approx 8,66$$

- 17** Halla el área del paralelogramo que forman los vectores $\vec{a}(7, -1, 2)$ y $\vec{b}(1, 4, -2)$.

$$\text{Área} = |\vec{a} \times \vec{b}| = |(-6, 16, 29)| = \sqrt{(-6)^2 + 16^2 + 29^2} = \sqrt{1133} \approx 33,66 \text{ u}^2$$

- 18** Halla un vector perpendicular a $\vec{u}(2, 3, 1)$ y a $\vec{v}(-1, 3, 0)$ y que sea unitario.

$$\vec{u} \times \vec{v} = (-3, -1, 9)$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + 9^2} = \sqrt{91}$$

$$\text{Luego el vector que buscamos es: } \left(\frac{-3}{\sqrt{91}}, \frac{-1}{\sqrt{91}}, \frac{9}{\sqrt{91}} \right)$$

- 19** Halla un vector ortogonal a $\vec{u}(1, -1, 0)$ y $\vec{v}(2, 0, 1)$ y cuyo módulo sea $\sqrt{24}$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = (-1, -1, 2) \rightarrow |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{6} = \frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{24}}{2}$$

$$\text{El vector que buscamos será: } 2(-1, -1, 2) = (-2, -2, 4)$$

Producto mixto

- 20** Halla $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ en los siguientes casos:

a) $\vec{u}(1, -3, 2), \vec{v}(1, 0, -1), \vec{w}(2, 3, 0)$

b) $\vec{u}(3, 2, 1), \vec{v}(1, -2, 0), \vec{w}(-4, 1, 1)$

c) $\vec{u}(1, 2, -1), \vec{v}(3, 0, 2), \vec{w}(-1, 4, -4)$

$$\text{a) } [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 15$$

$$b) [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -15 \qquad c) [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

Página 148

- 21** **S** Calcula el volumen del paralelepípedo determinado por $\vec{u}(1, 2, 3)$, $\vec{v}(-2, 1, 0)$ y $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$.

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = (1, 2, 3) \times (-2, 1, 0) = (-3, -6, 5)$$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & -6 & 5 \end{vmatrix} = 70 \rightarrow \text{Volumen} = 70 \text{ u}^3$$

- 22** Calcula el volumen del paralelepípedo determinado por $\vec{a}(3, -1, 1)$, $\vec{b}(1, 7, 2)$ y $\vec{c}(2, 1, -4)$.

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -111 \rightarrow \text{Volumen} = 111 \text{ u}^3$$

- 23** **S** Calcula el valor de m para que $\vec{u}(2, -3, 1)$, $\vec{v}(1, m, 3)$ y $\vec{w}(-4, 5, -1)$ sean coplanarios.

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & m & 3 \\ -4 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 2m + 8 = 0 \rightarrow m = -4$$

PARA RESOLVER

- 24** **S** Prueba que los vectores $(1, a, b)$, $(0, 1, c)$, $(0, 0, 1)$, son linealmente independientes cualesquiera que sean a, b y c .

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \text{ para cualquier valor de } a, b, c. \text{ Por tanto, son linealmente independientes.}$$

- 25** Dados los vectores $\vec{a}(1, 2, -1)$ y $\vec{b}(1, 3, 0)$, comprueba que el vector $\vec{a} \times \vec{b}$ es perpendicular a $\vec{a} + \vec{b}$ y a $\vec{a} - \vec{b}$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = (3, -1, 1)$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (2, 5, -1)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (0, -1, -1)$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = (3, -1, 1) \cdot (2, 5, -1) = 6 - 5 - 1 = 0$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = (3, -1, 1) \cdot (0, -1, -1) = 1 - 1 = 0$$

Por tanto, $\vec{a} \times \vec{b}$ es perpendicular a $\vec{a} + \vec{b}$ y a $\vec{a} - \vec{b}$.

