

7

PROBLEMAS MÉTRICOS

Página 178

Diagonal de un ortoedro

I) $\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$

II) $\sqrt{4^2 + 12^2 + 3^2} = \sqrt{169} = 13$

III) $\sqrt{7^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{90} \approx 9,49$

Distancia entre dos puntos

$$\overrightarrow{PQ} = \sqrt{(5-1)^2 + (5-3)^2 + (7-6)^2} = \sqrt{4^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{21} \approx 4,58$$

Página 179

Distancia de un punto a una recta

- Siguiendo el proceso anterior, halla la distancia del punto $P(8, 6, 12)$ a la recta r :

$$r: \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 - \lambda \\ z = 7 + 2\lambda \end{cases}$$

Describe el proceso que seguirías para hallar la distancia de un punto P a un plano π , de modo que, finalmente, se reduzca al cálculo de la distancia entre dos puntos.

- Ecuación del plano π que contiene a P y es perpendicular a r :

$$0 \cdot (x - 8) - 1 \cdot (y - 6) + 2 \cdot (z - 12) = 0; \text{ es decir, } \pi: -y + 2z - 18 = 0$$

- Punto, Q , de corte de r y π :

$$-(1 - \lambda) + 2(7 + 2\lambda) - 18 = 0$$

$$-1 + \lambda + 14 + 4\lambda - 18 = 0$$

$$5\lambda - 5 = 0 \rightarrow \lambda = 1$$

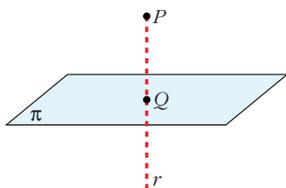
El punto es $Q(2, 0, 9)$.

- Calculamos la distancia:

$$\text{dist}(P, r) = \text{dist}(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |(-6, -6, -3)| = \sqrt{36 + 36 + 9} = \sqrt{81} = 9$$

Distancia de un punto a un plano

- **Halla, paso a paso, la distancia del punto $P(4, 35, 70)$ al plano $\pi: 5y + 12z - 1 = 0$**



- Hallamos la ecuación de la recta, r , que pasa por P y es perpendicular a π .
- Obtenemos el punto, Q , de intersección de r y π .
- La distancia de P a π es igual a la distancia entre P y Q .

Para el punto y el plano dados:

- Recta, r , que pasa por P y es perpendicular a π :

$$r: \begin{cases} x = 4 \\ y = 35 + 5\lambda \\ z = 70 + 12\lambda \end{cases}$$

- Punto, Q , de intersección de r y π :

$$5(35 + 5\lambda) + 12(70 + 12\lambda) - 1 = 0$$

$$175 + 25\lambda + 840 + 144\lambda - 1 = 0$$

$$169\lambda + 1014 = 0 \rightarrow \lambda = -6$$

El punto es $Q(4, 5, -2)$.

- Calculamos la distancia:

$$\text{dist}(P, \pi) = \text{dist}(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |(0, -30, -72)| = \sqrt{900 + 5184} = \sqrt{6084} = 78$$

Página 180

- 1. Halla las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por $(1, 0, 7)$ y es perpendicular al plano $5x - 3z + 4 = 0$.**

El vector normal al plano, $\vec{n}(5, 0, -3)$, es un vector dirección de la recta r que buscamos. Por tanto las ecuaciones paramétricas son:

$$r: \begin{cases} x = 1 + 5\lambda \\ y = 0 \\ z = 7 - 3\lambda \end{cases}$$

- 2. Halla la ecuación implícita del plano que pasa por $(1, -3, 5)$ y es perpendicular a la recta:**

$$\frac{x-2}{5} = \frac{y+7}{-6} = \frac{z}{1}$$

Si el plano que buscamos, π , es perpendicular a la recta dada, un vector normal al plano es el vector dirección de la recta: $(5, -6, 1)$. Por tanto, la ecuación de π es:

$$5(x - 1) - 6(y + 3) + 1(z - 5) = 0 \rightarrow 5x - 6y + z - 28 = 0$$

3. Halla la ecuación del plano paralelo a $5x - y + 4 = 0$ que pasa por $(1, 0, -3)$.

Si son paralelos, el vector normal es el mismo, $(5, -1, 0)$. Por tanto, la ecuación del plano que buscamos es: $5(x - 1) - y + 0(z + 3) = 0 \rightarrow 5x - y - 5 = 0$

4. Halla la ecuación del plano perpendicular a la recta r y que pasa por $(5, -7, -2)$.

$$r: \begin{cases} x = 3 + 5\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 4 - 6\lambda \end{cases}$$

Si el plano que buscamos, π , es perpendicular a r ; un vector normal al plano es el vector dirección de la recta: $(5, 2, -6)$

Por tanto, la ecuación de π es:

$$5(x - 5) + 2(y + 7) - 6(z + 2) = 0 \rightarrow 5x + 2y - 6z - 23 = 0$$

Página 181

5. Halla la ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a s :

$$r: \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = -1 \\ z = 8 + 2\lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 4 + 3\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 5 + 4\lambda \end{cases}$$

El plano pasa por $(5, -1, 8)$ y es paralelo a $(1, 0, 2)$ y a $(3, -1, 4)$. Un vector normal al plano es:

$$(1, 0, 2) \times (3, -1, 4) = (2, 2, -1)$$

La ecuación del plano es: $2(x - 5) + 2(y + 1) - 1(z - 8) = 0$; es decir: $2x + 2y - z = 0$

6. Halla las ecuaciones paramétricas de la recta paralela a r que pasa por $P(0, -1, -3)$:

$$r: \begin{cases} 3x - 5y + 7z - 4 = 0 \\ x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

Un vector dirección de la recta es: $(3, -5, 7) \times (1, -2, 1) = (9, 4, -1)$

Las ecuaciones paramétricas son:
$$\begin{cases} x = 9\lambda \\ y = -1 + 4\lambda \\ z = -3 - \lambda \end{cases}$$

Página 183

1. Calcula el ángulo que forma la recta: $\frac{x-3}{7} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{3}$ con el plano $x + 3y - z + 1 = 0$.

Llamamos $90^\circ - \alpha$ al ángulo formado por las direcciones de \vec{d} y \vec{n} sin tener en cuenta sus sentidos.

$$\vec{d}(7, -1, 3) // r \quad \vec{n}(1, 3, -1) \perp \pi$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|7 - 3 - 3|}{\sqrt{59} \cdot \sqrt{11}} = \frac{1}{\sqrt{649}} \approx 0,039$$

$$90^\circ - \alpha = 87^\circ 45' 1'' \rightarrow \alpha = 2^\circ 14' 59''$$

2. Determina la ecuación de la recta r que pasa por el punto A y es perpendicular al plano π :

$$A(3, 0, -1)$$

$$\pi: 2x - 3y - z + 1 = 0$$

Un vector dirección de la recta es el vector normal al plano: $(2, -3, -1)$.

Las ecuaciones paramétricas de r son:

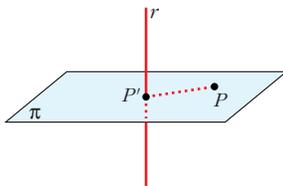
$$\begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -3\lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$$

Página 185

1. Halla razonadamente la distancia de $P(5, 6, 6)$ a la recta $r: (5\lambda, 2 - \lambda, \lambda)$.

Hazlo por cada uno de los tres métodos aprendidos.

- Solución, obteniendo previamente el punto P' :



- Plano, π , que pasa por P y es perpendicular a r :

$$5(x - 5) - 1(y - 6) + 1(z - 6) = 0$$

es decir: $\pi: 5x - y + z - 25 = 0$

- Intersección, P' , de π y r :

$$5(5\lambda) - (2 - \lambda) + \lambda - 25 = 0$$

$$25\lambda - 2 + \lambda + \lambda - 25 = 0$$

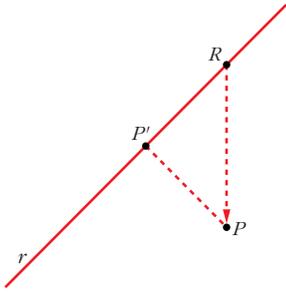
$$27\lambda - 27 = 0 \rightarrow \lambda = 1$$

El punto es $P'(5, 1, 1)$.

- Distancia entre P y r :

$$\text{dist}(P, r) = \text{dist}(P, P') = |\overrightarrow{PP'}| = |(0, -5, -5)| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7,07$$

- Segundo método:



$R(5\lambda, 2 - \lambda, \lambda)$ es un punto genérico de la recta r .

El vector $\overrightarrow{RP}(5 - 5\lambda, 4 + \lambda, 6 - \lambda)$ es variable.

El vector que nos interesa es perpendicular a la recta. Por tanto, cumple:

$$(5, -1, 1) \cdot \overrightarrow{RP} = 0; \text{ es decir:}$$

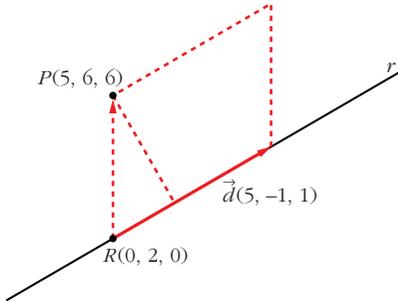
$$5(5 - 5\lambda) - 1(4 + \lambda) + 1(6 - \lambda) = 0$$

$$25 - 25\lambda - 4 - \lambda + 6 - \lambda = 0$$

$$-27\lambda + 27 = 0 \rightarrow \lambda = 1$$

El resto, es igual que con el método anterior.

- Solución directa a partir del producto vectorial:



$$\text{dist}(P, r) = \frac{\text{Área}}{\text{Base}} = \frac{|\overrightarrow{RP} \times \vec{d}|}{|\vec{d}|}$$

$$\overrightarrow{RP} \times \vec{d} = (5, 4, 6) \times (5, -1, 1) = (10, 25, -25)$$

$$|\overrightarrow{RP} \times \vec{d}| = \sqrt{100 + 625 + 625} = \sqrt{1350}$$

$$|\vec{d}| = \sqrt{25 + 1 + 1} = \sqrt{27}$$

$$\text{dist}(P, r) = \frac{\sqrt{1350}}{\sqrt{27}} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7,07$$

Página 186

2. Halla la distancia del punto $P(8, 5, -6)$ al plano $\pi: x + 2y - 2z + 3 = 0$.

$$\text{dist}(P, \pi) = \frac{|8 + 10 + 12 + 3|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{33}{3} = 11 \text{ u}$$

3. Halla la distancia de los puntos $Q(3, 0, 3)$ y $R(0, 0, 0)$ al plano del ejercicio anterior.

$$\text{dist}(Q, \pi) = \frac{|3 - 6 + 3|}{3} = 0 \quad (Q \in \pi)$$

$$\text{dist}(R, \pi) = \frac{3}{3} = 1$$

Página 188

4. Calcula la distancia entre las dos rectas dadas mediante cada uno de los tres métodos aprendidos:

$$r: \begin{cases} x = 13 + 12\lambda \\ y = 2 \\ z = 8 + 5\lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 6 \\ y = 6 + \mu \\ z = -9 \end{cases}$$

■ Primer método:

Hallamos el plano, π , que contiene a r y es paralelo a s :

$$\left. \begin{array}{l} (12, 0, 5) // r \\ (0, 1, 0) // s \end{array} \right\} (12, 0, 5) \times (0, 1, 0) = (-5, 0, 12) \perp \pi$$

El punto $(13, 2, 8)$ es de r , y, por tanto, de π .

Ecuación de π : $-5(x - 13) + 0(y - 2) + 12(z - 8) = 0$, es decir:

$$-5x + 12z - 31 = 0$$

$$\text{dist}(r, s) = \text{dist}(s, \pi) = \text{dist}[(6, 6, -9), \pi] = \frac{|-30 - 108 - 31|}{\sqrt{25 + 144}} = \frac{169}{13} = 13$$

■ Segundo método:

Punto genérico de r : $R(13 + 12\lambda, 2, 8 + 5\lambda)$

Punto genérico de s : $S(6, 6 + \mu, -9)$

Un vector genérico que tenga su origen en r y su extremo en s es:

$$\vec{RS} = (-7 - 12\lambda, 4 + \mu, -17 - 5\lambda)$$

De todos los posibles vectores \vec{RS} , buscamos aquel que sea perpendicular a las dos rectas:

$$\begin{cases} \vec{RS} \cdot (12, 0, 5) = 0 \rightarrow -169\lambda - 169 = 0 \rightarrow \lambda = -1 \\ \vec{RS} \cdot (0, 1, 0) = 0 \rightarrow 4 + \mu = 0 \rightarrow \mu = -4 \end{cases}$$

Sustituyendo en r y en s , obtenemos los puntos R y S : $R(1, 2, 3)$, $S(6, 2, -9)$.

$$\text{dist}(r, s) = \text{dist}(R, S) = |(5, 0, -12)| = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

■ Tercer método:

$$\text{dist}(r, s) = \frac{\text{Volumen del paralelepípedo}}{\text{Área de la base}} = \frac{|[\vec{RS}, \vec{d}, \vec{d}']|}{|\vec{d} \times \vec{d}'|}$$

$$R(13, 2, 8) \quad \vec{d}(12, 0, 5)$$

$$S(6, 6, -9) \quad \vec{d}'(0, 1, 0)$$

$$\vec{RS}(-7, 4, -17)$$

$$[\vec{RS}, \vec{d}, \vec{d}'] = \begin{vmatrix} -7 & 4 & -17 \\ 12 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -169 \rightarrow \text{Volumen} = 169$$

$$|\vec{d} \times \vec{d}'| = |(-5, 0, 12)| = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

Por tanto: $\text{dist}(r, s) = \frac{169}{13} = 13$

5. Calcula la distancia entre las dos rectas dadas mediante tres métodos distintos:

$$r: \begin{cases} x = 5\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 5 + 7\mu \\ y = 1 - 5\mu \\ z = 1 - 5\mu \end{cases}$$

■ Primer método:

Hallamos el plano, π , que contiene a r y es paralelo a s :

$$\left. \begin{array}{l} (5, -1, 1) // r \\ (7, -5, -5) // s \end{array} \right\} (5, -1, 1) \times (7, -5, -5) = (10, 32, -18) // (5, 16, -9) \perp \pi$$

El punto $(0, 2, 0)$ es de r , y, por tanto, de π .

Ecuación de π : $5(x - 0) + 16(y - 2) - 9(z - 0) = 0$, es decir:

$$5x + 16y - 9z - 32 = 0$$

$$\text{dist}(r, s) = \text{dist}(s, \pi) = \text{dist}[(5, 1, 1), \pi] = \frac{|25 + 16 - 9 - 32|}{\sqrt{25 + 256 + 81}} = 0$$

(Las rectas r y s se cortan).

■ Segundo método:

Punto genérico de r : $R(5\lambda, 2 - \lambda, \lambda)$

Punto genérico de s : $S(5 + 7\mu, 1 - 5\mu, 1 - 5\mu)$

Un vector genérico que tenga su origen en r y su extremo en s es:

$$\vec{RS} = (5 + 7\mu - 5\lambda, -1 - 5\mu + \lambda, 1 - 5\mu - \lambda)$$

De todos los posibles vectores \vec{RS} , buscamos aquel que sea perpendicular a las dos rectas:

$$\begin{cases} \vec{RS} \cdot (5, -1, 1) = 0 \rightarrow 27 + 35\mu - 27\lambda = 0 \rightarrow \mu = 0 \\ \vec{RS} \cdot (7, -5, -5) = 0 \rightarrow 35 + 99\mu - 35\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 1 \end{cases}$$

Sustituyendo en r y en s , obtenemos los puntos R y S : $R(5, 1, 1)$, $S(5, 1, 1)$.

$$\text{dist}(r, s) = \text{dist}(R, S) = 0$$

- Tercer método:

$$\text{dist}(r, s) = \frac{\text{Volumen del paralelepípedo}}{\text{Área de la base}} = \frac{|[\vec{RS}, \vec{d}, \vec{d}']|}{|\vec{d} \times \vec{d}'|}$$

$$R(0, 2, 0) \quad \vec{d}(5, -1, 1)$$

$$S(5, 1, 1) \quad \vec{d}'(7, -5, -5)$$

$$\vec{RS}(5, -1, 1)$$

$$[\vec{RS}, \vec{d}, \vec{d}'] = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \\ 7 & -5 & -5 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{las dos primeras filas son iguales}).$$

Por tanto: $\text{dist}(r, s) = 0$

Página 189

6. Calcula la distancia entre la recta y el plano:

$$r: (1 - 3\lambda, 2 + \lambda, 1 - \lambda) \quad \pi: x + 3y = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{d}(-3, 1, -1) // r \\ \vec{n}(1, 3, 0) \perp \pi \end{array} \right\} \vec{d} \cdot \vec{n} = -3 + 3 = 0 \Rightarrow \vec{d} \perp \vec{n} \Rightarrow r // \pi$$

Puesto que la recta es paralela al plano (o, acaso, contenida en él), la distancia de r a π se obtiene calculando la distancia de cualquier punto de r a π :

$$\text{dist}(r, \pi) = \text{dist}[(1, 2, 1), \pi] = \frac{|1 + 6|}{\sqrt{1 + 9}} = \frac{7}{\sqrt{10}} \approx 2,21$$

7. Calcula la distancia entre los planos: $\pi: y - 5z + 4 = 0$ y $\pi': 2y - 10z = 0$

Los planos son paralelos, pues sus coeficientes son proporcionales. Por tanto, la distancia entre ellos es la distancia de un punto cualquiera de uno de ellos al otro:

$P(0, 5, 1)$ es un punto de π' . Por tanto:

$$\text{dist}(\pi, \pi') = \text{dist}(P, \pi) = \frac{|5 - 5 + 4|}{\sqrt{1 + 25}} = \frac{4}{\sqrt{26}} \approx 0,78$$

Página 191

1. Calcula el área del triángulo que tiene sus vértices en estos puntos: $A(1, 3, 5)$, $B(2, 5, 8)$ y $C(5, 1, -11)$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{AB}(1, 2, 3) \\ \vec{AC}(4, -2, -16) \end{array} \right\} \vec{AB} \times \vec{AC} = (-26, 28, -10)$$

$$|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{26^2 + 28^2 + 10^2} = \sqrt{1560}$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{\sqrt{1560}}{2} \approx 19,75 \text{ u}^2$$