- 26 a)** Comprueba que el paralelogramo determinado por los vectores $\vec{u}(3, -2, 1)$ y $\vec{v}(4, 3, -6)$ es un rectángulo.

b) Halla su área multiplicando la base por la altura y comprueba que obtienes el mismo resultado si hallas $|\vec{u} \times \vec{v}|$.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (3, -2, 1) \cdot (4, 3, -6) = 12 - 6 - 6 = 0$. Luego \vec{u} y \vec{v} son perpendiculares, y el paralelogramo es un rectángulo.

$$\left. \begin{array}{l} \text{b) Base} = |\vec{u}| = \sqrt{14} \\ \text{Altura} = |\vec{v}| = \sqrt{61} \end{array} \right\} \text{Área} = \sqrt{854} \approx 29,22 \text{ u}^2$$

Por otra parte:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |(9, 22, 17)| = \sqrt{854} \approx 29,22 \text{ u}^2$$

- 27 Dado el vector $\vec{v}(-2, 2, -4)$, halla las coordenadas de los siguientes vectores:**

a) Unitarios y de la misma dirección que \vec{v} .

b) Paralelos a \vec{v} y de módulo 6.

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$\text{a) } \left(\frac{-2}{2\sqrt{6}}, \frac{2}{2\sqrt{6}}, \frac{-4}{2\sqrt{6}} \right) = \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}} \right) = \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3} \right) \text{ y } \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3} \right)$$

$$\text{b) } \left(\frac{-6}{\sqrt{6}}, \frac{6}{\sqrt{6}}, \frac{-12}{\sqrt{6}} \right) \text{ y } \left(\frac{6}{\sqrt{6}}, \frac{-6}{\sqrt{6}}, \frac{12}{\sqrt{6}} \right)$$

- 28 Halla un vector ortogonal a $\vec{u}(2, 3, -1)$ y a $\vec{v}(1, 4, 2)$ cuya tercera componente sea 1.**

$$\vec{u} \times \vec{v} = (10, -5, 5) // (2, -1, 1)$$

El vector que buscamos es $(2, -1, 1)$.

- 29** **Dados los vectores $\vec{u}_1(2, 0, 0)$, $\vec{u}_2(0, 1, -3)$, $\vec{u}_3 = a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2$, ¿qué relación deben cumplir a y b para que \vec{u}_3 sea ortogonal al vector $\vec{v}(1, 1, 1)$?**

$$\vec{u}_3 = a(2, 0, 0) + b(0, 1, -3) = (2a, b, -3b)$$

Para que \vec{u}_3 sea perpendicular a \vec{v} ha de ser:

$$\vec{u}_3 \cdot \vec{v} = (2a, b, -3b) \cdot (1, 1, 1) = 2a + b - 3b = 2a - 2b = 0, \text{ es decir, } a = b.$$

- 30** **Calcula las coordenadas de un vector \vec{u} que sea ortogonal a $\vec{v}(1, 2, 3)$ y $\vec{w}(1, -1, 1)$ y tal que $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 19$.**

$$\vec{v} \times \vec{w} = (5, 2, -3)$$

Un vector ortogonal a \vec{v} y a \vec{w} es de la forma $(5k, 2k, -3k)$.

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 5k & 2k & -3k \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = k \cdot 38 = 19 \rightarrow k = \frac{1}{2}$$

Por tanto: $\vec{u} \left(\frac{5}{2}, 1, \frac{-3}{2} \right)$

31 Dados los vectores $\vec{a}(1, -2, 3)$, $\vec{b}(3, 1, 1)$, $\vec{c}(-2, 0, 1)$, comprueba que:

a) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

b) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

a) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (1, -2, 3) \times (1, 1, 2) = (-7, 1, 3)$

$\vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} = (-5, 8, 7) + (-2, -7, -4) = (-7, 1, 3)$

b) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (-5, 8, 7) \times (-2, 0, 1) = (8, -9, 16)$

$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (1, -2, 3) \times (1, -5, 2) = (11, 1, -3)$

32 a) Obtén λ para que los siguientes vectores sean linealmente dependientes:

S $\vec{u}_1 = (3, 2, 5)$, $\vec{u}_2 = (2, 4, 7)$, $\vec{u}_3 = (1, -3, \lambda)$

b) Para $\lambda = 3$, expresa el vector $\vec{v} = (7, 3, 15)$ como combinación lineal de \vec{u}_1 , \vec{u}_2 y \vec{u}_3 .

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \\ 1 & -3 & \lambda \end{vmatrix} = 8\lambda + 27 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{-27}{8}$

b) Para $\lambda = 3$, tenemos que: $\vec{u}_1(3, 2, 5)$ $\vec{u}_2(2, 4, 7)$ $\vec{u}_3(1, -3, 3)$

Expresamos \vec{v} como combinación lineal de \vec{u}_1 , \vec{u}_2 , \vec{u}_3 :

$(7, 3, 15) = a(3, 2, 5) + b(2, 4, 7) + c(1, -3, 3)$

$$\left. \begin{array}{l} 3a + 2b + c = 7 \\ 2a + 4b - 3c = 3 \\ 5a + 7b + 3c = 15 \end{array} \right\} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 5 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 51$$

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -3 \\ 15 & 7 & 3 \end{vmatrix}}{51} = \frac{84}{51} = \frac{28}{17}; \quad b = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 5 & 15 & 3 \end{vmatrix}}{51} = \frac{30}{51} = \frac{10}{17}$$

$$c = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & 3 \\ 5 & 7 & 15 \end{vmatrix}}{51} = \frac{45}{51} = \frac{15}{17}$$

Por tanto: $\vec{v} = \frac{28}{17} \vec{u}_1 + \frac{10}{17} \vec{u}_2 + \frac{15}{17} \vec{u}_3$

33

a) Comprueba que los vectores $\vec{b}_1 = 1/2(\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j})$, $\vec{b}_2 = 1/2(\sqrt{3}\vec{i} - \vec{j})$ y $\vec{b}_3 = \vec{k}$ son los de una base ortonormal de \mathbb{R}^3 , siendo $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ y $\vec{k} = (0, 0, 1)$.

b) Halla las coordenadas de $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ respecto a la base $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$.

$$a) |\vec{b}_1| = \frac{1}{2} \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4} = \frac{2}{2} = 1$$

$$|\vec{b}_2| = \frac{1}{2} \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4} = 1$$

$$|\vec{b}_3| = 1$$

$$\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 = \frac{1}{4} (\sqrt{3} - \sqrt{3}) = 0$$

$$\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_3 = 0$$

$$\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_3 = 0$$

Por tanto $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ es una base ortonormal de \mathbb{R}^3 .

$$b) (1, 1, 1) = x\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right) + y\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}, 0\right) + z(0, 0, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y = 1 \\ z = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x + \sqrt{3}y = 2 \\ \sqrt{3}x - y = 2 \end{array} \left\} \begin{array}{l} x + \sqrt{3}y = 2 \\ 3x - \sqrt{3}y = 2\sqrt{3} \\ \hline 4x = 2 + 2\sqrt{3} \end{array}$$

$$x = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{4} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \quad y = \sqrt{3}x - 2 = \frac{\sqrt{3} + 3}{2} - 2 = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$$

Por tanto:

$$\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \vec{b}_1 + \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} \vec{b}_2 + \vec{b}_3, \text{ es decir:}$$

$$\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} = \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}, 1 \right)$$

34 a) Determina los valores de a para los que resultan linealmente dependientes los vectores $(-2, a, a)$, $(a, -2, a)$ y $(a, a, -2)$.

b) Obtén en esos casos una relación de dependencia entre los vectores.

$$a) \begin{vmatrix} -2 & a & a \\ a & -2 & a \\ a & a & -2 \end{vmatrix} = 2a^3 + 6a^2 - 8 = 2(a-1)(a+2)^2 = 0 \begin{cases} a = 1 \\ a = -2 \end{cases}$$

Para $a = 1$ y para $a = -2$, los tres vectores dados son linealmente dependientes.

b) Para $a = 1$, queda: $(-2, 1, 1)$, $(1, -2, 1)$, $(1, 1, -2)$, y tenemos que:

$$-1 \cdot (-2, 1, 1) - 1 \cdot (1, -2, 1) = (1, 1, -2)$$

Para $a = -2$, queda: $(-2, -2, -2)$, $(-2, -2, -2)$, $(-2, -2, -2)$, y tenemos que:

$$-1 \cdot (-2, -2, -2) + 0 \cdot (-2, -2, -2) = (-2, -2, -2)$$

35 **S** **Dados los vectores $\vec{u}(1, -1, 2)$ y $\vec{v}(3, 1, -1)$, halla el conjunto de vectores que, siendo perpendiculares a \vec{u} , sean coplanarios con \vec{u} y \vec{v} .**

Sea $\vec{w}(x, y, z)$ un vector tal que:

1º) Es perpendicular a \vec{u} , es decir:

$$(x, y, z) \cdot (1, -1, 2) = x - y + 2z = 0$$

2º) Es coplanario con \vec{u} y \vec{v} , es decir:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = -x + 7y + 4z = 0$$