2. Calcula el volumen de un tetraedro cuyos vértices son $A(2, 1, 4)$, $B(1, 0, 2)$, $C(4, 3, 2)$ y $D(1, 5, 6)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{AB}(-1, -1, -2) \\ \vec{AC}(2, 2, -2) \\ \vec{AD}(-1, 4, 2) \end{array} \right\} [\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}] = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -30$$

$$\text{Volumen} = \frac{30}{6} = 5 \text{ u}^3$$

Página 192

1. Halla el L. G. de los puntos que equidistan de:

a) $A(4, -1, 7)$ y $B(-2, 5, 1)$

b) $\pi: x + y + z - 2 = 0$ y $\pi': x - y + z - 2 = 0$

c) $\pi: x - 3y + 2z - 8 = 0$ y $\pi': x - 3y + 2z = 0$

a) $\text{dist}(X, A) = \text{dist}(X, B)$

$$\sqrt{(x-4)^2 + (y+1)^2 + (z-7)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + (y-5)^2 + (z-1)^2}$$

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 + 2y + 1 + z^2 - 14z + 49 = x^2 + 4x + 4 + y^2 - 10y + 25 + z^2 - 2z + 1$$

$$-12x + 12y - 12z + 36 = 0 \rightarrow x - y + z - 3 = 0$$

Es el plano mediador del segmento AB .

b) $\text{dist}(X, \pi) = \text{dist}(X, \pi')$

$$\frac{|x + y + z - 2|}{\sqrt{3}} = \frac{|x - y + z - 2|}{\sqrt{3}} \quad \text{Dos posibilidades:}$$

- $x + y + z - 2 = x - y + z - 2 \rightarrow 2y = 0 \rightarrow y = 0$

- $x + y + z - 2 = -x + y - z + 2 \rightarrow 2x + 2z - 4 = 0 \rightarrow x + z - 2 = 0$

Son los planos bisectores de los ángulos diedros formados por π y π' . Los dos planos obtenidos se cortan en la recta r determinada por los puntos $(1, 0, 1)$ y $(0, 0, 2)$, al igual que π y π' . Además, son perpendiculares, pues $(0, 1, 0) \cdot (1, 0, 1) = 0$.

c) $\text{dist}(X, \pi) = \text{dist}(X, \pi')$

$$\frac{|x - 3y + 2z - 8|}{\sqrt{1 + 9 + 4}} = \frac{|x - 3y + 2z|}{\sqrt{1 + 9 + 4}} \quad \text{Dos posibilidades:}$$

- $x - 3y + 2z - 8 = x - 3y + 2z \rightarrow -8 = 0 \rightarrow \text{Imposible.}$

- $x - 3y + 2z - 8 = -x + 3y - 2z \rightarrow 2x - 6y + 4z - 8 = 0 \rightarrow x - 3y + 2z - 4 = 0$

Los planos π y π' son paralelos. El plano obtenido es también paralelo a ellos.

Página 193

2. Averigua si $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 10y + 25 = 0$ corresponde a la ecuación de una esfera, y halla su centro y su radio.

$$r = \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\frac{C}{2}\right)^2 - D} = \sqrt{1 + 25 + 0 - 25} = 1$$

Es una esfera de radio 1. Su centro es $(-1, 5, 0)$.

3. Halla el radio de la circunferencia en la que el plano $4x - 3z - 33 = 0$ corta a la esfera $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 + z^2 = 169$.

La esfera tiene el centro en $Q(2, -5, 0)$ y su radio es $R = 13$.

$$\text{La distancia de } Q \text{ al plano es: } d = \frac{|8 - 0 - 33|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{25}{5} = 5$$

$$\text{Por tanto: } r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$$

El radio de la circunferencia es 12.

4. Halla el lugar geométrico de los puntos del espacio cuya suma de cuadrados de distancias a $O(0, 0, 0)$ y $Q(10, 0, 0)$ es 68. Comprueba que se trata de una esfera de centro $(5, 0, 0)$ y radio 3.

$$(x^2 + y^2 + z^2) + [(x - 10)^2 + y^2 + z^2] = 68$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + x^2 - 20x + 100 + y^2 + z^2 = 68$$

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 20x + 32 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 16 = 0$$

$$x^2 - 10x + 25 + y^2 + z^2 - 9 = 0$$

$$(x - 5)^2 + y^2 + z^2 = 9$$

Es una esfera de centro $(5, 0, 0)$ y radio 3.

Página 194

5. Halla el L. G. de los puntos cuya suma de distancias a $F(0, 0, 5)$ y $F'(0, 0, -5)$ es 26.

$$\text{dist}(X, F) + \text{dist}(X, F') = 26$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + (z - 5)^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + (z + 5)^2} = 26$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + (z - 5)^2} = 26 - \sqrt{x^2 + y^2 + (z + 5)^2}$$

$$x^2 + y^2 + (z - 5)^2 = 676 + x^2 + y^2 + (z + 5)^2 - 52 \sqrt{x^2 + y^2 + (z + 5)^2}$$

$$52 \sqrt{x^2 + y^2 + (z + 5)^2} = 676 + \cancel{x^2} + \cancel{y^2} + \cancel{z^2} + \cancel{25} + 10z - \cancel{x^2} - \cancel{y^2} - \cancel{z^2} - \cancel{25} + 10z$$

$$52 \sqrt{x^2 + y^2 + (z + 5)^2} = 20z + 676$$

$$13 \sqrt{x^2 + y^2 + (z + 5)^2} = 5z + 169$$

$$169 [x^2 + y^2 + (z + 5)^2] = 25z^2 + 1690z + 28561$$

$$169 [x^2 + y^2 + z^2 + 10z + 25] = 25z^2 + 1690z + 28561$$

$$169x^2 + 169y^2 + 169z^2 + 1690z + 4225 = 25z^2 + 1690z + 28561$$

$$169x^2 + 169y^2 + 144z^2 = 24336$$

$$\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{144} + \frac{z^2}{169} = 1$$

Es un elipsoide.

- 6. Halla el L. G. de los puntos cuya diferencia de distancias a $F(5, 0, 0)$ y $F'(-5, 0, 0)$ es 6.**

$$|dist(X, F) - dist(X, F')| = 6$$

$$\sqrt{(x-5)^2 + y^2 + z^2} - \sqrt{(x+5)^2 + y^2 + z^2} = \pm 6$$

$$\sqrt{(x-5)^2 + y^2 + z^2} = \pm 6 + \sqrt{(x+5)^2 + y^2 + z^2}$$

$$x^2 - 10x + 25 + y^2 + z^2 = 36 + (x+5)^2 + y^2 + z^2 \pm 12\sqrt{(x+5)^2 + y^2 + z^2}$$

$$\cancel{x^2} - 10x + \cancel{25} + \cancel{y^2} + \cancel{z^2} = 36 + \cancel{x^2} + 10x + \cancel{25} + \cancel{y^2} + \cancel{z^2} \pm 12\sqrt{(x+5)^2 + y^2 + z^2}$$

$$\pm 12\sqrt{(x+5)^2 + y^2 + z^2} = 20x + 36$$

$$\pm 3\sqrt{(x+5)^2 + y^2 + z^2} = 5x + 9$$

$$9[x^2 + 10x + 25 + y^2 + z^2] = 25x^2 + 90x + 81$$

$$9x^2 + \cancel{90x} + 225 + 9y^2 + 9z^2 = 25x^2 + \cancel{90x} + 81$$

$$-16x^2 + 9y^2 + 9z^2 = -144$$

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{16} = 1$$

Es un hiperboloide.

- 7. Halla el L. G. de los puntos que equidistan del plano $x + \frac{1}{4} = 0$ y del punto $(\frac{1}{4}, 0, 0)$. ¿A qué se parece la ecuación obtenida?**

$$dist(X, F) = dist(X, \pi), \text{ donde } \pi: x + \frac{1}{4} = 0 \text{ y } F(\frac{1}{4}, 0, 0).$$

$$\sqrt{(x - \frac{1}{4})^2 + y^2 + z^2} = \left| x + \frac{1}{4} \right|$$

$$\cancel{x^2} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} + y^2 + z^2 = \cancel{x^2} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}$$

$$x = y^2 + z^2$$

Es un paraboloide. Su ecuación es muy similar a la de una parábola.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

1 Estudia la posición de las rectas r y s y halla el ángulo que forman:

S

$$r: \begin{cases} x - y = 3 \\ y + z = 15 \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = -14 + 5\lambda \end{cases}$$

$$\vec{d}_r = (1, -1, 0) \times (0, 1, 1) = (-1, -1, 1); \quad P(3, 0, 15)$$

$$\vec{d}_s = (3, 2, 5); \quad P'(0, 1, -14)$$

$$\vec{PP'}(-3, 1, -29)$$

$$|M'| = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -29 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0. \quad \text{Las rectas se cortan en un punto.}$$

$$\text{El ángulo que forman es: } \cos \alpha = \frac{|\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s|}{|\vec{d}_r| |\vec{d}_s|} = \frac{0}{|\vec{d}_r| |\vec{d}_s|} = 0 \rightarrow \alpha = 90^\circ$$

2 Hallar, en cada caso, el ángulo que forma la recta y el plano:

S

$$\text{a) } r: \frac{x+1}{-2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z}{2} \quad \pi: x - 2y - z + 1 = 0$$

$$\text{b) } r: x = \lambda, \quad y = 1 + 2\lambda, \quad z = -2 \quad \pi: 2x - y + z = 0$$

$$\text{c) } r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{1} \quad \pi: x + z = 17$$

$$\text{a) } \vec{d}(-2, 4, 2); \quad \vec{n}(1, -2, -1)$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}| |\vec{n}|} = \frac{|-2 - 8 - 2|}{\sqrt{24} \cdot \sqrt{6}} = \frac{12}{12} = 1 \rightarrow 90^\circ - \alpha = 0 \rightarrow \alpha = 90^\circ$$

Observación: Los vectores \vec{d} y \vec{n} tienen la misma dirección; luego la recta y el plano son perpendiculares, es decir, $\alpha = 90^\circ$.

$$\text{b) } \vec{d}(1, 2, 0); \quad \vec{n}(2, -1, 1)$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}| |\vec{n}|} = \frac{|2 - 2 + 0|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{6}} = 0 \rightarrow 90^\circ - \alpha = 90^\circ \rightarrow \alpha = 0^\circ$$

c) $\vec{d}(2, 1, 1)$; $\vec{n}(1, 0, 1)$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}| |\vec{n}|} = \frac{|2 + 1|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow 90^\circ - \alpha = 30^\circ \rightarrow \alpha = 60^\circ$$

3 Calcula el ángulo que forman los planos $\alpha: z = 3$ y $\beta: x - y + 2z + 4 = 0$.

S

$\vec{n}_\alpha(0, 0, 1)$; $\vec{n}_\beta(1, -1, 2)$

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha| |\vec{n}_\beta|} = \frac{2}{1\sqrt{6}} = 0,816 \rightarrow \alpha = 35^\circ 15' 52''$$

4 Halla el área de cada uno de los triángulos:

a) $A(2, 7, 3)$, $B(1, -5, 4)$, $C(7, 0, 11)$

b) $A(3, -7, 4)$, $B(-1, 2, 5)$, $C(-5, 11, 6)$

Justifica la solución del segundo.

a) $\vec{AB}(-1, -12, 1)$; $\vec{AC}(5, -7, 8)$

$$\text{Área} = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{2} = \frac{|(-89, 13, 67)|}{2} = \frac{\sqrt{12579}}{2} \approx 56,08 \text{ u}^2$$

b) $\vec{AB}(-4, 9, 1)$; $\vec{AC}(-8, 18, 2)$

Las coordenadas son proporcionales, luego los puntos están alineados:

$$|\vec{AB} \times \vec{AC}| = 0$$

5 Calcula la distancia del punto dado a la recta, en los siguientes casos:

S

a) $P(0, 7, 0)$; $r: \begin{cases} x = -5 + 4\lambda \\ y = 5 + \lambda \\ z = -10 + 3\lambda \end{cases}$

b) $P(1, 0, 0)$; $r: x - 1 = \frac{y + 1}{2} = z$

c) $A(1, 2, 3)$; $r: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

a) $R(-5, 5, -10) \in r; \vec{d}(4, 1, 3) // r$

$$\vec{RP}(5, 2, 10)$$

$$\vec{RP} \times \vec{d} = (5, 2, 10) \times (4, 1, 3) = (-4, 25, -3)$$

$$\text{dist}(P, r) = \frac{\text{Área}}{\text{Base}} = \frac{|\vec{RP} \times \vec{d}|}{|\vec{d}|} = \frac{\sqrt{650}}{\sqrt{26}} = \sqrt{25} = 5$$

b) $R(1, -1, 0) \in r; \vec{d}(1, 2, 1) // r$

$$\vec{RP}(0, 1, 0)$$

$$\vec{RP} \times \vec{d} = (0, 1, 0) \times (1, 2, 1) = (1, 0, -1)$$

$$\text{dist}(P, r) = \frac{\text{Área}}{\text{Base}} = \frac{|\vec{RP} \times \vec{d}|}{|\vec{d}|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,577$$

c) $R(0, 0, 1) \in r; \vec{d}(0, 0, 1) // r$

$$\vec{RA}(1, 2, 2)$$

$$\vec{RA} \times \vec{d} = (1, 2, 2) \times (0, 0, 1) = (2, -1, 0)$$

$$\text{dist}(A, r) = \frac{\text{Área}}{\text{Base}} = \frac{|\vec{RA} \times \vec{d}|}{|\vec{d}|} = \frac{\sqrt{5}}{1} = \sqrt{5} \approx 2,24$$

6 Calcula la distancia entre las rectas, estudiando antes su posición relativa:

$$S \quad r: \begin{cases} x = 13 + 12\lambda \\ y = 2 \\ z = 8 + 5\lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 6 \\ y = 6 + \mu \\ z = -9 \end{cases}$$

$$\vec{d}_r(12, 0, 5); P(13, 2, 8)$$

$$\vec{d}_s(0, 1, 0); P'(6, 6, -9)$$

$$\vec{PP'}(-7, 4, -17)$$

$$\begin{vmatrix} 12 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & -17 \end{vmatrix} = -169 \neq 0 \rightarrow \text{Las rectas se cruzan.}$$

$$\begin{aligned} \text{dist}(r, s) &= \frac{\text{Volumen del paralelepípedo}}{\text{Área de la base}} = \frac{|[\vec{PP'}, \vec{d}_r, \vec{d}_s]|}{|\vec{d}_r \times \vec{d}_s|} = \frac{169}{|(-5, 0, 12)|} = \\ &= \frac{169}{\sqrt{169}} = \frac{169}{13} = 13 \end{aligned}$$

7 Calcula, en cada caso, el volumen del tetraedro con vértices:

a) $(2, 1, 4); (1, 0, 2); (4, 3, 2); (1, 5, 6)$

b) $(4, 1, 2); (2, 0, 1); (2, 3, 4); (6, 5, 1)$

a) $A(2, 1, 4)$ $B(1, 0, 2)$ $C(4, 3, 2)$ $D(1, 5, 6)$

$$\vec{AB}(-1, -1, -2) \quad \vec{AC}(2, 2, -2) \quad \vec{AD}(-1, 4, 2)$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -30 \rightarrow \text{Volumen} = \frac{1}{6} \cdot 30 = 5 \text{ u}^3$$

b) $A(4, 1, 2)$ $B(2, 0, 1)$ $C(2, 3, 4)$ $D(6, 5, 1)$

$$\vec{AB}(-2, -1, -1) \quad \vec{AC}(-2, 2, 2) \quad \vec{AD}(2, 4, -1)$$

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 30 \rightarrow \text{Volumen} = \frac{1}{6} \cdot 30 = 5 \text{ u}^3$$

8 Calcula el área total y el volumen del tetraedro de vértices:

$A(2, 3, 1)$, $B(4, 1, -2)$, $C(6, 3, 7)$, $D(-5, -4, 8)$

- Área del triángulo ABC :

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = (2, -2, -3) \times (4, 0, 6) = (-12, -24, 8)$$

$$\text{Área} = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{784}}{2} = \frac{28}{2} = 14 \text{ u}^2$$

- Área del triángulo ABD :

$$\vec{AB} \times \vec{AD} = (2, -2, -3) \times (-7, -7, 7) = (-35, 7, -28)$$

$$\text{Área} = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AD}|}{2} = \frac{\sqrt{2058}}{2} \approx 22,68 \text{ u}^2$$

- Área del triángulo ACD :

$$\vec{AC} \times \vec{AD} = (4, 0, 6) \times (-7, -7, 7) = (42, -70, -28)$$

$$\text{Área} = \frac{|\vec{AC} \times \vec{AD}|}{2} = \frac{\sqrt{7448}}{2} \approx 43,15 \text{ u}^2$$

- Área del triángulo BCD :

$$\vec{BC} \times \vec{BD} = (2, 2, 9) \times (-9, -5, 10) = (65, -101, 8)$$

$$\text{Área} = \frac{|\vec{BC} \times \vec{BD}|}{2} = \frac{\sqrt{14490}}{2} \approx 60,19 \text{ u}^2$$

- Área total = $14 + 22,68 + 43,15 + 60,19 = 140,02 \text{ u}^2$

- Volumen: $\vec{AB}(2, -2, -3)$ $\vec{AC}(4, 0, 6)$ $\vec{AD}(-7, -7, 7)$

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix} = 308 \rightarrow \text{Volumen} = \frac{306}{6} \approx 51,33 \text{ u}^3$$

9

Calcula la mínima distancia entre los siguientes pares de rectas:

S

$$\text{a) } \begin{cases} x = -4 - 2\lambda \\ y = -5 + 2\lambda \\ z = -1 - 3\lambda \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5 - 3\mu \\ y = 4 - \mu \\ z = 5 - 5\mu \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 5 - 7\lambda \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 3y + 2 = 0 \\ 3x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{a) } \vec{d}(-2, 2, -3); P(-4, -5, -1)$$

$$\vec{d}^1(-3, -1, -5); P'(5, 4, 5)$$

$$\vec{PP}'(9, 9, 6)$$

$$\begin{vmatrix} -2 & -3 & 9 \\ 2 & -1 & 9 \\ -3 & -5 & 6 \end{vmatrix} = -78 \neq 0 \rightarrow \text{Las rectas se cruzan.}$$

$$\begin{aligned} \text{dist} &= \frac{\text{Volumen del paralelepípedo}}{\text{Área de la base}} = \frac{|[\vec{PP}', \vec{d}, \vec{d}^1]|}{|\vec{d} \times \vec{d}^1|} = \frac{78}{|(-13, -1, 8)|} = \\ &= \frac{78}{\sqrt{234}} = 5,1 \end{aligned}$$

$$\text{b) } \vec{d}(1, -2, -7); P(1, 1, 5)$$

$$\vec{d}^1: (2, -3, 0) \times (3, -1, 0) = (0, 0, 7) // (0, 0, 1) = \vec{d}^1; P'\left(-\frac{1}{7}, \frac{4}{7}, 0\right)$$

$$\vec{PP}'\left(-\frac{8}{7}, -\frac{3}{7}, -5\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -8/7 \\ -2 & 0 & -3/7 \\ -7 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \frac{19}{7} \neq 0 \rightarrow \text{Las rectas se cruzan.}$$

$$\begin{aligned} \text{dist} &= \frac{\text{Volumen del paralelepípedo}}{\text{Área de la base}} = \frac{|[\vec{PP}', \vec{d}, \vec{d}^1]|}{|\vec{d} \times \vec{d}^1|} = \frac{19/7}{|(-2, -1, 0)|} = \\ &= \frac{19/7}{\sqrt{5}} \approx 1,21 \end{aligned}$$

10 Calcula la distancia entre las rectas:

$$\text{r: } \begin{cases} x = 13 + 12\lambda \\ y = 2 \\ z = 8 + \lambda \end{cases} \quad \text{s: } \begin{cases} x = 6 \\ y = 6 + \mu \\ z = -9 \end{cases}$$

dividiendo el volumen de un paralelepípedo entre el área de su base.

$$\vec{d}_r(12, 0, 1); P(13, 2, 8)$$

$$\vec{d}_s(0, 1, 0); P'(6, 6, -9)$$

$$\vec{PP}'(-7, 4, -17)$$

$$\begin{vmatrix} 12 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -7 & 4 & -17 \end{vmatrix} = -197 \neq 0 \rightarrow \text{Las rectas se cruzan.}$$

$$\begin{aligned} \text{dist}(r, s) &= \frac{\text{Volumen del paralelepípedo}}{\text{Área de la base}} = \frac{|[\vec{PP'}, \vec{d}_r, \vec{d}_s]|}{|\vec{d}_r \times \vec{d}_s|} = \frac{197}{|(-1, 0, 12)|} = \\ &= \frac{197}{\sqrt{145}} \approx 16,36 \end{aligned}$$

11 **Calcula el volumen del tetraedro determinado por los ejes coordenados y el plano: $6x - 5y + 3z - 1 = 0$**

S

☛ *Recuerda que $V = 1/3 \cdot \text{área base} \times \text{altura}$.*

En este caso es muy sencillo obtener ambas por ser un tetraedro con tres aristas perpendiculares entre sí.

Hazlo también utilizando el producto mixto y comprueba que obtienes el mismo resultado.

• Hallamos los vértices:

$$x = y = 0 \rightarrow z = \frac{1}{3} \rightarrow A\left(0, 0, \frac{1}{3}\right)$$

$$y = z = 0 \rightarrow x = \frac{1}{6} \rightarrow B\left(\frac{1}{6}, 0, 0\right)$$

$$x = z = 0 \rightarrow y = -\frac{1}{5} \rightarrow C\left(0, -\frac{1}{5}, 0\right)$$

$$O(0, 0, 0)$$

• Calculamos el volumen:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{540} u^3$$

• Lo calculamos utilizando el producto mixto:

$$V = \frac{1}{6} |[\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}]| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & -1/5 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{540} u^3$$

12 **Halla la ecuación del plano perpendicular a la recta $\frac{x+3}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z}{4}$ y que pasa por el punto $(-1, 1, 0)$, y calcula el volumen de la figura limitada por el plano anterior y los tres planos coordenados.**

S

Un vector normal al plano es $\vec{n}(2, 3, 4)$.

La ecuación del plano es: $2(x + 1) + 3(y - 1) + 4(z - 0) = 0$

$$2x + 3y + 4z - 1 = 0$$

Calculamos los vértices:

$$x = y = 0 \rightarrow z = \frac{1}{4} \rightarrow A\left(0, 0, \frac{1}{4}\right)$$

$$y = z = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2} \rightarrow B\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$$

$$x = z = 0 \rightarrow y = \frac{1}{3} \rightarrow C\left(0, \frac{1}{3}, 0\right)$$

$$O(0, 0, 0)$$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{144} \text{ u}^3$$

Página 202

- 13** Determina la ecuación de la recta que pasa por $P(1, 2, 2)$ y es perpendicular a las rectas r_1 y r_2 :

$$r_1: \begin{cases} x + 2y - 3z - 1 = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases} \quad r_2: \begin{cases} 3x - y + 3z = 0 \\ x + 4y - 2 = 0 \end{cases}$$

Obtenemos los vectores dirección de las rectas r_1 y r_2 :

$$r_1: (1, 2, -3) \times (1, 2, -1) = (4, -2, 0) \rightarrow \vec{d}_1(2, -1, 0)$$

$$r_2: (3, -1, 3) \times (1, 4, 0) = (-12, 3, 13) = \vec{d}_2$$

La recta que buscamos ha de ser perpendicular a r_1 y a r_2 :

$$(2, -1, 0) \times (-12, 3, 13) = (-26, -52, -12) \rightarrow \vec{d}(13, 26, 6)$$

Como pasa por el punto $P(1, 2, 2)$, sus ecuaciones son:

$$\begin{cases} x = 1 + 13\lambda \\ y = 2 + 26\lambda \\ z = 2 + 6\lambda \end{cases} \text{ o bien } \frac{x-1}{13} = \frac{y-2}{26} = \frac{z-2}{6}$$

Esfera

- 14** Di cuáles de las siguientes ecuaciones corresponden a esferas y di su centro y su radio:

a) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 8 = 0$

b) $2x^2 - 2y^2 + 2z^2 + 4x - 16 = 0$

c) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4x - 16 = 0$

d) $x^2 + 3y^2 + z^2 - 2xz - 4 = 0$

e) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6x - 12z - 3 = 0$

f) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6x - 12z - 30 = 0$

g) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x + 6y - 3/2 = 0$

a) No tiene término en z^2 . *No es una esfera.*

b) Los coeficientes de x^2, y^2, z^2 no son iguales, luego *no es una esfera.*

c) Los coeficientes de x^2, y^2, z^2 son iguales. Dividimos la ecuación entre 2:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 8 = 0$$

$$\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\frac{C}{2}\right)^2 - D = 1 + 0 + 0 - (-8) = 9 \rightarrow \text{radio} = \sqrt{9} = 3$$

$$\text{Centro} = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right) = (-1, 0, 0)$$

d) Los coeficientes de x^2, y^2, z^2 no son iguales, luego *no es una esfera.*

e) Los coeficientes de x^2, y^2, z^2 son iguales. Dividimos la ecuación entre 3:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4z - 1 = 0$$

$$\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\frac{C}{2}\right)^2 - D = 1 + 0 + 4 - (-1) = 6 \rightarrow \text{radio} = \sqrt{6}$$

$$\text{Centro} = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right) = (-1, 0, 2)$$

f) Los coeficientes de x^2, y^2, z^2 son iguales. Dividimos la ecuación entre 3:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4z - 10 = 0$$

$$\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\frac{C}{2}\right)^2 - D = 1 + 0 + 4 - (-10) = 15 \rightarrow \text{radio} = \sqrt{15}$$

$$\text{Centro} = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right) = (-1, 0, 2)$$

g) Los coeficientes de x^2, y^2, z^2 son iguales. Dividimos la ecuación entre 2:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y - \frac{3}{4} = 0$$

$$\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\frac{C}{2}\right)^2 - D = 1 + \frac{9}{4} + 0 - \left(-\frac{3}{4}\right) = 4 \rightarrow \text{radio} = 2$$

$$\text{Centro} = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right) = \left(-1, -\frac{3}{2}, 0\right)$$

15 Halla la ecuación de las siguientes esferas:

a) Centro (1, 0, -5) y radio 1.

b) Diámetro A(3, -4, 2), B(5, 2, 0).

c) Centro (4, -2, 3) y tangente al plano $x - z = 0$.

d) Centro (3, -1, 2) y tangente al plano YZ.

a) $(x - 1)^2 + y^2 + (z + 5)^2 = 1$, o bien, $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 10z + 25 = 0$

b) El centro es el punto medio de AB : $C = \left(\frac{3+5}{2}, -\frac{4+2}{2}, \frac{2+0}{2} \right) = (4, -1, 1)$

El radio es la distancia de C a uno de los puntos: $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{11}$

La ecuación es: $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 11$, o bien:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y - 2z + 7 = 0$$

c) El radio es la distancia del centro $C(4, -2, 3)$ al plano $\pi: x - z = 0$:

$$r = \text{dist}(C, \pi) = \frac{|4 - 3|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow r^2 = \frac{1}{2}$$

La ecuación será: $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = \frac{1}{2}$, o bien:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y - 6z + \frac{57}{2} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 16x + 8y - 12z + 57 = 0$$

d) El plano YZ es el plano $\pi: x = 0$.

El radio es la distancia del centro $C(3, -1, 2)$ al plano π : $r = \text{dist}(C, \pi) = 3$

La ecuación será: $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 9$, o bien:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 4z + 5 = 0$$

16 Halla el lugar geométrico de los puntos cuya distancia al punto $(2, -1, 4)$ es igual a 7.

Es una esfera de centro $(2, -1, 4)$ y radio 7:

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 4)^2 = 49, \text{ o bien, } x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 8z - 28 = 0$$

PARA RESOLVER

17 Halla la ecuación del plano π que contiene a la recta $r: \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$ y es ortogonal al plano $\sigma: 2x - y + 3z + 1 = 0$.

Obtén también las ecuaciones paramétricas de la recta determinada por π y σ .

Obtenemos un punto y un vector dirección de la recta r :

$$P(1, -1, 1) \in r \rightarrow P(1, -1, 1) \in \pi$$

$$(1, 1, -1) \times (1, 2, 1) = (3, -2, 1) = \vec{d} // r \rightarrow \vec{d}(3, -2, 1) // \pi$$

Si π es ortogonal a σ , el vector normal de σ es paralelo a π :

$$\vec{n}_{\sigma}(2, -1, 3) \perp \sigma \rightarrow (2, -1, 3) // \pi$$

Obtenemos un vector normal a π : $(3, -2, 1) \times (2, -1, 3) = (-5, -7, 1) \rightarrow (5, 7, -1)$

La ecuación del plano π es: $5(x-1) + 7(y+1) - 1(z-1) = 0$

$$5x + 7y - z + 3 = 0$$

• Ecuaciones paramétricas de la recta determinada por π y σ :

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 5x + 7y - z + 3 = 0 \\ \sigma: 2x - y + 3z + 1 = 0 \end{array} \right\}$$

Vector dirección de la recta: $(5, 7, -1) \times (2, -1, 3) = (20, -17, -19)$

Punto de la recta:

$$x = 0 \rightarrow \left. \begin{array}{l} 7y - z + 3 = 0 \\ -y + 3z + 1 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = -\frac{1}{2} \\ z = -\frac{1}{2} \end{array} \left. \right\} R\left(0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{Ecuaciones de la recta: } \left\{ \begin{array}{l} x = 20\lambda \\ y = -\frac{1}{2} - 17\lambda \\ z = -\frac{1}{2} - 19\lambda \end{array} \right.$$

18 **S** **Dados la recta** $r: \frac{x}{2} = \frac{1-y}{1} = \frac{z+1}{3}$ **y el plano** $\pi: x + 3y - 3z + 3 = 0$, **halla el plano que contiene a** r **y es perpendicular a** π .

$$r: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{3} \rightarrow P(0, 1, -1); \vec{d}(2, -1, 3)$$

$$\pi: x + 3y - 3z + 3 = 0 \rightarrow \vec{n}(1, 3, -3)$$

El plano será paralelo a \vec{d} y a \vec{n} y contendrá a P .

Un vector normal será: $(2, -1, 3) \times (1, 3, -3) = (-6, 9, 7) \rightarrow (6, -9, -7)$

La ecuación del plano es: $6(x-0) - 9(y-1) - 7(z+1) = 0$

$$6x - 9y - 7z + 2 = 0$$

19 **S** **Determina la perpendicular común a las rectas:**

$$r: \begin{cases} x + y = z + 4 \\ x + 2y = 7 \end{cases} \quad s: \begin{cases} x - 2 = 0 \\ y + 3 = 0 \end{cases}$$

Escribimos las dos rectas en forma paramétrica:

$$r: \begin{cases} x + y = z + 4 \\ x + 2y = 7 \end{cases} \quad \text{Restando la 1ª ecuación a la 2ª: } y = 3 - z \\ x = 7 - 2y = 7 - 2(3 - z) = 1 + 2z$$

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \rightarrow \quad \text{Un punto genérico de } r \text{ es: } R(1 + 2\lambda, 3 - \lambda, \lambda)$$

$$s: \begin{cases} x - 2 = 0 \\ y + 3 = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad s: \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \\ z = \mu \end{cases} \quad \rightarrow \quad \text{Un punto genérico de } s \text{ es: } S(2, -3, \mu)$$

Un vector genérico de origen en r y extremo en s es: $\overrightarrow{RS}(1 - 2\lambda, -6 + \lambda, \mu - \lambda)$

Este vector debe ser perpendicular a r y a s :

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{RS} \cdot (2, -1, 1) &= 0 \rightarrow 2 - 4\lambda + 6 - \lambda + \mu - \lambda = 0 \rightarrow -6\lambda + \mu + 8 = 0 \\ \overrightarrow{RS} \cdot (0, 0, 1) &= 0 \rightarrow \mu - \lambda = 0 \rightarrow \mu = \lambda \end{aligned} \right\}$$

$$-5\lambda + 8 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{8}{5}; \quad \mu = \frac{8}{5}$$

Así:

$$\left. \begin{aligned} R\left(\frac{21}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}\right) \\ S\left(2, -3, \frac{8}{5}\right) \end{aligned} \right\} \quad \overrightarrow{RS}\left(-\frac{11}{5}, -\frac{22}{5}, 0\right) \rightarrow \vec{d}(1, 2, 0)$$

La perpendicular común a las rectas es:

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -3 + 2\lambda \\ z = 8/5 \end{cases}$$

20 a) Halla p para que las rectas r_1 y r_2 sean perpendiculares:

S

$$r_1: \frac{x}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{2} \quad r_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-p}{p-1} = \frac{z-3}{3}$$

b) Calcula su punto de intersección y la ecuación del plano que las contiene.

$$a) (4, -2, 2) \cdot (1, p-1, 3) = 4 - 2p + 2 + 6 = 12 - 2p = 0 \rightarrow p = 6$$

$$b) r_1: \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \quad r_2: \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 6 + 5\mu \\ z = 3 + 3\mu \end{cases}$$

- Punto de intersección:

$$\left. \begin{array}{l} 4\lambda = 1 + \mu \\ 1 - 2\lambda = 6 + 5\mu \\ 2\lambda = 3 + 3\mu \end{array} \right\} \text{Sumando las dos últimas ecuaciones:}$$

$$1 = 9 + 8\mu \rightarrow -8 = 8\mu \rightarrow \mu = -1$$

$$\lambda = \frac{3 + 3\mu}{2} = \frac{3 - 3}{2} = 0$$

1ª ecuación: $4 \cdot 0 = 1 - 1$. Luego $\lambda = 0$, $\mu = -1$.

Sustituyendo $\lambda = 0$ en las ecuaciones de r_1 (o bien $\mu = -1$ en las de r_2), obtenemos el punto de corte: $(0, 1, 0)$.

- Ecuación del plano que las contiene:

$$(4, -2, 2) \times (1, 5, 3) = (-16, -10, 22) \rightarrow (8, 5, -11) \text{ es un vector normal al plano.}$$

$$\text{Ecuación: } 8(x - 0) + 5(y - 1) - 11(z - 0) = 0$$

$$8x + 5y - 11z - 5 = 0$$

- 21** **S** Dados la recta $r: \begin{cases} x - 2z + 3 = 0 \\ y - z - 4 = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi: x + 2y + 3z - 1 = 0$, **halla la ecuación de una recta situada en el plano π , que pase por el punto $P(2, 1, -1)$ y sea perpendicular a r .**

Un vector dirección de r es: $(1, 0, -2) \times (0, 1, -1) = (2, 1, 1)$

La recta que buscamos ha de ser perpendicular a $(2, 1, 1)$ y perpendicular a $(1, 2, 3)$ (pues está situada en el plano π). Un vector dirección de la recta es:

$$(2, 1, 1) \times (1, 2, 3) = (1, -5, 3)$$

El punto $P(2, 1, -1)$ pertenece al plano y debe pertenecer a la recta buscada. Luego la recta es:

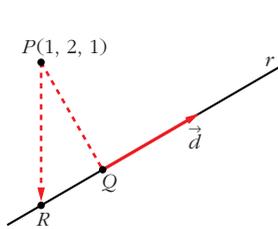
$$\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 - 5\lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases}$$

- 22** **S** **Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1, 2, 1)$ y corta perpendicularmente a la recta $r: \begin{cases} x - y - z = 1 \\ x + z = 2 \end{cases}$**

Escribimos r en forma paramétrica:

$$r: \begin{cases} x - y - z = 1 \rightarrow y = x - z - 1 = 2 - z - z - 1 = 1 - 2z \\ x + z = 2 \rightarrow x = 2 - z \end{cases}$$

$$r: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \rightarrow \text{Un punto genérico de } r \text{ es: } R(2 - \lambda, 1 - 2\lambda, \lambda)$$



Si llamamos al punto $P(1, 2, 1)$, el vector \vec{PR} ha de ser perpendicular a r , es decir, perpendicular a $\vec{d}(-1, -2, 1)$.