Resolvemos el sistema formado por las dos ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x - y + 2z = 0 \\ -x + 7y + 4z = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x + 2z = y \\ -x + 4z = -7y \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{Sumando: } 6z = -6y \rightarrow z = -y \\ x = y - 2z = y + 2y = 3y \end{array} \right\}$$

Soluciones: $(3\lambda, \lambda, -\lambda)$ $\lambda \neq 0$

36 **S** **Dados los vectores \vec{a}, \vec{b} y \vec{c} tales que $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 1$, $|\vec{c}| = 4$ y $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, calcula la suma de los productos escalares $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.**

Como $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0} \rightarrow |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{c} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 2\vec{a} \cdot \vec{c} =$$

$$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{c}) = 26 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{c}) = 0$$

Por tanto: $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{c} = -13$

37 **S** **Dados los vectores $\vec{u}(a, 1 + a, 2a)$, $\vec{v}(a, 1, a)$ y $\vec{w}(1, a, 1)$, se pide:**

a) Halla los valores de a para los que los vectores \vec{u}, \vec{v} y \vec{w} son linealmente dependientes.

b) Estudia si el vector $\vec{c}(3, 3, 0)$ depende linealmente de \vec{u}, \vec{v} y \vec{w} para el caso $a = 2$.

c) Justifica razonadamente si para $a = 0$ se cumple la igualdad $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$.

$$a) [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} a & 1+a & 2a \\ a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = a^3 - a = a(a^2 - 1) = 0 \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \\ a = -1 \end{cases}$$

b) Para $a = 2$, los vectores \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} son linealmente independientes. Como son tres vectores de \mathbb{R}^3 linealmente independientes, forman una base de \mathbb{R}^3 . Así, cualquier otro vector, y, en particular $\vec{c}(3, 3, 0)$, depende linealmente de ellos.

Obtenemos la combinación lineal:

Para $a = 2$, tenemos que: $\vec{u}(2, 3, 4)$, $\vec{v}(2, 1, 2)$, $\vec{w}(1, 2, 1)$

$$(3, 3, 0) = x(2, 3, 4) + y(2, 1, 2) + z(1, 2, 1)$$

$$\left. \begin{aligned} 2x + 2y + z &= 3 \\ 3x + y + 2z &= 3 \\ 4x + 2y + z &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{6} = \frac{-9}{6} = \frac{-3}{2}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

$$\text{Por tanto: } \vec{c} = \frac{-3}{2}\vec{u} + \frac{3}{2}\vec{v} + 3\vec{w}$$

c) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$ para $a = 0$. Está probado en el apartado a).

38 a) Halla el número de vectores linealmente independientes que hay en el conjunto $S = \{(1, 1, 1), (0, 2, 1), (2, 0, -3), (-1, 1, 2)\}$.

b) Un vector no nulo tiene sus tres componentes iguales. ¿Puede escribirse como combinación lineal de los dos primeros vectores de S ?

c) Determina un vector que, teniendo sus dos primeras componentes iguales a 1, se pueda poner como combinación lineal de los vectores segundo y tercero de S .

a) Tenemos que hallar el rango de la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ Como } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -8 \neq 0, \text{ } \text{ran}(M) = 3.$$

Por tanto, hay tres vectores linealmente independientes en S .

b) Sí. Si tiene sus tres componentes iguales y es no nulo, es de la forma: $\vec{u} = (k, k, k)$ con $k \neq 0$. Entonces, podemos obtenerlo a partir de los dos primeros vectores de S como sigue:

$$\vec{u} = k \cdot (1, 1, 1) + 0 \cdot (0, 2, 1)$$

c) Sea $\vec{v}(1, 1, x)$ el vector que buscamos. Para que se pueda poner como combinación lineal de los vectores segundo y tercero de S , tenemos que:

$$(1, 1, x) = a(0, 2, 1) + b(2, 0, -3)$$

$$\left. \begin{array}{l} 2b = 1 \\ 2a = 1 \\ a - 3b = x \end{array} \right\} \text{ Debe tener solución: } b = \frac{1}{2}, a = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = x \rightarrow x = \frac{-2}{2} = -1 \rightarrow x = -1$$

Por tanto, el vector es $\vec{v}(1, 1, -1)$.

Página 149

39 **Halla un vector \vec{u} de la misma dirección que $\vec{v}(1, -2, 3)$ y tal que forme con $\vec{w}(-2, 4, -1)$ un paralelogramo de área $25 u^2$.**

Si \vec{u} es de la misma dirección que $\vec{v}(1, -2, 3)$, será de la forma $\vec{u}(x, -2x, 3x)$, con $x \neq 0$.

Para que forme con $\vec{w}(-2, 4, -1)$ un paralelogramo de área $25 u^2$, ha de ser:

$$|\vec{u} \times \vec{w}| = |(-10x, -5x, 0)| = \sqrt{100x^2 + 25x^2} = |x| \sqrt{125} = 25;$$

$$\text{es decir: } 125x^2 = 625 \rightarrow x^2 = 5 \rightarrow x = \pm\sqrt{5}$$

Por tanto, hay dos soluciones: $(\sqrt{5}, -2\sqrt{5}, 3\sqrt{5})$ y $(-\sqrt{5}, 2\sqrt{5}, -3\sqrt{5})$

40 **Halla un vector \vec{v} coplanario con $\vec{a}(2, -1, 1)$ y $\vec{b}(1, 0, 3)$ y ortogonal a $\vec{c}(2, 3, 0)$.**

Sea $\vec{v}(x, y, z)$ tal que:

1º) es coplanario con \vec{a} y \vec{b} , es decir:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -3x - 5y + z = 0$$

2º) es ortogonal a \vec{c} , es decir: $(x, y, z) \cdot (2, 3, 0) = 2x + 3y = 0$

Resolvemos el sistema formado por las dos ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} -3x - 5y + z = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -3x + z = 5y \\ 2x = -3y \end{array} \left\{ \begin{array}{l} z = 5y + 3x = 5y - \frac{9}{2}y = \frac{1}{2}y \\ x = -\frac{3}{2}y \end{array} \right.$$

Soluciones: $(-3\lambda, 2\lambda, \lambda)$ ($\lambda \neq 0$)

Todos los vectores de esta forma cumplen las condiciones. Por ejemplo, para $\lambda = 1$, tenemos el vector $(-3, 2, 1)$.

- 41** Sean \vec{a} y \vec{b} tales que $|\vec{a}| = 4$ y $|\vec{b}| = 2$, con $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = 60^\circ$. Calcula $|\vec{a} + \vec{b}|$ y $|\vec{a} - \vec{b}|$.

$$\begin{aligned} |\vec{a} + \vec{b}|^2 &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = \\ &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = \\ &= 16 + 4 + 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ = 16 + 4 + 8 = 28 \rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{28} = 2\sqrt{7} \end{aligned}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = \\ &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = \\ &= 16 + 4 - 8 = 12 \rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

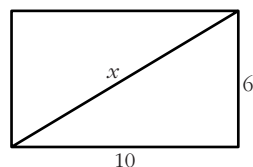
- 42** De dos vectores \vec{u} y \vec{v} sabemos que son ortogonales y que $|\vec{u}| = 6$ y $|\vec{v}| = 10$. Halla $|\vec{u} + \vec{v}|$ y $|\vec{u} - \vec{v}|$.

Si \vec{u} y \vec{v} son ortogonales, entonces $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Así:

$$\begin{aligned} |\vec{u} + \vec{v}|^2 &= (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} = \\ &= |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 0 = 36 + 100 = 136 \rightarrow |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{136} \approx 11,66 \end{aligned}$$

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} = 136 \rightarrow |\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{136} \approx 11,66$$

Observación: Si $\vec{u} \perp \vec{v}$, entonces forman los lados de un rectángulo con base y altura $|\vec{u}|$ y $|\vec{v}|$. En este caso, $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$ son sus diagonales, que tienen el mismo módulo (por tratarse de un rectángulo). Además, para hallar la longitud de la diagonal, podemos aplicar en este caso el teorema de Pitágoras:



$$x^2 = 10^2 + 6^2 \rightarrow x^2 = 136 \rightarrow x = \sqrt{136} \approx 11,66$$

- 43** Calcula el ángulo que forman \vec{a} y \vec{b} sabiendo que $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$ y $|\vec{a} + \vec{b}| = 7$.

$$\begin{aligned} |\vec{a} + \vec{b}|^2 &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = \\ &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = 9 + 25 + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos \widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = \\ &= 34 + 30 \cos \widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = 7^2 = 49 \end{aligned}$$

Por tanto: $\cos(\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}) = \frac{49 - 34}{30} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2} \rightarrow \widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = 60^\circ$