Por tanto, como $\vec{PR}(1 - \lambda, -1 - 2\lambda, -1 + \lambda)$:

$$\vec{PR} \cdot \vec{d} = 0 \rightarrow (1 - \lambda, -1 - 2\lambda, -1 + \lambda) \cdot (-1, -2, 1) = 0$$

$$-1 + \lambda + 2 + 4\lambda - 1 + \lambda = 0 \rightarrow 6\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 0$$

La recta que buscamos pasa por el punto $P(1, 2, 1)$ y por el punto $Q(2, 1, 0)$ (Q se obtiene sustituyendo $\lambda = 0$ en las ecuaciones de r).

Un vector dirección será: $\vec{PQ}(1, -1, -1)$

$$\text{La recta es: } \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

- 23** Los vértices del triángulo ABC son los puntos de corte del plano $2x + y - 3z = 6$ con los ejes coordenados. Halla la ecuación de la altura que parte del vértice B que está en el eje OY .

Los vértices del triángulo son:

$$y = z = 0 \rightarrow 2x = 6 \rightarrow x = 3 \rightarrow A(3, 0, 0)$$

$$x = z = 0 \rightarrow y = 6 \rightarrow B(0, 6, 0)$$

$$x = y = 0 \rightarrow -3z = 6 \rightarrow z = -2 \rightarrow C(0, 0, -2)$$

Debemos hallar la ecuación de la altura que parte de B .

Su vector dirección $\vec{d}(a, b, c)$ debe ser:

— Ortogonal a $\vec{AC} \rightarrow \vec{AC} \cdot \vec{d} = 0$

— Ortogonal al vector normal del plano ABC , es decir, del plano $2x + y - 3z = 6$, puesto que la altura debe estar contenida en dicho plano $\rightarrow (2, 1, -3) \cdot \vec{d} = 0$

Luego tenemos que:

$$\left. \begin{aligned} \vec{AC} \cdot \vec{d} = 0 &\rightarrow (-3, 0, -2) \cdot (a, b, c) = 0 \rightarrow 3a + 2c = 0 \\ (2, 1, -3) \cdot \vec{d} = 0 &\rightarrow (2, 1, -3) \cdot (a, b, c) = 0 \rightarrow 2a + b - 3c = 0 \end{aligned} \right\}$$

Soluciones: $(-2t, 13t, 3t) \rightarrow$ Si $t = -1$, $\vec{d}(2, -13, -3)$

Ecuación de la altura que pasa por B :

$$\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 6 - 13\lambda \\ z = -3\lambda \end{cases}$$

24 **S** Halla el punto P de la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{3}$ que equidiste de los planos:

$$\alpha: x + y + z = -3 \quad \text{y} \quad \beta: \begin{cases} x = -3 + \lambda \\ y = -\lambda + \mu \\ z = -6 + \mu \end{cases}$$

• Un punto genérico de la recta r es: $R(1 + 2\lambda, -1 + \lambda, 3\lambda)$

• Escribimos el plano β en forma implícita:

$$\begin{vmatrix} x+3 & 1 & 0 \\ y & -1 & 1 \\ z+6 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \beta: x + y - z - 3 = 0$$

• La distancia de R a α y a β ha de ser la misma: $\text{dist}(R, \alpha) = \text{dist}(R, \beta)$

$$\frac{|1 + 2\lambda - 1 + \lambda + 3\lambda + 3|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{|1 + 2\lambda - 1 + \lambda - 3\lambda - 3|}{\sqrt{1 + 1 + 1}}, \text{ es decir:}$$

$$|6\lambda + 3| = 3 \begin{cases} 6\lambda + 3 = 3 \rightarrow 6\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 0 \\ 6\lambda + 3 = -3 \rightarrow 6\lambda = -6 \rightarrow \lambda = -1 \end{cases}$$

Hay dos soluciones: $P(1, -1, 0)$ y $P'(-1, -2, -3)$

Página 203

25 **S** Sea r la recta de intersección de los planos $ax + 9y - 3z = 8$ y $x + ay - z = 0$.

Determina el valor de a para que:

a) Los dos planos sean paralelos.

b) Los dos planos sean perpendiculares.

c) La recta r corte al plano OXY en un punto cuya distancia al origen de coordenadas sea $\sqrt{2}$.

a) Las coordenadas de $(a, 9, -3)$ y $(1, a, -1)$ han de ser proporcionales:

$$\frac{a}{1} = \frac{9}{a} = \frac{-3}{-1} \begin{cases} \frac{a}{1} = \frac{-3}{-1} \rightarrow a = 3 \\ \frac{9}{a} = \frac{-3}{-1} \rightarrow a = 3 \end{cases} \left. \vphantom{\frac{a}{1}} \right\} a = 3$$

b) Los vectores normales han de ser perpendiculares:

$$(a, 9, -3) \cdot (1, a, -1) = a + 9a + 3 = 10a + 3 = 0 \rightarrow a = \frac{-3}{10}$$

c) El plano OXY es el plano $z = 0$. Hallamos el punto de corte de r con el plano OXY :

$$\left. \begin{cases} ax + 9y - 3z = 8 \\ x + ay - z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \right\} \left. \begin{cases} ax + 9y = 8 \\ x + ay = 0 \end{cases} \right\} |A| = \begin{vmatrix} a & 9 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 9$$

(El problema solo tiene solución si $a^2 - 9 \neq 0$, es decir, si $a \neq 3$ y $a \neq -3$. Si $a = 3$ o $a = -3$, el sistema es incompatible).

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 0 & a \end{vmatrix} = 8a; \quad |A_y| = \begin{vmatrix} a & 8 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -8$$

$$x = \frac{8a}{a^2 - 9}; \quad y = \frac{-8}{a^2 - 9}; \quad z = 0$$

El punto de corte es $P\left(\frac{8a}{a^2 - 9}, \frac{-8}{a^2 - 9}, 0\right)$. Su distancia al origen ha de ser $\sqrt{2}$:

$$\text{dist}(P, O) = \sqrt{\left(\frac{8a}{a^2 - 9}\right)^2 + \left(\frac{-8}{a^2 - 9}\right)^2} = \sqrt{2}$$

$$\left(\frac{8a}{a^2 - 9}\right)^2 + \left(\frac{-8}{a^2 - 9}\right)^2 = 2 \rightarrow \frac{64a^2 + 64}{(a^2 - 9)^2} = 2$$

$$64a^2 + 64 = 2(a^4 + 81 - 18a^2) \rightarrow 64a^2 + 64 = 2a^4 + 162 - 36a^2$$

$$0 = 2a^4 - 100a^2 + 98 \rightarrow a^4 - 50a^2 + 49 = 0$$

$$a^2 = \frac{50 \pm \sqrt{2500 - 196}}{2} = \frac{50 \pm \sqrt{2304}}{2} = \frac{50 \pm 48}{2} = \begin{cases} a^2 = 49 \rightarrow a = \pm 7 \\ a^2 = 1 \rightarrow a = \pm 1 \end{cases}$$

Hay cuatro soluciones: $a_1 = -7$, $a_2 = 7$, $a_3 = -1$, $a_4 = 1$

26 S **Halla la ecuación del plano que contiene a la recta de ecuaciones paramétricas: $(-1 + 3\lambda, 1 + 2\lambda, 2 + \lambda)$ y es perpendicular al plano $2x + y - 3z + 4 = 0$.**

Determina también el ángulo formado por la recta y el plano dados.

Un vector normal al plano es: $(3, 2, 1) \times (2, 1, -3) = (-7, 11, -1) \rightarrow (7, -11, 1)$

Un punto del plano es $(-1, 1, 2)$ (pues contiene a la recta).

- La ecuación del plano será:

$$7(x + 1) - 11(y - 1) + 1(z - 2) = 0$$

$$7x - 11y + z + 16 = 0$$

- Ángulo formado por la recta y el plano dados:

$$\vec{d}(3, 2, 1); \quad \vec{n}(2, 1, -3)$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}| |\vec{n}|} = \frac{6 + 2 - 3}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}} = \frac{5}{14} = 0,357$$

$$90^\circ - \alpha = 69^\circ 4' 31'' \rightarrow \alpha = 20^\circ 55' 29''$$

27

S

Dado un cubo (hexaedro regular) de lado 6 cm, halla la mínima distancia de una diagonal del cubo a una diagonal de una de sus caras, sabiendo que las rectas de ambas diagonales se cruzan.

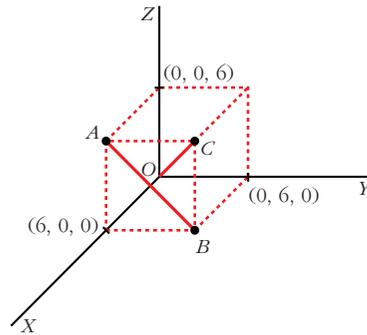
☛ *Dibuja el cubo con un vértice en el origen y los contiguos sobre los ejes coordenados.*

- La diagonal del cubo pasa por $O(0, 0, 0)$ y por $C(6, 6, 6)$:

$$r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

- La diagonal de la cara pasa por $A(6, 0, 6)$ y por $B(6, 6, 0)$:

$$s: \begin{cases} x = 6 \\ y = \mu \\ z = 6 - \mu \end{cases}$$



$$\bullet \text{ dist}(r, s) = \frac{\text{Volumen del paralelepípedo}}{\text{Área de la base}} = \frac{|[\vec{d}, \vec{d}', \vec{OA}]|}{|\vec{d} \times \vec{d}'|}$$

$$[\vec{d}, \vec{d}', \vec{OA}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 6 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -6$$

$$\vec{d} \times \vec{d}' = (1, 1, 1) \times (0, 1, -1) = (-2, 1, 1) \rightarrow |\vec{d} \times \vec{d}'| = \sqrt{6}$$

$$\text{Por tanto: } \text{dist}(r, s) = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

28

S

Halla la ecuación del plano cuyo punto más próximo al origen es $(1, 3, 2)$.

Si el punto más próximo al origen es $P(1, 3, 2)$, el vector $\vec{OP}(1, 3, 2)$ es normal al plano. Por tanto, la ecuación del plano es:

$$1(x-1) + 3(y-3) + 2(z-2) = 0$$

$$x + 3y + 2z - 14 = 0$$

29

S

Determina, razonadamente, si las rectas

$$r: \begin{cases} x + y - 2z + 1 = 0 \\ 2x - y + z - 1 = 0 \end{cases} \quad s: \begin{cases} 2x + y - z - 1 = 0 \\ x - y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

se cortan o se cruzan. Halla también el coseno del ángulo que forman sus direcciones.

Obtenemos un punto y un vector dirección de cada una de las dos rectas:

$$\vec{d}_r: (1, 1, -2) \times (2, -1, 1) = (-1, -5, -3) \rightarrow \vec{d}_r(1, 5, 3); P(0, -1, 0)$$

$$\vec{d}_s: (2, 1, -1) \times (1, -1, -2) = (-3, 3, -3) \rightarrow \vec{d}_s(1, -1, 1); P'(0, 1, 0)$$

$$\vec{PP'}(0, 2, 0)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \rightarrow \text{Las rectas se cruzan.}$$

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s|}{|\vec{d}_r| |\vec{d}_s|} = \frac{|1 - 5 + 3|}{\sqrt{35} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{105}} = 0,0976$$

- 30** Determina las condiciones que deben cumplir a y b para que estos tres planos: $ax + z - 1 = 0$, $x + bz + 2 = 0$, $\sqrt{5}x + 3y + 2z - 3 = 0$ se corten en un punto.

Haciendo $a = 2$ y $b = 1$, obtén las ecuaciones paramétricas de la recta determinada por los dos primeros, así como el ángulo que esta forma con el tercero.

$$\left. \begin{array}{l} ax + z = 1 \\ x + bz = -2 \\ \sqrt{5}x + 3y + 2z = 3 \end{array} \right\} \text{Para que los tres planos se corten en un punto, el sistema ha de tener solución única, es decir:}$$

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & b \\ \sqrt{5} & 3 & 2 \end{vmatrix} = -3(ab - 1) \neq 0 \rightarrow ab \neq 1$$

- Si $a = 2$ y $b = 1$, la recta determinada por los dos primeros planos es:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + z - 1 = 0 \\ x + z + 2 = 0 \end{array} \right\} \text{Restando: } x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$$

$$z = -2 - x = -2 - 3 = -5$$

$$\text{Ecuaciones paramétricas: } \begin{cases} x = 3 \\ y = \lambda \\ z = -5 \end{cases}$$

- Ángulo que forma la recta con el 3^{er} plano:

$$\vec{d}(0, 1, 0) \quad \vec{n}(\sqrt{5}, 3, 2)$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}| |\vec{n}|} = \frac{3}{1\sqrt{18}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow 90^\circ - \alpha = 45^\circ \rightarrow \alpha = 45^\circ$$

- 31** a) Encuentra los puntos de $r: \begin{cases} x + y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$ que disten $\frac{1}{3}$ del plano $\pi: 2x - y + 2z + 1 = 0$.

- b) Obtén los puntos de π que distan $\frac{1}{3}$ de los puntos hallados en el apartado anterior.

a) Escribimos r en forma paramétrica:

$$\left. \begin{array}{l} y = -x \\ z = x \end{array} \right\} \rightarrow r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \rightarrow \text{Un punto de } r \text{ es de la forma } R(\lambda, -\lambda, \lambda)$$

$$\text{dist}(R, \pi) = \frac{|2\lambda + \lambda + 2\lambda + 1|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{|5\lambda + 1|}{3} = \frac{1}{3} \begin{cases} 5\lambda + 1 = 1 \rightarrow \lambda = 0 \\ 5\lambda + 1 = -1 \rightarrow \lambda = -2/5 \end{cases}$$

Hay dos puntos: $(0, 0, 0)$ y $\left(-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{2}{5}\right)$

b) Los dos puntos obtenidos están a distancia $\frac{1}{3}$ de π .

Se trata de encontrar la proyección de estos puntos sobre el plano π .

• Para $(0, 0, 0)$:

Obtenemos la recta que pasa por $(0, 0, 0)$ y es perpendicular a π :

$$\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

Hallamos el punto de corte de esta recta con π :

$$4\lambda + \lambda + 4\lambda + 1 = 0 \rightarrow 9\lambda = -1 \rightarrow \lambda = -\frac{1}{9}$$

El punto es $\left(-\frac{2}{9}, \frac{1}{9}, -\frac{2}{9}\right)$.

• Para $\left(-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{2}{5}\right)$:

Hallamos la recta que pasa por este punto y es perpendicular a π :

$$\begin{cases} x = -2/5 + 2\lambda \\ y = 2/5 - \lambda \\ z = -2/5 + 2\lambda \end{cases}$$

Obtenemos el punto de corte de esta recta con π :

$$2\left(-\frac{2}{5} + 2\lambda\right) - \left(\frac{2}{5} - \lambda\right) + 2\left(-\frac{2}{5} + 2\lambda\right) + 1 = 0$$

$$-\frac{4}{5} + 4\lambda - \frac{2}{5} + \lambda - \frac{4}{5} + 4\lambda + 1 = 0$$

$$9\lambda - 1 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{1}{9}$$

El punto es $\left(-\frac{8}{45}, \frac{13}{45}, -\frac{8}{45}\right)$.

32 Sean los puntos $P(3, 1, 5)$ y $Q(-1, 7, 3)$. Por el punto medio del segmento PQ trazamos un plano π perpendicular a dicho segmento. Este plano corta a los ejes coordenados en los puntos A, B y C .

a) Escribe la ecuación de π .

b) Calcula el área del triángulo ABC .

a) El plano es perpendicular al vector $\overrightarrow{PQ}(-4, 6, -2)$; un vector normal al plano es $(2, -3, 1)$.

Pasa por el punto medio del segmento PQ : $M(1, 4, 4)$.

La ecuación del plano es: $2(x - 1) - 3(y - 4) + 1(z - 4) = 0$

$$\pi: 2x - 3y + z + 6 = 0$$

b) Hallamos los vértices del triángulo:

$$y = z = 0 \rightarrow 2x + 6 = 0 \rightarrow x = -3 \rightarrow A(-3, 0, 0)$$

$$x = z = 0 \rightarrow -3y + 6 = 0 \rightarrow y = 2 \rightarrow B(0, 2, 0)$$

$$x = y = 0 \rightarrow z + 6 = 0 \rightarrow z = -6 \rightarrow C(0, 0, -6)$$

$$\overrightarrow{AB}(3, 2, 0) \quad \overrightarrow{AC}(3, 0, -6)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-12, 18, -6) \rightarrow |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{504}$$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{504}}{2} \approx 11,22 \text{ u}^2$$

33 Calcula el volumen de un cubo que tiene aristas sobre cada una de las rectas r y s :

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 6t \\ z = -1 - t \end{cases} \quad s: \frac{x}{13} = \frac{y-8}{2} = \frac{z-6}{14}$$

• Hallamos la posición relativa de las dos rectas:

$$\overrightarrow{d}_r = (2, 6, -1); P(1, -2, -1)$$

$$\overrightarrow{d}_s = (13, 2, 14); P'(0, 8, 6)$$

$$\overrightarrow{PP'}(-1, 10, 7)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 13 & -1 \\ 6 & 2 & 10 \\ -1 & 14 & 7 \end{vmatrix} = -1014 \rightarrow \text{Las rectas se cruzan.}$$

• La arista del cubo es la distancia entre las dos rectas:

$$\begin{aligned} \text{dist}(r, s) &= \frac{\text{Volumen del paralelepípedo}}{\text{Área de la base}} = \frac{1014}{|\overrightarrow{d}_r \times \overrightarrow{d}_s|} = \frac{1014}{|(86, -41, -74)|} = \\ &= \frac{1014}{\sqrt{14553}} = \text{arista del cubo} \end{aligned}$$

- El volumen del cubo es:

$$V = \left(\frac{1014}{\sqrt{14553}} \right)^3 \approx 593,86 \text{ u}^3$$

34 Determina la ecuación continua de la recta r que es perpendicular y corta a las rectas s y t de ecuaciones:

$$s: (1 + 2\lambda, 2 - \lambda, 1 + \lambda) \quad t: (4 + \mu, 6 + \mu, 5 - 2\mu)$$

Un vector genérico de origen en s y extremo en t es:

$$\vec{ST}(3 - 2\lambda + \mu, 4 + \lambda + \mu, 4 - \lambda - 2\mu)$$

Este vector ha de ser perpendicular a las dos rectas:

$$\left. \begin{aligned} \vec{ST} \cdot (2, -1, 1) &= 0 \rightarrow 6 - 4\lambda + 2\mu - 4 - \lambda - \mu + 4 - \lambda - 2\mu = 0 \rightarrow 6\lambda + \mu = 6 \\ \vec{ST} \cdot (1, 1, -2) &= 0 \rightarrow 3 - 2\lambda + \mu + 4 + \lambda + \mu - 8 + 2\lambda + 4\mu = 0 \rightarrow \lambda + 6\mu = 1 \end{aligned} \right\}$$

$$\lambda = 1, \mu = 0$$

La recta que buscamos, corta a s en $S(3, 1, 2)$, y corta a t en $T(4, 6, 5)$.