- 44** De los vectores \vec{u} y \vec{v} , sabemos que cumplen $\vec{u} + \vec{v} = \vec{a}$, $2\vec{u} - 3\vec{v} = \vec{b}$, siendo $\vec{a}(2, -1, 0)$ y $\vec{b}(1, 3, -1)$. Halla el ángulo formado por \vec{u} y \vec{v} .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} + \vec{v} = \vec{a} \\ 2\vec{u} - 3\vec{v} = \vec{b} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3\vec{u} + 3\vec{v} = 3\vec{a} \\ 2\vec{u} - 3\vec{v} = \vec{b} \\ \hline 5\vec{u} = 3\vec{a} + \vec{b} \end{array} \quad \begin{array}{l} 2\vec{u} + 2\vec{v} = 2\vec{a} \\ -2\vec{u} + 3\vec{v} = -\vec{b} \\ \hline 5\vec{v} = 2\vec{a} - \vec{b} \end{array}$$

$$\vec{u} = \frac{1}{5}(3\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{5}(7, 0, -1) = \left(\frac{7}{5}, 0, \frac{-1}{5}\right)$$

$$\vec{v} = \frac{1}{5}(2\vec{a} - \vec{b}) = \frac{1}{5}(3, -5, 1) = \left(\frac{3}{5}, -1, \frac{1}{5}\right)$$

Por tanto:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \left(\frac{7}{5}, 0, \frac{-1}{5}\right) \cdot \left(\frac{3}{5}, -1, \frac{1}{5}\right) = \frac{20}{5} = \frac{4}{5}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{\left(\frac{7}{5}\right)^2 + \left(\frac{-1}{5}\right)^2} = \sqrt{2}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + (-1)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{35}{25}} = \sqrt{\frac{35}{5}}$$

$$\cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{4/5}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{35/5}} = \frac{4}{\sqrt{70}} \approx 0,478 \rightarrow \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = 61^\circ 26' 21''$$

CUESTIONES TEÓRICAS

- 45** Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$, ¿podemos asegurar que $\vec{v} = \vec{w}$?

No. Por ejemplo, si $\vec{u}(3, -2, 0)$, $\vec{v}(5, 1, 0)$ y $\vec{w}(7, 4, 0)$, tenemos que:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} \cdot \vec{v} = 15 - 2 = 13 \\ \vec{u} \cdot \vec{w} = 21 - 8 = 13 \end{array} \right\} \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$$

Sin embargo, $\vec{v} \neq \vec{w}$.

- 46** Prueba, utilizando el producto escalar, que si $\vec{a} \perp \vec{b}$ y $\vec{a} \perp \vec{c}$ entonces $\vec{a} \perp (m\vec{b} + n\vec{c})$.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \vec{a} \perp \vec{c} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$$

Para demostrar que $\vec{a} \perp (m\vec{b} + n\vec{c})$, tenemos que probar que su producto escalar es cero:

$$\vec{a} \cdot (m\vec{b} + n\vec{c}) = m\vec{a} \cdot \vec{b} + n\vec{a} \cdot \vec{c} = m \cdot 0 + n \cdot 0 = 0$$

Por tanto, $\vec{a} \perp (m\vec{b} + n\vec{c})$.

- 47** Demuestra que si \vec{a} y \vec{b} son dos vectores no nulos que tienen el mismo módulo, entonces $\vec{a} + \vec{b}$ y $\vec{a} - \vec{b}$ son ortogonales.

Supongamos que $|\vec{a}| = |\vec{b}| \neq 0$, entonces:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 0 \quad (\text{pues } |\vec{a}| = |\vec{b}|)$$

Observación: Si recordamos que $\vec{a} + \vec{b}$ y $\vec{a} - \vec{b}$ son las diagonales del paralelogramo determinado por \vec{a} y \vec{b} , hemos probado que las diagonales de un rombo son perpendiculares.

- 48** Demuestra que si \vec{u}, \vec{v} y \vec{w} son linealmente independientes, también lo son los vectores $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{w}$ y $\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$.