Un vector dirección es $\vec{ST}(1, 5, 3)$.

$$\text{Su ecuación continua es: } \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-2}{3}$$

35 Halla los puntos simétricos de $P(1, 2, 3)$ respecto del plano

S

$$\alpha: x - 3y - 2z + 4 = 0 \text{ y respecto de la recta } r: \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 4x - z = 0 \end{cases}$$

■ Simétrico respecto del plano:

- Ecuación de la recta que pasa por P y es perpendicular a α :

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}$$

- Punto de corte de α con la recta anterior:

$$(1 + \lambda) - 3(2 - 3\lambda) - 2(3 - 2\lambda) + 4 = 0$$

$$1 + \lambda - 6 + 9\lambda - 6 + 4\lambda + 4 = 0$$

$$14\lambda - 7 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

La recta y el plano se cortan en $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 2\right)$. Este es el punto medio del segmento PP' , siendo P' el simétrico de P respecto del plano α . Luego, si $P'(x, y, z)$,

$$\text{entonces: } \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+2}{2}, \frac{z+3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 2\right) \rightarrow P'(2, -1, 1)$$

■ Simétrico respecto de la recta:

- Escribimos la recta en paramétricas:

$$\left\{ \begin{array}{l} x - y + 3 = 0 \rightarrow y = x + 3 \\ 4x - z = 0 \rightarrow z = 4x \end{array} \right\} \rightarrow r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 4\lambda \end{cases}$$

- Hallamos la ecuación del plano perpendicular a r que pasa por P :

$$1(x - 1) + 1(y - 2) + 4(z - 3) = 0$$

$$x + y + 4z - 15 = 0$$

- Obtenemos el punto de intersección de la recta r con el plano:

$$\lambda + 3 + \lambda + 16\lambda - 15 = 0$$

$$18\lambda - 12 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{2}{3}$$

El punto de corte es $\left(\frac{2}{3}, \frac{11}{3}, \frac{8}{3}\right)$. Este es el punto medio del segmento PP'' , siendo P'' el simétrico de P respecto de la recta r . Así, si $P''(a, b, c)$, entonces: $\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+2}{2}, \frac{c+3}{2}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{11}{3}, \frac{8}{3}\right) \rightarrow P''\left(\frac{1}{3}, \frac{16}{3}, \frac{7}{3}\right)$

36 S Halla la distancia entre el punto $P(2, 1, 3)$ y la recta $r: \begin{cases} 2x - y - z - 3 = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \end{cases}$

- Escribimos la recta r en forma paramétrica:

$$\left. \begin{array}{l} 2x - y = 3 + z \\ x - y = 2 - z \end{array} \right\} \text{Restando: } \begin{cases} x = 1 + 2z \\ y = x + z - 2 = -1 + 3z \end{cases} \rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

- Hallamos la ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a r :

$$2(x - 2) + 3(y - 1) + 1(z - 3) = 0$$

$$\pi: 2x + 3y + z - 10 = 0$$

- Obtenemos el punto de corte de r con π :

$$2(1 + 2\lambda) + 3(-1 + 3\lambda) + \lambda - 10 = 0$$

$$2 + 4\lambda - 3 + 9\lambda + \lambda - 10 = 0$$

$$14\lambda - 11 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{11}{14}$$

El punto de corte es $Q\left(\frac{18}{7}, \frac{19}{14}, \frac{11}{14}\right)$.

- Calculamos la distancia:

$$\text{dist}(P, r) = \text{dist}(P, Q) = |\vec{PQ}| = \left| \left(\frac{4}{7}, \frac{5}{14}, \frac{-31}{14} \right) \right| = \sqrt{\frac{1050}{196}} = \sqrt{\frac{75}{14}} \approx 2,31$$

37 Dados los puntos $A(1, 5, -2)$, $B(4, 0, 1)$ y $C(-3, 2, 0)$:

S

a) Prueba que son los vértices de un triángulo.

b) Halla la longitud del segmento que determina el punto B y su proyección sobre AC .

a) Hay que probar que los puntos no están alineados.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{AB}(3, -5, 3) \\ \vec{AC}(-4, -3, 2) \end{array} \right\} \text{Sus coordenadas no son proporcionales, luego los puntos no} \\ \text{están alineados. Son los vértices de un triángulo.}$$

b) • Obtenemos la ecuación del lado AC :

$$r: \begin{cases} x = -3 - 4\lambda \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

• Hallamos el plano que pasa por B y es perpendicular a r :

$$-4(x - 4) - 3(y - 0) + 2(z - 1) = 0$$

$$\pi: -4x - 3y + 2z + 14 = 0$$

• Obtenemos el punto de intersección de r con π :

$$-4(-3 - 4\lambda) - 3(2 - 3\lambda) + 4\lambda + 14 = 0$$

$$12 + 16\lambda - 6 + 9\lambda + 4\lambda + 14 = 0$$

$$29\lambda + 20 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{-20}{29}$$

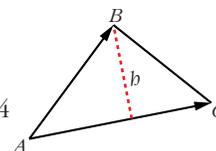
El punto (proyección de B sobre AC) es: $B' \left(\frac{-7}{29}, \frac{118}{29}, \frac{-40}{29} \right)$

• La longitud del segmento es la distancia entre B y B' :

$$|B'B| = \left| \left(\frac{123}{29}, \frac{-118}{29}, \frac{69}{29} \right) \right| = \sqrt{\frac{33814}{841}} = \sqrt{\frac{1166}{29}} \approx 6,34$$

De otra forma:

$$h = \frac{\text{Área}}{\text{Base}} = \frac{|\vec{AC} \times \vec{AB}|}{|\vec{AC}|} = \frac{|(1, 18, 29)|}{\sqrt{16 + 9 + 4}} = \sqrt{\frac{1166}{29}} \approx 6,34$$



Página 204

38 Determina la ecuación de un plano π paralelo al plano de la ecuación $x - 2y + 3z + 6 = 0$ y que dista 12 unidades del origen.

S

Un plano paralelo a $x - 2y + 3z + 6 = 0$ es de la forma $\pi: x - 2y + 3z + k = 0$. Tenemos que hallar k para que la distancia al origen sea de 12 unidades:

$$\text{dist} [(0, 0, 0), \pi] = \frac{|k|}{\sqrt{1 + 4 + 9}} = \frac{|k|}{\sqrt{14}} = 12 \begin{cases} k = 12\sqrt{14} \\ k = -12\sqrt{14} \end{cases}$$

Hay dos planos: $x - 2y + 3z + 12\sqrt{14} = 0$ y $x - 2y + 3z - 12\sqrt{14} = 0$

39
S

Un cuadrado tiene uno de sus lados sobre la recta $r: \begin{cases} 3x + 2y + 2z = 0 \\ x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$

y otro sobre $s: \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+5}{-2}$

a) Calcula el área del cuadrado.

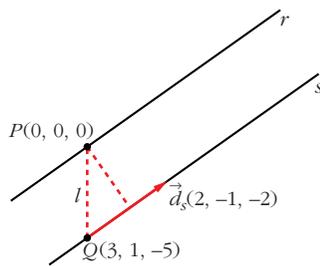
b) Encuentra cuatro puntos (dos en r y dos en s) que puedan ser los vértices de un cuadrado, si uno de ellos es $(0, 0, 0)$.

a) Escribimos la recta r en forma paramétrica:

$$(3, 2, 2) \times (1, -2, 2) = (8, -4, -8) // (2, -1, -2)$$

$$r: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = -2\lambda \end{cases} \rightarrow \vec{d}_r(2, -1, -2); P(0, 0, 0)$$

$\vec{d}_s(2, -1, -2)$; las dos rectas tienen la misma dirección; además $P(0, 0, 0) \in r$, pero $P(0, 0, 0) \notin s$. Las rectas son paralelas.



El lado del cuadrado es la distancia entre las dos rectas.

$$\begin{aligned} \text{dist}(r, s) = \text{dist}(P, s) &= \frac{\text{Área}}{\text{Base}} = \frac{|\vec{PQ} \times \vec{d}_s|}{|\vec{d}_s|} = \\ &= \frac{|(-7, -4, -5)|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{\sqrt{90}}{\sqrt{9}} = \sqrt{10} = \\ &= \text{lado del cuadrado} \end{aligned}$$

Por tanto: Área = $(\sqrt{10})^2 = 10 \text{ u}^2$

b) Obtenemos los vértices que pueden estar en r :

Un punto de r es $(2\lambda, -\lambda, -2\lambda)$:

$$\text{dist}(P, Q) = \sqrt{4\lambda^2 + \lambda^2 + 4\lambda^2} = \sqrt{10} \rightarrow$$

$$\rightarrow 9\lambda^2 = 10 \rightarrow \lambda = \pm \frac{\sqrt{10}}{3}$$

Hay dos posibles vértices:

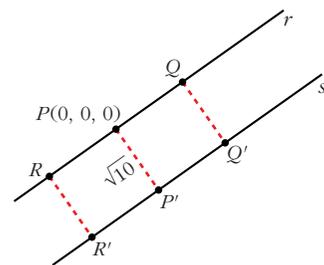
$$Q\left(\frac{2\sqrt{10}}{3}, \frac{-\sqrt{10}}{3}, \frac{-2\sqrt{10}}{3}\right); R\left(\frac{-2\sqrt{10}}{3}, \frac{\sqrt{10}}{3}, \frac{2\sqrt{10}}{3}\right)$$

• Obtenemos P' : Un punto de s es de la forma: $S(3 + 2\mu, 1 - \mu, -5 - 2\mu)$

$$\vec{PS} \cdot \vec{d}_s = 0 \rightarrow (3 + 2\mu, 1 - \mu, -5 - 2\mu) \cdot (2, -1, -2) = 0$$

$$6 + 4\mu - 1 + \mu + 10 + 4\mu = 0 \rightarrow 9\mu = -15 \rightarrow \mu = \frac{-5}{3}$$

$$P'\left(\frac{-1}{3}, \frac{8}{3}, \frac{-5}{3}\right)$$



- Si $Q'(x, y, z)$, como $\vec{PQ} = \vec{P'Q'}$, entonces:

$$\left(\frac{2\sqrt{10}}{3}, \frac{-\sqrt{10}}{3}, \frac{-2\sqrt{10}}{3}\right) = \left(x + \frac{1}{3}, y - \frac{8}{3}, z + \frac{5}{3}\right)$$

$$Q'\left(\frac{2\sqrt{10}-1}{3}, \frac{8-\sqrt{10}}{3}, \frac{-5-2\sqrt{10}}{3}\right)$$

- Si $R'(a, b, c)$, como $\vec{PR} = \vec{P'R'}$, entonces:

$$\left(\frac{-2\sqrt{10}}{3}, \frac{\sqrt{10}}{3}, \frac{2\sqrt{10}}{3}\right) = \left(a + \frac{1}{3}, b - \frac{8}{3}, c + \frac{5}{3}\right)$$

$$R'\left(\frac{-2\sqrt{10}-1}{3}, \frac{8+\sqrt{10}}{3}, \frac{-5+2\sqrt{10}}{3}\right)$$

Los dos cuadrados son $PQQ'P'$ y $PRR'P'$.

40 S Estudia la posición relativa de las rectas r y s y calcula el ángulo que forman:

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \quad s: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = 4 + 3\lambda \end{cases}$$

$$\vec{d}_r(2, 3, 4); P(1, 0, 0)$$

$$\vec{d}_s(1, 2, 3); P'(3, 3, 4)$$

$$\vec{PP'}(2, 3, 4) = \vec{d}_r$$

Las dos rectas se cortan en el punto $(3, 3, 4)$.

- Ángulo que forman:

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s|}{|\vec{d}_r| |\vec{d}_s|} = \frac{2 + 6 + 12}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{14}} = \frac{20}{\sqrt{406}} = 0,99 \rightarrow \alpha = 6^\circ 58' 57''$$

41 S Sea r_1 la recta que pasa por $A(2, 4, 0)$ y $B(6, 2, 0)$ y sea r_2 la recta que pasa por $C(0, 0, 7)$ y $D(3, 2, 0)$.

Obtén, de manera razonada, la distancia entre r_1 y r_2 .

- Escribimos las rectas en forma paramétrica:

$$r_1: \vec{AB}(4, -2, 0) // (2, -1, 0)$$

$$r_1: \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 4 - \lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

$$r_2: \vec{CD}(3, 2, -7)$$

$$r_2: \begin{cases} x = 3\mu \\ y = 2\mu \\ z = 7 - 7\mu \end{cases}$$

- Estudiamos la posición relativa de r_1 y r_2 :

$$\vec{AC}(-2, -4, 7)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -4 \\ 0 & -7 & 7 \end{vmatrix} = -21 \neq 0 \rightarrow \text{Las rectas se cruzan.}$$

- Hallamos la distancia entre r_1 y r_2 :

$$\begin{aligned} \text{dist}(r_1, r_2) &= \frac{\text{Volumen del paralelepípedo}}{\text{Área de la base}} = \frac{21}{|(2, -1, 0) \times (3, 2, -7)|} = \\ &= \frac{21}{|(7, 14, 7)|} = \frac{21}{\sqrt{294}} \approx 1,22 \end{aligned}$$

- 42** **S** **Halla la ecuación general del plano determinado por los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(-2, 0, -1)$, $C(1, -2, 0)$, y calcula el volumen del tetraedro que limita con los planos cartesianos.**

$$\left. \begin{array}{l} \vec{AB}(-3, -1, -2) \\ \vec{AC}(0, -3, -1) \end{array} \right\} \text{Son paralelos al plano.}$$

La ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 3 & 0 \\ y-1 & 1 & 3 \\ z-1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 5x + 3y - 9z + 1 = 0$$

- Vértices del tetraedro: $O(0, 0, 0)$

$$y = z = 0 \rightarrow 5x = -1 \rightarrow x = -\frac{1}{5} \rightarrow A\left(-\frac{1}{5}, 0, 0\right)$$

$$x = z = 0 \rightarrow 3y = -1 \rightarrow y = -\frac{1}{3} \rightarrow B\left(0, -\frac{1}{3}, 0\right)$$

$$x = y = 0 \rightarrow -9z = -1 \rightarrow z = \frac{1}{9} \rightarrow C\left(0, 0, \frac{1}{9}\right)$$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} \right) = \frac{1}{810} \text{ u}^3$$

43 **Calcula la distancia entre las siguientes rectas:**

S

$$r: \begin{cases} x - z = -2 \\ y - z = -4 \end{cases} \quad s: \begin{cases} x - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

- Escribimos las rectas en forma paramétrica:

$$r: \begin{cases} x - z = -2 \rightarrow x = -2 + z \\ y - z = -4 \rightarrow y = -4 + z \end{cases} \quad r: \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = -4 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x - z = 0 \rightarrow x = z \\ y + z = 0 \rightarrow y = -z \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

- Estudiamos la posición relativa de las dos rectas:

$$\vec{d}_r(1, 1, 1); P(-2, -4, 0)$$

$$\vec{d}_s(1, -1, 1); P'(0, 0, 0)$$

$$\vec{PP'}(2, 4, 0)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \rightarrow \text{Las rectas se cruzan.}$$

- Hallamos la distancia entre las rectas:

$$\begin{aligned} \text{dist}(r, s) &= \frac{\text{Volumen del paralelepípedo}}{\text{Área de la base}} = \frac{4}{|(1, 1, 1) \times (1, -1, 1)|} = \\ &= \frac{4}{|(2, 0, -2)|} = \frac{4}{\sqrt{4+4}} = \frac{4}{\sqrt{8}} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \approx 1,41 \end{aligned}$$

44 **Sean los puntos $P(5, 1, 3)$ y $Q(3, 7, -1)$. Por el punto medio del segmento PQ trazamos un plano π perpendicular a dicho segmento.**

S

Este plano corta a los ejes coordenados en los puntos A, B y C :

a) Escribe la ecuación del plano π .

b) Calcula el volumen del tetraedro de vértices O, A, B y C (O es el origen de \mathbb{R}^3).

a) El plano es perpendicular a $\vec{PQ}(-2, 6, -4) // (1, -3, 2)$. Pasa por el punto medio del segmento PQ : $M = (4, 4, 1)$.

$$\text{La ecuación del plano es: } 1(x - 4) - 3(y - 4) + 2(z - 1) = 0$$

$$\pi: x - 3y + 2z + 6 = 0$$

b) Hallamos los vértices del tetraedro:

$$y = z = 0 \rightarrow x + 6 = 0 \rightarrow x = -6 \rightarrow A(-6, 0, 0)$$

$$x = z = 0 \rightarrow -3y + 6 = 0 \rightarrow y = 2 \rightarrow B(0, 2, 0)$$

$$x = y = 0 \rightarrow -2z + 6 = 0 \rightarrow z = -3 \rightarrow C(0, 0, -3)$$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{6} (6 \cdot 2 \cdot 3) = 6 \text{ u}^3$$

45 **Halla el punto del plano de ecuación $x - z = 3$ que está más cerca del punto $P(3, 1, 4)$, así como la distancia entre el punto P y el plano dado.**

• Hallamos la ecuación de la recta perpendicular al plano que pasa por $P(3, 1, 4)$:

$$r: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 1 \\ z = 4 - \lambda \end{cases}$$

• El punto que buscamos es el punto de corte de r y el plano:

$$(3 + \lambda) - (4 - \lambda) = 3$$

$$3 + \lambda - 4 + \lambda = 3 \rightarrow 2\lambda = 4 \rightarrow \lambda = 2$$

El punto es $P'(5, 1, 2)$

• La distancia entre P y el plano es igual a la distancia entre P y P' :

$$\text{dist}(P, P') = |\overrightarrow{PP'}| = |(2, 0, -2)| = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} \approx 2,83$$

46 **Se consideran los puntos $P(2, 1, -1)$, $Q(1, 4, 1)$ y $R(1, 3, 1)$:**

S

a) Comprueba que no están alineados y halla el área del triángulo que determinan.

b) Si desde el punto $V(1, 1, -1)$ se trazan rectas a cada uno de los puntos P , Q y R , se obtiene una pirámide. Halla la altura de dicha pirámide y su volumen.

a) $\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{PQ}(-1, 3, 2) \\ \overrightarrow{PR}(-1, 2, 2) \end{array} \right\}$ No tiene las coordenadas proporcionales; luego los puntos no están alineados.