Si \vec{u}, \vec{v} y \vec{w} son linealmente independientes, entonces, si hacemos una combinación lineal de ellos y la igualamos a cero, $a_1\vec{u} + a_2\vec{v} + a_3\vec{w} = \vec{0}$, necesariamente han de ser $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

Veamos que sucede lo mismo con los vectores $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{w}$ y $\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$. Consideremos una combinación lineal de ellos igualada a cero:

$$x(\vec{u} + \vec{v}) + y(\vec{u} - \vec{w}) + z(\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}) = \vec{0}, \text{ entonces:}$$

$$(x + y + z)\vec{u} + (x - z)\vec{v} + (-y + z)\vec{w} = \vec{0}$$

Como \vec{u}, \vec{v} y \vec{w} son linealmente independientes, entonces:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ x - z = 0 \\ -y + z = 0 \end{array} \right\} \text{ Pero } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0,$$

luego la única solución del sistema es la solución trivial $x = y = z = 0$.

Por tanto, los vectores $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{w}$ y $\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$ son linealmente independientes.

- 49** Justifica que cualquier conjunto de vectores que contenga al vector nulo es L.D.

Sea $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n, \vec{0}\}$ un conjunto de $n + 1$ vectores que contiene el vector nulo. Si hacemos una combinación lineal de estos vectores e igualamos a cero:

$$(*) x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \dots + x_n\vec{u}_n + x_{n+1}\vec{0} = \vec{0}$$

tenemos infinitas soluciones para $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$; pues todas las soluciones de la forma $(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) = (0, 0, \dots, 0, \lambda)$ satisfacen la igualdad (*).

Por tanto, son linealmente dependientes.

50 a) ¿Puede haber dos vectores \vec{u} y \vec{v} tales que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$, $|\vec{u}| = 1$, $|\vec{v}| = 2$?

b) Si dos vectores verifican $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}|$, ¿qué puedes decir del ángulo que forman?

$$\begin{aligned} \text{a) } \vec{u} \cdot \vec{v} &= |\vec{u}| |\vec{v}| \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) = 1 \cdot 2 \cdot \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) = 2 \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) = -3 \rightarrow \\ &\rightarrow \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) = -\frac{3}{2} > 1 \text{ Imposible.} \end{aligned}$$

Luego no existen dos vectores que cumplan estas condiciones.

$$\text{b) Si } |\vec{u}| |\vec{v}| = |\vec{u} \cdot \vec{v}| \rightarrow |\vec{u}| |\vec{v}| = \begin{cases} + |\vec{u}| |\vec{v}| \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) \\ - |\vec{u}| |\vec{v}| \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} |\vec{u}| |\vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) \rightarrow \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) = 1 \rightarrow \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = 0^\circ \\ |\vec{u}| |\vec{v}| = -|\vec{u}| |\vec{v}| \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) \rightarrow \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) = -1 \rightarrow \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = 180^\circ \end{cases}$$

Por tanto, \vec{u} y \vec{v} tienen la misma dirección.

51 Justifica por qué el producto mixto de los vectores \vec{a} , \vec{b} y $\vec{a} + \vec{b}$ es igual a 0 cualesquiera que sean \vec{a} y \vec{b} .

Los vectores \vec{a} , \vec{b} y $\vec{a} + \vec{b}$ son coplanarios; luego el volumen del paralelepípedo determinado por ellos (que coincide con su producto mixto en valor absoluto) es cero.

52 Si $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ siendo $\vec{u} \neq \vec{0}$ y $\vec{v} \neq \vec{0}$, ¿cómo son entre sí los vectores \vec{u} y \vec{v} ?

Sabemos que $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \text{sen}(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})})$. Si $|\vec{u} \times \vec{v}| = 0$, $|\vec{u}| \neq 0$ y $|\vec{v}| \neq 0$, entonces ha de ser $\text{sen}(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) = 0$. Es decir, $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ será 0° ó 180° .

Por tanto, los vectores \vec{u} y \vec{v} tendrán la misma dirección.

53 Si $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$, ¿es $\vec{b} = \vec{c}$ necesariamente? Pon ejemplos.

No. Por ejemplo, si consideramos $\vec{a}(1, 2, 3)$, $\vec{b}(2, 4, 6)$ y $\vec{c}(3, 6, 9)$, entonces:

$$\left. \begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \vec{0} \\ \vec{a} \times \vec{c} &= \vec{0} \end{aligned} \right\} \rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}, \text{ pero } \vec{b} \neq \vec{c}.$$

54 Sean \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} tres vectores linealmente independientes. Indica razonadamente cuál o cuáles de los siguientes productos mixtos valen 0:

$$[\vec{a} + \vec{c}, \vec{a} - \vec{c}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}], [\vec{a} + \vec{c}, \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}], [\vec{a} - \vec{c}, \vec{b} - \vec{c}, \vec{c} - \vec{a}]$$