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (2, 0, 1) \rightarrow |\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

$$\text{Área} = \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1,12 \text{ u}^2$$

b) La altura es la distancia de V al plano determinado por P , Q y R .

Un vector normal al plano es $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (2, 0, 1)$. La ecuación del plano es:

$$2(x - 2) + 1(z + 1) = 0$$

$$\pi: 2x + z - 3 = 0$$

$$\text{Altura} = \text{dist}(V, \pi) = \frac{|2 - 1 - 3|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{3} [\text{Área base} \times \text{altura}] = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = 1 \text{ u}^3$$

- 47** **S** **Halla el volumen de un paralelepípedo de bases $ABCD$ y $EFGH$ sabiendo que $A(1, 0, 0)$, $B(2, 3, 0)$, $C(4, 0, 5)$ y $E(7, 6, 3)$.**

Halla las coordenadas de los restantes vértices del paralelepípedo.

Hallamos las coordenadas de los restantes vértices:

- Vértice $D(d_1, d_2, d_3)$:

$$\vec{BA} = \vec{CD} \rightarrow (-1, -3, 0) = (d_1 - 4, d_2, d_3 - 5)$$

$$D(3, -3, 5)$$

- Vértice $F(f_1, f_2, f_3)$:

$$\vec{AE} = \vec{BF} \rightarrow (6, 6, 3) = (f_1 - 2, f_2 - 3, f_3)$$

$$F(8, 9, 3)$$

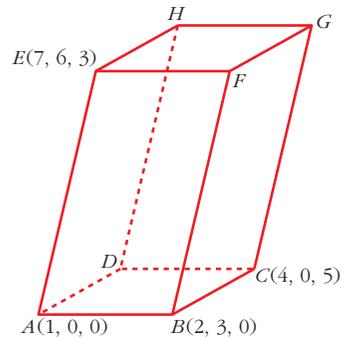
- Vértice $G(g_1, g_2, g_3)$ y vértice $H(h_1, h_2, h_3)$:

$$\vec{AE} = \vec{CG} \rightarrow (6, 6, 3) = (g_1 - 4, g_2, g_3 - 5) \rightarrow G(10, 6, 8)$$

$$\vec{AE} = \vec{DH} \rightarrow (6, 6, 3) = (h_1 - 3, h_2 + 3, h_3 - 5) \rightarrow H(9, 3, 8)$$

$$\vec{AB}(1, 3, 0) \quad \vec{AD}(2, -3, 5), \quad \vec{AE}(6, 6, 3)$$

$$[\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE}] = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 5 \\ 6 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 33 \rightarrow \text{Volumen} = 33 \text{ u}^3$$



- 48** **S** **Dadas las rectas:**

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1} \quad s: \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3x - y - z = -4 \end{cases}$$

determina la posición relativa de ambas rectas y el área de uno de los cuadrados, dos de cuyos lados están sobre r y s .

- Escribimos la recta s en forma paramétrica:

$$\left. \begin{array}{l} -y + z = 2 - x \\ -y - z = -4 - 3x \end{array} \right\} \text{Sumando: } -2y = -2 - 4x \rightarrow y = 1 + 2x$$

$$z = 2 - x + y = 3 + x$$

$$s: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

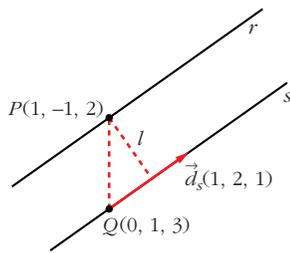
- Estudiamos la posición relativa de las dos rectas:

$$\vec{d}_r(1, 2, 1); P(1, -1, 2)$$

$$\vec{d}_s(1, 2, 1); Q(0, 1, 3)$$

Las rectas tienen la misma dirección; $P \in r$, pero $P \notin s$; luego las rectas r y s son paralelas.

- El lado del cuadrado es igual a la distancia entre las rectas r y s .



$$\vec{QP}(1, -2, -1)$$

$$\vec{QP} \times \vec{d}_s = (1, -2, -1) \times (1, 2, 1) = (0, -2, 4)$$

$$\text{dist}(r, s) = \text{dist}(P, s) = \frac{|\vec{QP} \times \vec{d}_s|}{|\vec{d}_s|} = \frac{|(0, -2, 4)|}{|(1, 2, 1)|} =$$

$$= \frac{\sqrt{4 + 16}}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \sqrt{\frac{20}{6}} = \sqrt{\frac{10}{3}}$$

- El área del cuadrado es:

$$\text{Área} = \left(\sqrt{\frac{10}{3}} \right)^2 = \frac{10}{3} \text{ u}^2$$

49 Dadas las rectas r y s :

S

$$r: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1} \quad s: \begin{cases} x = \mu \\ y = -\mu \\ z = -\mu \end{cases}$$

Halla los puntos que dan la mínima distancia y determina la ecuación de la perpendicular común a r y s .

Un punto genérico de r es $R(3 + 2\lambda, \lambda, 1 + \lambda)$

Un punto genérico de s es $S(\mu, -\mu, -\mu)$

Un vector genérico de origen en r y extremo en s es:

$$\vec{RS}(-3 - 2\lambda + \mu, -\lambda - \mu, -1 - \lambda - \mu)$$

Este vector debe ser perpendicular a r y a s :

$$\begin{cases} \vec{RS} \cdot (2, 1, 1) = 0 \rightarrow -6\lambda - 7 = 0 \rightarrow \lambda = -\frac{7}{6} \\ \vec{RS} \cdot (1, -1, -1) = 0 \rightarrow -2 + 3\mu = 0 \rightarrow \mu = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Los puntos que dan la mínima distancia son:

$$R\left(\frac{2}{3}, -\frac{7}{6}, -\frac{1}{6}\right) \text{ y } S\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

La perpendicular común es la recta que pasa por R y S :

$$\overrightarrow{RS}\left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \rightarrow \vec{d}(0, 1, -1)$$

La recta es:

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{7}{6} + \lambda \\ z = -\frac{1}{6} - \lambda \end{cases}$$

50 S Halla la ecuación de la proyección ortogonal r' de la recta

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2} \text{ sobre el plano } \alpha: x-3y+2z+12=0.$$

La proyección ortogonal de r sobre α es la recta intersección del plano α con otro plano π , perpendicular a α y que contiene a r .

$$P(1, 1, 2); \vec{d}_r(2, 1, 2); \vec{n}(1, -3, 2)$$

$$\vec{d}_r \times \vec{n} = (2, 1, 2) \times (1, -3, 2) = (8, -2, -7)$$

La ecuación de π es: $8(x-1) - 2(y-1) - 7(z-2) = 0$

$$\pi: 8x - 2y - 7z + 8 = 0$$

La proyección ortogonal de r sobre α es:

$$r': \begin{cases} x - 3y + 2z + 12 = 0 \\ 8x - 2y - 7z + 8 = 0 \end{cases}$$

Página 205

51 S Los puntos $P(0, 1, 0)$ y $Q(-1, 1, 1)$ son dos vértices de un triángulo, y el tercero, S , pertenece a la recta $r: \begin{cases} x = 4 \\ z = 1 \end{cases}$. La recta que contiene a P y a S es perpendicular a la recta r .

a) Determina las coordenadas de S .

b) Calcula el área del triángulo PQS .

$$a) \overrightarrow{PS} \perp \vec{d}_r \rightarrow \overrightarrow{PS} \cdot \vec{d}_r = 0$$

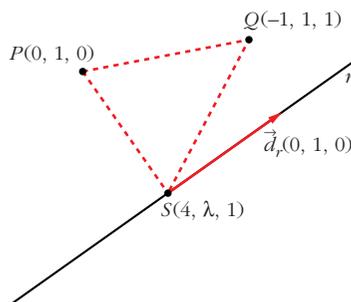
$$(4, \lambda - 1, 1) \cdot (0, 1, 0) = \lambda - 1 = 0 \rightarrow \lambda = 1$$

$$S(4, 1, 1)$$

$$b) \overrightarrow{PS}(4, 0, 1) \quad \overrightarrow{PQ}(-1, 0, 1)$$

$$\overrightarrow{PS} \times \overrightarrow{PQ} = (4, 0, 1) \times (-1, 0, 1) = (0, -5, 0)$$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{PS} \times \overrightarrow{PQ}|}{2} = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ u}^2$$



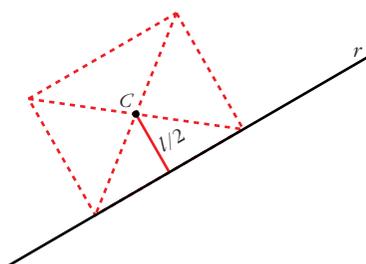
- 52** Considera un cuadrado cuyo centro es el punto $C(1, 1, -1)$ y tiene uno de sus lados en la recta:

$$r: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{0}$$

a) Halla la ecuación del plano en el que se encuentra el cuadrado.

b) Calcula la longitud del lado del cuadrado.

a) Es el plano, π , que contiene a C y a r : $\vec{d}_r(1, 1, 0)$; $P(2, 1, 1) \in r$.



$$C(1, 1, -1)$$

$$\vec{PC}(-1, 0, -2) // \pi$$

Un vector normal al plano es:

$$\vec{n} = (1, 1, 0) \times (1, 0, 2) = (2, -2, -1)$$

La ecuación del plano es:

$$2(x-1) - 2(y-1) - 1(z+1) = 0$$

$$2x - 2y - z - 1 = 0$$

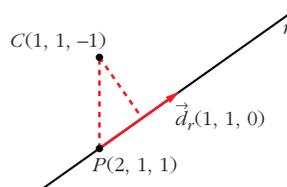
b) La distancia de C a r es la mitad del lado del cuadrado.

$$\vec{d}_r \times \vec{PC} = (1, 1, 0) \times (-1, 0, -2) = (-2, 2, 1)$$

$$|\vec{d}_r| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\text{dist}(C, r) = \frac{|\vec{d}_r \times \vec{PC}|}{|\vec{d}_r|} = \frac{\sqrt{4+4+1}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

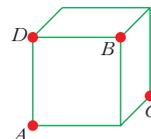
$$\frac{l}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \rightarrow \text{lado del cuadrado} = l = 3\sqrt{2} \approx 4,24$$



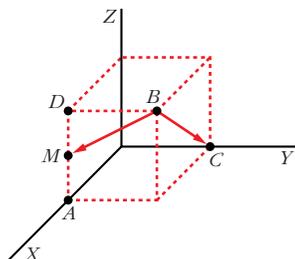
- 53** En la figura adjunta, calcula el ángulo que forma la recta BC con la recta que une B con el punto medio del lado AD .

S

Vamos a considerar el cubo de lado 1 con un vértice en el origen:



Así: $A(1, 0, 0)$ $B(1, 1, 1)$ $C(0, 1, 0)$ $D(1, 0, 1)$ $M\left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$



$$\vec{BC}(-1, 0, -1); \vec{BM}\left(0, -1, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{BC} \cdot \vec{BM}|}{|\vec{BC}| |\vec{BM}|} = \frac{1/2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5/4}} =$$

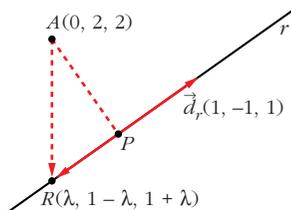
$$= \frac{1}{\sqrt{10}} \approx 0,316 \rightarrow \alpha = 71^\circ 33' 54''$$

54 **S** Sea la recta $r: \begin{cases} 3x + 2y - z - 1 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$

- a) Determina la ecuación de la recta s que corta perpendicularmente a r y pasa por $(0, 2, 2)$, y las coordenadas del punto P intersección de r y s .
- b) Halla la ecuación del plano π que contiene a r y s y la de la recta t perpendicular a π por el punto P .
- c) Si Q es cualquier punto de t , explica, sin hacer ningún cálculo, qué relación hay entre las distancias de Q a r , a s y a π .

a) Escribimos r en forma paramétrica:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y - z - 1 = 0 \rightarrow z = 3x + 2y - 1 = 1 + x \\ x + y - 1 = 0 \rightarrow y = 1 - x \end{array} \right\} r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$



Un punto genérico de r es $R(\lambda, 1 - \lambda, 1 + \lambda)$.

\vec{AR} ha de ser perpendicular a r ; es decir: $\vec{AR} \cdot \vec{d}_r = 0$

$$(\lambda, -1 - \lambda, -1 + \lambda) \cdot (1, -1, 1) = 0$$

$$\lambda + 1 + \lambda - 1 + \lambda = 0 \rightarrow 3\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 0$$

$$R(0, 1, 1)$$

La recta s pasa por $A(0, 2, 2)$ y por $R(0, 1, 1)$.

$$\vec{RA}(0, 1, 1) \rightarrow s: \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

El punto de intersección de r y s es $P(0, 1, 1)$.

b) Ecuación del plano π que contiene a r y a s :

$$\vec{n} = (1, -1, 1) \times (0, 1, 1) = (-2, -1, 1); P(0, 1, 1) \in \pi$$

$$-2(x - 0) - 1(y - 1) + 1(z - 1) = 0$$

$$\pi: -2x - y + z = 0$$

Ecuación de la recta t perpendicular a π por el punto P :

$$t: \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

c) Si $Q \in t \rightarrow \text{dist}(Q, r) = \text{dist}(Q, s) = \text{dist}(Q, \pi) = \text{dist}(Q, P)$

Las tres distancias coinciden con la distancia de Q al punto P , luego las tres son iguales entre sí.

55 a) Halla la distancia del punto $P(1, -1, 3)$ a la recta que pasa por los puntos $Q(1, 2, 1)$ y $R(1, 0, -1)$.

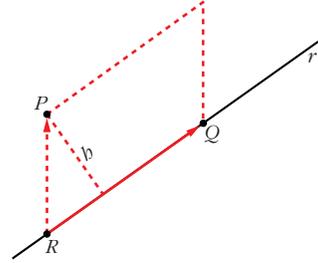
b) Encuentra todos los puntos S del plano determinado por P, Q y R de manera que el cuadrilátero de vértices P, Q, R y S sea un paralelogramo.

a) Si r es la recta que pasa por R y por Q ; entonces:

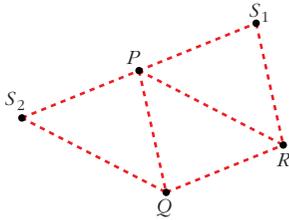
$$\text{dist}(P, r) = \frac{\text{Área}}{\text{Base}} = \frac{|\vec{RP} \times \vec{RQ}|}{|\vec{RQ}|}$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{RP}(0, -1, 4) \\ \vec{RQ}(0, 2, 2) \end{array} \right\} \vec{RP} \times \vec{RQ} = (-10, 0, 0)$$

$$\text{dist}(P, r) = \frac{|(-10, 0, 0)|}{|(0, 2, 2)|} = \frac{10}{\sqrt{4+4}} = \frac{10}{\sqrt{8}} = \frac{10}{2\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \approx 3,54 \text{ u}$$



b) Hay dos posibilidades: que P y Q sean vértices consecutivos, o que lo sean P y R .



• Si P y Q son consecutivos, obtenemos $S_1(x, y, z)$:

$$\vec{QP} = \vec{RS}_1 \rightarrow (0, -3, 2) = (x-1, y, z+1)$$

$$S_1(1, -3, 1)$$

• Si P y R son consecutivos, obtenemos $S_2(a, b, c)$:

$$\vec{RP} = \vec{QS}_2 \rightarrow (0, -1, 4) = (a-1, b-2, c-1)$$

$$S_2(1, 1, 5)$$

56 S **Halla el plano de la familia: $mx + y + z - (m + 1) = 0$ que está situado a distancia 1 del origen.**

Hallamos la distancia del origen, $(0, 0, 0)$, al plano y la igualamos a 1:

$$\text{dist} = \frac{|m \cdot 0 + 0 + 0 - (m + 1)|}{\sqrt{m^2 + 1 + 1}} = \frac{|m + 1|}{\sqrt{m^2 + 2}} = 1$$

$$|m + 1| = \sqrt{m^2 + 2} \rightarrow (m + 1)^2 = m^2 + 2 \rightarrow m^2 + 1 + 2m = m^2 + 2$$

$$2m = 1 \rightarrow m = \frac{1}{2}$$

El plano es: $\frac{1}{2}x + y + z - \frac{3}{2} = 0$; es decir: $x + 2y + 2z - 3 = 0$

57 S **Halla el lugar geométrico de los puntos $P(x, y, z)$ que equidistan de los puntos $A(1, -1, 0)$ y $B(2, 3, -4)$. Comprueba que obtienes un plano perpendicular a \vec{AB} y que pasa por el punto medio de AB .**

Si $P(x, y, z)$ es un punto del lugar geométrico: $dist(P, A) = dist(P, B) \rightarrow$

$$\rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+4)^2}$$

$$\cancel{x^2} - 2x + 1 + \cancel{y^2} + 2y + 1 + \cancel{z^2} = \cancel{x^2} - 4x + 4 + \cancel{y^2} - 6y + 9 + \cancel{z^2} + 8z + 16$$

$$\pi: 2x + 8y - 8z - 27 = 0 \rightarrow \text{Ecuación de un plano.}$$

- Veamos que π es perpendicular a \overrightarrow{AB} :

$$\overrightarrow{AB} = (1, 4, -4)$$

$$\text{Vector normal al plano} \rightarrow \vec{n}(2, 8, -8) // \overrightarrow{AB}$$

$$\text{Luego } \overrightarrow{AB} \perp \pi.$$

- Comprobamos que π pasa por el punto medio de AB :

$$M = \left(\frac{1+2}{2}, \frac{-1+3}{2}, \frac{0-4}{2} \right) = \left(\frac{3}{2}, 1, -2 \right)$$

$$2 \cdot \left(\frac{3}{2} \right) + 8 \cdot 1 - 8 \cdot (-2) - 27 = 0 \rightarrow M \in \pi$$

- El plano π es el *plano mediador del segmento* AB .

58 **Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los planos siguientes:**

$$\alpha: 3x + y - 2z + 1 = 0$$

$$\beta: x - 3y + 2z - 3 = 0$$

☞ *Hay dos soluciones. Son los planos bisectores del diedro que determinan α y β .*

Si $P(x, y, z)$ es un punto del lugar geométrico:

$$dist(P, \alpha) = dist(P, \beta) \rightarrow \frac{|3x + y - 2z + 1|}{\sqrt{9 + 1 + 4}} = \frac{|x - 3y + 2z - 3|}{\sqrt{1 + 9 + 4}}$$

$$|3x + y - 2z + 1| = |x - 3y + 2z - 3|$$

$$\begin{cases} 3x + y - 2z + 1 = x - 3y + 2z - 3 \rightarrow 2x + 4y - 4z + 4 = 0 \rightarrow x + 2y - 2z + 2 = 0 \\ 3x + y - 2z + 1 = -x + 3y - 2z + 3 \rightarrow 4x - 2y - 2 = 0 \rightarrow 2x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

Son los *planos bisectores del diedro que determinan α y β .*

59 **Halla las ecuaciones del lugar geométrico de todos los puntos del plano $x = y$ que distan 1 del plano $2x - y + 2z = 2$.**

Si P es un punto del plano $x = y$, entonces es de la forma $P(x, x, z)$. La distancia de P al plano dado ha de ser igual a 1, es decir:

$$\frac{|2x - x + 2z - 2|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{|x + 2z - 2|}{3} = 1$$

$$|x + 2z - 2| = 3 \begin{cases} x + 2z - 2 = 3 \rightarrow x + 2z - 5 = 0 \\ x + 2z - 2 = -3 \rightarrow x + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

Son dos rectas: $r: \begin{cases} x + 2z - 5 = 0 \\ x = y \end{cases}$ $s: \begin{cases} x + 2z + 1 = 0 \\ x = y \end{cases}$

60 a) **Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los planos de ecuaciones $3x - 4y + 5 = 0$ y $2x - 2y + z + 9 = 0$.**

b) ¿Qué puntos del eje OY equidistan de ambos planos?

a) Si $P(x, y, z)$ es uno de los puntos del lugar geométrico, entonces:

$$\frac{|3x - 4y + 5|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|2x - 2y + z + 9|}{\sqrt{4 + 4 + 1}}$$

$$\frac{|3x - 4y + 5|}{5} = \frac{|2x - 2y + z + 9|}{3}$$

$$3|3x - 4y + 5| = 5|2x - 2y + z + 9|$$

$$\begin{cases} 9x - 12y + 15 = 10x - 10y + 5z + 45 \rightarrow x + 2y + 5z + 30 = 0 \\ 9x - 12y + 15 = -10x + 10y - 5z - 45 \rightarrow 19x - 22y + 5z + 60 = 0 \end{cases}$$

Son los planos bisectores del diedro que determinan los dos planos dados.

b) Un punto del eje OY es de la forma $Q(0, y, 0)$. La distancia de Q a cada uno de los planos ha de ser la misma, es decir:

$$\frac{|-4y + 5|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|-2y + 9|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} \rightarrow \frac{|-4y + 5|}{5} = \frac{|-2y + 9|}{3}$$

$$3|-4y + 5| = 5|-2y + 9|$$

$$\begin{cases} -12y + 15 = -10y + 45 \rightarrow -2y = 30 \rightarrow y = -15 \\ -12y + 15 = 10y - 45 \rightarrow -22y = -60 \rightarrow y = \frac{30}{11} \end{cases}$$

Hay dos puntos: $Q_1(0, -15, 0)$ y $Q_2\left(0, \frac{30}{11}, 0\right)$

61 **Calcula el conjunto de puntos de \mathbb{R}^3 que están a igual distancia de $P(-1, 2, 5)$ y $Q(-3, 4, 1)$. ¿A qué distancia se encuentra el punto P de dicho conjunto?**

Si $A(x, y, z)$ es un punto del conjunto, su distancia a P y a Q ha de ser la misma, es decir: $\text{dist}(A, P) = \text{dist}(A, Q) \rightarrow$

$$\begin{aligned} \rightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2} &= \sqrt{(x+3)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2} \\ \cancel{x^2} + 2x + 1 + \cancel{y^2} - 4y + 4 + \cancel{z^2} - 10z + 25 &= \\ = \cancel{x^2} + 6x + 9 + \cancel{y^2} - 8y + 16 + \cancel{z^2} - 2z + 1 &\rightarrow -4x + 4y - 8z + 4 = 0 \rightarrow \\ \rightarrow \pi: x - y + 2z - 1 = 0 \end{aligned}$$

Es el *plano mediador* del segmento que une P y Q .

La distancia de P a dicho plano será igual a la mitad de la distancia entre P y Q :

$$\begin{aligned} \text{dist}(P, Q) &= |\overrightarrow{PQ}| = |(-2, 2, -4)| = \sqrt{4 + 4 + 16} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \rightarrow \\ \rightarrow \text{dist}(P, \pi) &= \frac{2\sqrt{6}}{2} = \sqrt{6} \approx 2,45 \end{aligned}$$

62 Halla la ecuación de la esfera que pasa por: $A(1, 1, 1)$, $B(1, 2, 1)$, $C(1, 1, 2)$, $D(2, 1, 1)$.

La ecuación es de la forma $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$.

Sustituimos cada uno de los cuatro puntos en la ecuación:

$$\left. \begin{aligned} 1 + 1 + 1 + a + b + c + d = 0 &\rightarrow a + b + c + d = -3 \\ 1 + 4 + 1 + a + 2b + c + d = 0 &\rightarrow a + 2b + c + d = -6 \\ 1 + 1 + 4 + a + b + 2c + d = 0 &\rightarrow a + b + 2c + d = -6 \\ 4 + 1 + 1 + 2a + b + c + d = 0 &\rightarrow 2a + b + c + d = -6 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} a &= -3 \\ b &= -3 \\ c &= -3 \\ d &= 6 \end{aligned}$$

La ecuación es: $x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 3y - 3z + 6 = 0$

63 a) Halla la ecuación del plano tangente a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ en el punto $P(1, 2, 1)$.

b) ¿Cuál es el punto diametralmente opuesto a P en la esfera dada?

a) El punto P es un punto de la esfera.

El centro de la esfera es $C(1, 2, 0)$.

El plano que buscamos pasa por P y es perpendicular al vector $\overrightarrow{CP}(0, 0, 1)$. Su ecuación es: $0 \cdot (x-1) + 0 \cdot (y-2) + 1 \cdot (z-1) = 0$, es decir: $z-1=0$

b) Es el simétrico de P respecto del centro de la esfera. Si llamamos $P'(x, y, z)$ al punto que buscamos, C es el punto medio del segmento PP' , es decir:

$$\left(\frac{1+x}{2}, \frac{2+y}{2}, \frac{1+z}{2} \right) = (1, 2, 0) \rightarrow P'(1, 2, -1)$$

- 64** Halla la ecuación de la esfera tangente a los planos $x - 2z - 8 = 0$ y $2x - z + 5 = 0$ y que tiene su centro en la recta:

$$r: \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$$

El centro de la esfera es de la forma $C(-2, 0, z)$ (pues pertenece a la recta r).

La distancia del centro a cada uno de los planos es la misma. Además, esta distancia es el radio de la esfera:

$$\frac{|-2 - 2z - 8|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{|-4 - z + 5|}{\sqrt{4 + 1}} \rightarrow \frac{|-2z - 10|}{\sqrt{5}} = \frac{|-z + 1|}{\sqrt{5}}$$

$$|-2z - 10| = |-z + 1|$$

$$\begin{cases} -2z - 10 = -z + 1 \rightarrow z = -11 \rightarrow C_1(-2, 0, -11) \\ -2z - 10 = z - 1 \rightarrow -3z = 9 \rightarrow z = -3 \rightarrow C_2(-2, 0, -3) \end{cases}$$

Hay dos soluciones:

$$1^{\text{a}}) C_1(-2, 0, -11) \rightarrow \text{Radio} = \frac{12}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Ecuación: } (x + 2)^2 + y^2 + (z + 11)^2 = \frac{144}{5}$$

$$2^{\text{a}}) C_2(-2, 0, -3) \rightarrow \text{Radio} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Ecuación: } (x + 2)^2 + y^2 + (z + 3)^2 = \frac{16}{5}$$

Página 206

- 65** La esfera $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 25$ corta al plano $2x - 2y + z - 2 = 0$ en una circunferencia. Halla su centro y su radio.

- Obtengamos el centro de la circunferencia:

— El centro de la esfera es $P(3, -2, 1)$.

— La recta que pasa por P y es perpendicular al plano es:

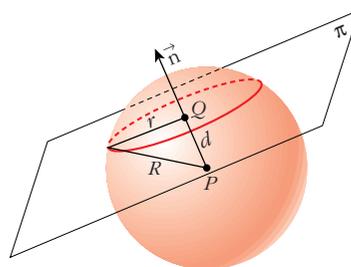
$$\begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -2 - 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

— El punto de corte de esta recta con el plano dado es el centro de la circunferencia:

$$2(3 + 2\lambda) - 2(-2 - 2\lambda) + (1 + \lambda) - 2 = 0$$

$$6 + 4\lambda + 4 + 4\lambda + 1 + \lambda - 2 = 0 \rightarrow 9\lambda + 9 = 0 \rightarrow \lambda = -1$$

$$Q(1, 0, 0)$$



- Calculamos el radio de la circunferencia:

La distancia entre los centros P y Q es:

$$d = |\overrightarrow{QP}| = |(2, -2, 1)| = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$$

El radio de la esfera es $R = 5$.

Luego el radio de la circunferencia es: $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$

- 66 a) Halla la ecuación de la esfera que pasa por los puntos $A(4, 1, -3)$ y $B(3, 2, 1)$ y que tiene su centro en la recta:**

$$\frac{x-8}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+4}{-1}$$

- b) ¿Cuál es la ecuación del plano tangente en B a dicha esfera?**

a) Escribimos la recta en paramétricas:

$$\begin{cases} x = 8 + 2\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -4 - \lambda \end{cases}$$

Como el centro pertenece a esta recta, es de la forma $C(8 + 2\lambda, 3 + \lambda, -4 - \lambda)$

La distancia de C a los puntos A y B ha de ser la misma. Además, esta distancia es el radio de la esfera:

$$\begin{aligned} \text{dist}(A, C) &= \text{dist}(B, C) \rightarrow |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| \\ |(2\lambda + 4, \lambda + 2, -\lambda - 1)| &= |(2\lambda + 5, \lambda + 1, -\lambda - 5)| \\ \sqrt{(2\lambda + 4)^2 + (\lambda + 2)^2 + (-\lambda - 1)^2} &= \sqrt{(2\lambda + 5)^2 + (\lambda + 1)^2 + (-\lambda - 5)^2} \\ 4\lambda^2 + 16 + 16\lambda + \lambda^2 + 4 + 4\lambda + \lambda^2 + 1 + 2\lambda &= \\ = 4\lambda^2 + 25 + 20\lambda + \lambda^2 + 1 + 2\lambda + \lambda^2 + 25 + 10\lambda &= \\ -10\lambda = 30 \rightarrow \lambda = -3 \rightarrow C(2, 0, -1) &= \\ |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| = 3 = \text{radio de la esfera.} &= \end{aligned}$$

La ecuación es: $(x - 2)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 9$, o bien:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z - 4 = 0$$

b) Un vector normal al plano es $\overrightarrow{CB} = (1, 2, 2)$.

El plano pasa por $B(3, 2, 1)$. Su ecuación es:

$$1 \cdot (x - 3) + 2 \cdot (y - 2) + 2 \cdot (z - 1) = 0$$

$$x - 3 + 2y - 4 + 2z - 2 = 0$$

$$x + 2y + 2z - 9 = 0$$

- 67 Halla el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a $A(-2, 3, 4)$ sea el doble de la distancia a $B(3, -1, -2)$.**

Si $P(x, y, z)$ es un punto del lugar geométrico, debe cumplir:

$$\text{dist}(P, A) = 2\text{dist}(P, B)$$

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2} = 2\sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2}$$

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 + z^2 - 8z + 16 = 2[x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1 + z^2 + 4z + 4]$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y - 8z + 29 = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 12x + 4y + 8z + 28$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 16x + 10y + 16z - 1 = 0$$

Es una esfera de centro $(8, -5, -8)$ y radio $\sqrt{154} \approx 12,4$.

68 Dados $A(4, 2, 0)$ y $B(2, 6, -4)$, halla el lugar geométrico de los puntos P tales que \overline{PA} sea perpendicular a \overline{PB} .

Si $P(x, y, z)$ es un punto del lugar geométrico:

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AP}(x-4, y-2, z) \\ \overrightarrow{BP}(x-2, y-6, z+4) \end{array} \right\} \text{ han de ser perpendiculares, es decir:}$$

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0 \rightarrow (x-4)(x-2) + (y-2)(y-6) + z(z+4) = 0$$

$$x^2 - 6x + 8 + y^2 - 8y + 12 + z^2 + 4z = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y + 4z + 20 = 0$$

Es una esfera de centro $(3, 4, -2)$ y radio 3.

69 Halla el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a $(2, 0, 0)$ y $(-2, 0, 0)$ sea igual a 6.

Si $P(x, y, z)$ es un punto del lugar geométrico:

$$\sqrt{(x-2)^2 + y^2 + z^2} + \sqrt{(x+2)^2 + y^2 + z^2} = 6$$

$$\sqrt{(x-2)^2 + y^2 + z^2} = 6 - \sqrt{(x+2)^2 + y^2 + z^2}$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + z^2 = 36 + x^2 + 4x + 4 + y^2 + z^2 - 12\sqrt{(x+2)^2 + y^2 + z^2}$$

$$12\sqrt{(x+2)^2 + y^2 + z^2} = 8x + 36$$

$$3\sqrt{(x+2)^2 + y^2 + z^2} = 2x + 9$$

$$9[x^2 + 4x + 4 + y^2 + z^2] = 4x^2 + 36x + 81$$

$$9x^2 + 36x + 36 + 9y^2 + 9z^2 = 4x^2 + 36x + 81$$

$$5x^2 + 9y^2 + 9z^2 = 45$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{5} = 1$$

Es un *elipsoide*.

- 70** Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de $(0, 0, 3)$ y del plano $z = -3$.

Sea $P(x, y, z)$ un punto del lugar geométrico pedido. Entonces:

$$d = (P, (0, 0, 3)) = d(P, \{z = -3\})$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + (z - 3)^2} = \frac{|z + 3|}{\sqrt{1}} = |z + 3|$$

Por tanto:

$$x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = (z + 3)^2$$

$$x^2 + y^2 + \cancel{z^2} - 6z + \cancel{9} = \cancel{z^2} + 6z + \cancel{9}$$

$$x^2 + y^2 - 12z = 0$$

Se trata de un paraboloides.

- 71** Halla el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a $(0, 5, 0)$ y $(0, -5, 0)$ es 4.

Si $P(x, y, z)$ es un punto del lugar geométrico:

$$|\sqrt{x^2 + (y - 5)^2 + z^2} - \sqrt{x^2 + (y + 5)^2 + z^2}| = 4$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 10y + 25 + z^2} - \sqrt{x^2 + y^2 + 10y + 25 + z^2} = \pm 4$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 10y + 25 + z^2} = \pm 4 + \sqrt{x^2 + y^2 + 10y + 25 + z^2}$$

$$x^2 + y^2 - 10y + 25 + z^2 = 16 + x^2 + y^2 + 10y + 25 + z^2 \pm 8\sqrt{x^2 + y^2 + 10y + 25 + z^2}$$

$$\pm 8\sqrt{x^2 + y^2 + 10y + 25 + z^2} = 20y + 16$$

$$\pm 2\sqrt{x^2 + y^2 + 10y + 25 + z^2} = 5y + 4$$

$$4(x^2 + y^2 + 10y + 25 + z^2) = 25y^2 + 40y + 16$$

$$4x^2 + 4y^2 + 40y + 100 + 4z^2 = 25y^2 + 40y + 16$$

$$4x^2 - 21y^2 + 4z^2 = -84$$

$$-\frac{x^2}{21} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{21} = 1$$

Es un hiperboloides.

- 72** ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a los puntos $(2, 3, 4)$ y $(2, -3, 4)$ es igual a 8? ¿Cómo se llama la superficie que obtienes?

$$\sqrt{(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 4)^2} + \sqrt{(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 4)^2} = 8$$

$$\cancel{(x - 2)^2} + (y - 3)^2 + \cancel{(z - 4)^2} = 64 + \cancel{(x - 2)^2} + (y + 3)^2 + \cancel{(z - 4)^2} -$$

$$- 16\sqrt{(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 4)^2}$$

$$16 \sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2} = 64 + 12y$$

$$4 \sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2} = 16 + 3y$$

$$16(x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 + z^2 - 8z + 16) = 256 + 96y + 9y^2$$

$$16x^2 + 7y^2 + 16z^2 - 64x - 128z + 208 = 0$$

Se trata de un *elipsoide*.