Si \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} son tres vectores linealmente independientes de \mathbb{R}^3 , forman una base. Así, las coordenadas respecto a esta base de los vectores $\vec{a} + \vec{c}$, $\vec{a} - \vec{c}$ y $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ son: (1, 0, 1), (1, 0, -1) y (1, 1, 1), respectivamente.

$$\text{Como } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \text{Son linealmente independientes} \rightarrow$$

$$\rightarrow [\vec{a} + \vec{c}, \vec{a} - \vec{c}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}] \neq 0$$

Análogamente:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow [\vec{a} + \vec{c}, \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}] \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow [\vec{a} - \vec{c}, \vec{b} - \vec{c}, \vec{c} - \vec{a}] = 0$$

PARA PENSAR UN POCO MÁS

55 Las tres alturas, AH_A , BH_B , CH_C de un triángulo ABC se cortan en un punto.

Hay una bonita forma de demostrarlo por geometría elemental.

El triángulo $A'B'C'$ está formado con los lados paralelos a los de ABC . Los vértices de este son los puntos medios de aquel. Por tanto, AH_A , BH_B y CH_C son las mediatrices de los lados de $A'B'C'$.

Organiza y completa el razonamiento anterior para concluir que AH_A , BH_B , CH_C se cortan en un punto.

Sea P el punto de corte de AH_A y BH_B . Entonces:

- 1) Como AH_A es la mediatriz del lado $B'C'$, P está a igual distancia de B' que de C' .
- 2) Como BH_B es la mediatriz del lado $A'C'$, entonces P está a igual distancia de A' que de C' .

Por tanto, uniendo 1) y 2), tenemos que P está a igual distancia de A' que de B' ; es decir, P también pertenece a la mediatriz del lado $A'B'$, esto es, a CH_C .

Luego hemos probado que las tres se cortan en el mismo punto.

56 La propiedad anterior puede demostrarse, también, mediante vectores. Llamamos H al punto en que se cortan AH_A y BH_B .

a) Justifica que
$$\begin{cases} \vec{HA} \cdot (\vec{HC} - \vec{HB}) = 0 \\ \vec{HB} \cdot (\vec{HC} - \vec{HA}) = 0 \end{cases}$$

b) De las igualdades anteriores se llega a: $\vec{HC} \cdot (\vec{HB} - \vec{HA}) = 0$ y de aquí se concluye que $HC \perp AB$ y, por tanto, que las tres alturas se cortan en H . (Justifica las afirmaciones anteriores).

a) $\vec{HC} - \vec{HB} = \vec{BC}$; y, como AH_A es la altura correspondiente al lado BC , entonces:

$$\vec{BC} \perp \vec{AH}_A \rightarrow \vec{BC} \perp \vec{HA} \rightarrow \vec{HA} \cdot \vec{BC} = 0 \rightarrow \vec{HA} \cdot (\vec{HC} - \vec{HB}) = 0$$

Análogamente, como $\vec{HC} - \vec{HA} = \vec{AC}$, tenemos que: $\vec{HB} \cdot (\vec{HC} - \vec{HA}) = 0$

$$\begin{aligned} \text{b) } \vec{HC} \cdot (\vec{HB} - \vec{HA}) &= \vec{HC} \cdot \vec{HB} - \vec{HC} \cdot \vec{HA} = \vec{HB} \cdot \vec{HC} - \vec{HA} \cdot \vec{HC} \stackrel{(1)}{=} \\ &= \vec{HB} \cdot \vec{HC} - \vec{HA} \cdot \vec{HB} = \vec{HB} \cdot (\vec{HC} - \vec{HA}) \stackrel{(2)}{=} 0 \end{aligned}$$

$$(1) \vec{HA} \cdot \vec{HC} - \vec{HA} \cdot \vec{HB} = 0 \rightarrow \vec{HA} \cdot \vec{HC} = \vec{HA} \cdot \vec{HB}$$

$$(2) \vec{HB} \cdot (\vec{HC} - \vec{HA}) = 0$$

Por tanto, si $\vec{HC} \cdot (\vec{HB} - \vec{HA}) = 0$, como $\vec{HB} - \vec{HA} = \vec{AB}$, entonces $\vec{HC} \perp \vec{AB}$; luego H también pertenece a la altura correspondiente al vértice C . Así, las tres alturas se cortan en el mismo punto, H .