- 73** ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a los puntos $(-4, 3, 1)$ y $(4, 3, 1)$ es igual a 6?

$$\sqrt{(x+4)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2} - \sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2} = 6$$

$$4x - 9 = 3 \sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2}$$

$$7x^2 - 9y^2 - 9z^2 + 54y + 18z - 153 = 0$$

Se trata de un *hiperboloide*.

- 74** Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan del plano $x = y$ y del punto $(0, -2, 1)$.

$$d(P, \pi) = \frac{|x-y|}{\sqrt{2}} \qquad d(P, Q) = \sqrt{(x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2)}$$

$$\left(\frac{|x-y|}{\sqrt{2}} \right)^2 = x^2 + y^2 + 4y + 4 + z^2 - 2z + 1$$

$$x^2 + y^2 - 2xy = 2x^2 + 2y^2 + 8y + 8 + 2z^2 - 4z + 2$$

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy + 8y - 4z + 10 = 0$$

Se trata de un *paraboloide*.

CUESTIONES TEÓRICAS

- 75** La ecuación $ax + by + cz + d = 0$ representa un plano del espacio. Explica qué característica tiene ese plano en cada uno de estos casos:

i) $a = 0, b = 0$ ii) $b = 0, c = 0$

iii) $a = 0, c = 0$ iv) $d = 0$

i) Es perpendicular al eje OZ . (Paralelo al plano OXY).

ii) Es perpendicular al eje OX . (Paralelo al plano OYZ).

iii) Es perpendicular al eje OY . (Paralelo al plano OXZ).

iv) Pasa por el origen, $(0, 0, 0)$.

- 76** Define la proyección ortogonal de un punto P sobre un plano π y explica el procedimiento que emplearías para obtenerla.

- La proyección ortogonal de un punto, P , sobre un plano, π , es un punto, P' , tal que el vector $\overrightarrow{PP'}$ es perpendicular a π . Un procedimiento para obtener P' sería el siguiente:

Se halla la recta, r , perpendicular a π que pasa por P . El punto de corte entre r y π es el punto buscado, P' .

- 77 Dada una recta r y un punto P de ella, ¿cuántas rectas perpendiculares a r que pasen por el punto P se pueden trazar?**

Infinitas. Todas las que, pasando por P , están contenidas en el plano perpendicular a r que pasa por P .

- 78 Dado el plano $\pi: x - 3y + 2z - 1 = 0$, escribe las condiciones que deben cumplir las coordenadas de un vector $\vec{v}(a, b, c)$ para que tenga la dirección de alguna recta contenida en el plano.**

$\vec{v}(a, b, c)$ debe ser perpendicular al vector normal del plano π , $\vec{n}(1, -3, 2)$; es decir: $(a, b, c) \cdot (1, -3, 2) = a - 3b + 2c = 0$

- 79 Justifica que la distancia del punto $A(x_2, y_2, z_2)$ a la recta**

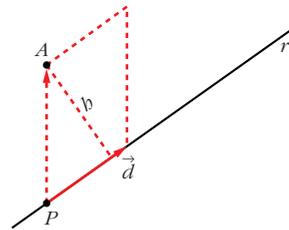
$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$ se puede calcular mediante la fórmula:

$$d(A, r) = \frac{|(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \times (a, b, c)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Llamamos $P(x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{d}(a, b, c)$. P es un punto de la recta y \vec{d} un vector dirección de esta.

La distancia de A a la recta r es igual a la altura del paralelogramo determinado por \overrightarrow{PA} y \vec{d} , es decir:

$$\begin{aligned} dist(A, r) &= \frac{\text{Área paralelogramo}}{\text{Base}} = \frac{|\overrightarrow{PA} \times \vec{d}|}{|\vec{d}|} = \\ &= \frac{|(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \times (a, b, c)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \end{aligned}$$



- 80 Sean r la recta determinada por el punto A y el vector \vec{d}_r y s la recta determinada por el punto B y el vector \vec{d}_s . Sabemos que r y s se cruzan.**

a) Justifica que la distancia entre r y s se puede calcular así:

$$d(r, s) = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \vec{d}_r, \vec{d}_s]|}{|\vec{d}_r \times \vec{d}_s|}$$

b) Justifica que la perpendicular común a r y s se puede obtener así:

$$\begin{cases} \det(\overrightarrow{AX}, \vec{d}_r, \vec{d}_r \times \vec{d}_s) = 0 \\ \det(\overrightarrow{BX}, \vec{d}_s, \vec{d}_r \times \vec{d}_s) = 0 \end{cases}$$

a) $dist(r, s) =$ altura del paralelepípedo determinado por:

$$\vec{AB}, \vec{d}_r \text{ y } \vec{d}_s = \frac{\text{Volumen}}{\text{Área de la base}} = \frac{|[\vec{AB}, \vec{d}_r, \vec{d}_s]|}{|\vec{d}_r \times \vec{d}_s|}$$

b) La recta, p , perpendicular a r y a s , tiene por vector dirección $\vec{d}_r \times \vec{d}_s$. Esta recta, p , es la intersección de los planos α y β , siendo:

α : Plano que contiene a s y al vector $\vec{d}_r \times \vec{d}_s$; es decir:

$$\alpha: \det(\vec{AX}, \vec{d}_s, \vec{d}_r \times \vec{d}_s) = 0, \text{ donde } X = (x, y, z)$$

β : Plano que contiene a r y al vector $\vec{d}_r \times \vec{d}_s$, es decir:

$$\beta: \det(\vec{BX}, \vec{d}_r, \vec{d}_r \times \vec{d}_s) = 0$$

$$\text{Por tanto: } p: \begin{cases} \det(\vec{AX}, \vec{d}_r, \vec{d}_r \times \vec{d}_s) = 0 \\ \det(\vec{BX}, \vec{d}_s, \vec{d}_r \times \vec{d}_s) = 0 \end{cases}$$

81 Si $A(x_1, y_1, z_1)$ es un punto del plano $\pi: ax + by + cz + d = 0$, y $B(x_2, y_2, z_2)$ un punto tal que $\vec{AB} \cdot (a, b, c) = 0$, demuestra que $B \in \pi$.

$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot (a, b, c) = 0 &\rightarrow a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) + c(z_2 - z_1) = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow (ax_2 + by_2 + cz_2) - \underbrace{(ax_1 + by_1 + cz_1)}_{-d \text{ (pues } A \in \pi)} = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow ax_2 + by_2 + cz_2 + d = 0 \rightarrow B \in \pi \end{aligned}$$

Página 207

PARA PROFUNDIZAR

82 Los puntos $P(1, -1, 1)$ y $Q(3, -3, 3)$ son dos vértices opuestos de un cuadrado que está contenido en un plano perpendicular al plano de ecuación $x + y = 0$.

a) Halla los vértices restantes.

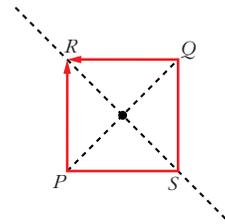
b) Calcula el perímetro del cuadrado.

a) Los otros dos vértices, R y S , pertenecen a la mediatriz del segmento PQ .

La mediatriz del segmento PQ tiene como vector dirección el vector normal al plano $x + y = 0$; es decir, $(1, 1, 0)$.

Pasa por el punto medio del segmento PQ , es decir, por $M(2, -2, 2)$. Luego la ecuación de la mediatriz es:

$$r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = 2 \end{cases}$$



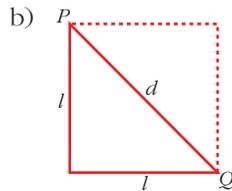
Un punto de r es de la forma $R(2 + \lambda, -2 + \lambda, 2)$.

Buscamos R tal que $\vec{PR} \cdot \vec{QR} = 0$ (es decir $\vec{PR} \perp \vec{QR}$):

$$\left. \begin{array}{l} \vec{PR}(1 + \lambda, -1 + \lambda, 1) \\ \vec{QR}(-1 + \lambda, 1 + \lambda, -1) \end{array} \right\} \vec{PR} \cdot \vec{QR} = \lambda^2 - 1 + \lambda^2 - 1 - 1 = 2\lambda^2 - 3 = 0 \rightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \\ \lambda = -\sqrt{\frac{3}{2}} = -\frac{\sqrt{6}}{2} \end{cases}$$

Los vértices son: $R\left(\frac{4 + \sqrt{6}}{2}, \frac{-4 + \sqrt{6}}{2}, 2\right)$ y $S\left(\frac{4 - \sqrt{6}}{2}, \frac{-4 - \sqrt{6}}{2}, 2\right)$



La longitud de la diagonal es:

$$d = |\vec{PQ}| = |(2, -2, 2)| = \sqrt{12}$$

$$d^2 = l^2 + l^2 \rightarrow d^2 = 2l^2 \rightarrow 12 = 2l^2 \rightarrow l = \sqrt{6}$$

El perímetro será: $P = 4\sqrt{6}$

- 83** Dados los puntos $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$, prueba que la distancia, d , del origen de coordenadas al plano ABC verifica:

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

El plano que pasa por A, B y C es:

$$\pi: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \text{ (véase ejercicio 55 de la unidad 6),}$$

$$\text{es decir: } \pi: \frac{1}{a}x + \frac{1}{b}y + \frac{1}{c}z - 1 = 0$$

Así, si $O(0, 0, 0)$, entonces:

$$\text{dist}(O, \pi) = \frac{\left| \frac{1}{a} \cdot 0 + \frac{1}{b} \cdot 0 + \frac{1}{c} \cdot 0 - 1 \right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} = d \rightarrow$$

$$\rightarrow \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \frac{1}{d} \rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{d^2}$$

84 Dadas las rectas r , s y t :

$$r: \begin{cases} x & = -2 \\ y - z & = 0 \end{cases} \quad s: \begin{cases} 2x + z & = -2 \\ x + y & = 0 \end{cases} \quad t: \begin{cases} x - z & = 0 \\ y + z & = -1 \end{cases}$$

Halla las coordenadas de un punto P que está en la recta t y que determina con la recta s un plano que contiene a r .

- Escribimos las ecuaciones de r , s y t en forma paramétrica:

$$r: \begin{cases} x = -2 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = \mu \\ y = -\mu \\ z = -2 - 2\mu \end{cases} \quad t: \begin{cases} x = k \\ y = -1 - k \\ z = k \end{cases}$$

- Hallamos la ecuación del plano, π , que contiene a r y a s :

Las rectas r y s se cortan en el punto $(-2, 2, 2)$, luego el plano π contiene a este punto.

Un vector normal al plano es:

$$\vec{d}_r \times \vec{d}_s = (0, 1, 1) \times (1, -1, -2) = (-1, 1, -1) \rightarrow \vec{n}(1, -1, 1)$$

Luego el plano es: $\pi: 1(x + 2) - 1(y - 2) + 1(z - 2) = 0$

$$\pi: x - y + z + 2 = 0$$

- P es el punto de corte de π con la recta t :

$$k - (-1 - k) + k + 2 = 0 \rightarrow k + 1 + k + k + 2 = 0 \rightarrow 3k + 3 = 0 \rightarrow k = -1$$

El punto es $P(-1, 0, -1)$

85 Halla las intersecciones de la superficie $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$ con los planos coordenados. ¿Qué figuras obtienes? ¿Cómo se llama la superficie dada?

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$$

$$\text{Con } x = 0: \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1 \rightarrow \text{Elipse de semiejes 4 y 3}$$

$$\text{Con } y = 0: \frac{x^2}{25} + \frac{z^2}{9} = 1 \rightarrow \text{Elipse de semiejes 5 y 3}$$

$$\text{Con } z = 0: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \rightarrow \text{Elipse de semiejes 5 y 4}$$

Es un elipsoide.

86 Halla el centro y las longitudes de los ejes del elipsoide:

$$2x^2 + 3y^2 + z^2 - 8x + 6y - 4z - 3 = 0$$

$$2x^2 + 3y^2 + z^2 - 8x + 6y - 4z - 3 = 0$$

$$2(x^2 - 4x + 4) + 3(y^2 + 2y + 1) + (z^2 - 4z + 4) = 3 + 8 + 3 + 4$$

$$2(x - 2)^2 + 3(y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 18$$

$$\frac{(x - 2)^2}{9} + \frac{(y + 1)^2}{6} + \frac{(z - 2)^2}{18} = 1$$

Centro: (2, -1, 2)

Semiejes: 3, $\sqrt{6}$ y $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

87 Halla las intersecciones de la superficie $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1$ con los planos coordenados y describe qué tipo de curvas obtienes. ¿Cómo se llama la superficie dada?

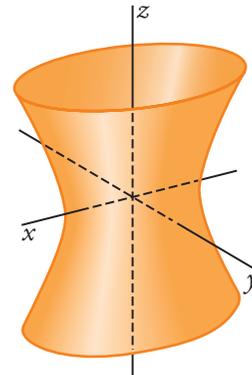
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1$$

Con $x = 0$: $\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1 \rightarrow$ Hipérbola, semieje real 2

Con $y = 0$: $\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1 \rightarrow$ Hipérbola, semieje real 3

Con $z = 0$: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \rightarrow$ Elipse de semiejes 3 y 2

Es un hiperboloide.

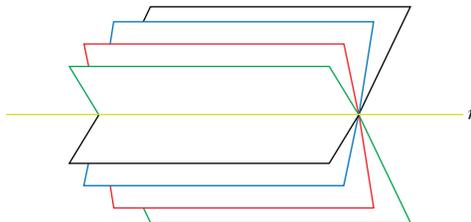


PARA PENSAR UN POCO MÁS

88 Haz de planos

La recta r : $\begin{cases} \pi: 2x + 3y - z - 4 = 0 \\ \sigma: x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$ es la intersección de los planos π y σ .

El conjunto de todos los planos que contienen a r se llama **HAZ DE PLANOS** de arista r , y su expresión analítica es: $a(2x + 3y - z - 4) + b(x - 2y + z + 1) = 0$



Para cada par de valores de a y b (salvo para $a = 0$ y $b = 0$) se obtiene la ecuación de un plano del haz.

a) Halla el plano del haz que pasa por el origen de coordenadas.

b) ¿Para qué valor de k uno de los planos del haz es perpendicular a la recta

$$t: \frac{x}{3} = \frac{y-2}{5} = \frac{z}{k} \text{? } \text{¿Cuál es ese plano del haz?}$$

c) Halla dos puntos que pertenezcan a todos los planos del haz anterior.

d) Pon la expresión del haz de planos cuya arista es la recta s :

$$s: \frac{x-5}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{1}$$

e) ¿Cuál de los planos de este haz dista más del origen de coordenadas?

a) El término independiente será cero: $-4a + b = 0 \rightarrow b = 4a$. Luego:

$$a(2x + 3y - z - 4) + 4a(x - 2y + z + 1) = 0; \text{ es decir:}$$

$$2x + 3y - z - 4 + 4(x - 2y + z + 1) = 0$$

$$2x + 3y - z - 4 + 4x - 8y + 4z + 4 = 0$$

$$6x - 5y + 3z = 0$$

b) Un plano del haz es:

$$(2a + b)x + (3a - 2b)y + (-a + b)z + (-4a + b) = 0$$

$$\text{Un vector normal al plano es: } \vec{n}(2a + b, 3a - 2b, -a + b)$$

Para que el plano sea perpendicular a la recta, el vector normal del plano y el vector dirección de la recta han de ser paralelos, es decir, sus coordenadas deben ser proporcionales:

$$\frac{2a + b}{3} = \frac{3a - 2b}{5} = \frac{-a + b}{k}$$

$$\left. \begin{array}{l} 10a + 5b = 9a - 6b \\ 2ka + kb = -3a + 3b \end{array} \right\} \begin{array}{l} a + 11b = 0 \rightarrow a = -11b \\ (2k + 3)a + (k - 3)b = 0 \end{array}$$

$$-11(2k + 3) + (k - 3) = 0 \rightarrow -22k - 33 + k - 3 = 0$$

$$-21k - 36 = 0 \rightarrow k = \frac{-36}{21} = \frac{-12}{7} \rightarrow k = \frac{-12}{7}$$

El plano del haz es:

$$-11b(2x + 3y - z - 4) + b(x - 2y + z + 1) = 0$$

$$-11(2x + 3y - z - 4) + (x - 2y + z + 1) = 0$$

$$-22x - 33y + 11z + 44 + x - 2y + z + 1 = 0$$

$$-21x - 35y + 12z + 45 = 0$$

Otra resolución:

Si la recta es perpendicular a un cierto plano del haz, será perpendicular a todas las rectas contenidas en ese plano, y, en concreto, a la recta r , arista del haz.

Vector dirección de r : $\vec{d} = (2, 3, -1) \times (1, -2, 1) = (1, -3, -7)$

Vector dirección de t : $\vec{d}' = (3, 5, k)$

$$\vec{d} \cdot \vec{d}' = 0 \rightarrow (1, -3, -7) \cdot (3, 5, k) = 3 - 15 - 7k = 0 \rightarrow k = \frac{-12}{7}$$

A partir de aquí, obtendríamos la relación entre a y b , y el plano del haz como en el caso anterior.

c) Los puntos que pertenecen a todos los planos del haz son los puntos de la recta r . Por ejemplo: $(1, 0, -2)$ y $(0, 3, 5)$.

d) Escribimos la recta s en forma implícita:

$$\frac{x-5}{3} = \frac{y+1}{-2} \rightarrow -2x+10 = 3y+3 \rightarrow -2x-3y+7 = 0$$

$$\frac{x-5}{3} = \frac{z-3}{1} \rightarrow x-5 = 3z-9 \rightarrow x-3z+4 = 0$$

$$s: \begin{cases} 2x+3y-7=0 \\ x-3z+4=0 \end{cases}$$

La expresión del haz de planos cuya arista es s es:

$$a(2x+3y-7) + b(x-3z+4) = 0$$

e) Es el plano que contiene a la recta (puesto que es del haz) y es perpendicular a \vec{OO}' , siendo $O(0, 0, 0)$ y O' la proyección de O sobre la recta.

Lo calculamos en el caso de la recta s :

Un punto genérico de la recta s es:

$$P(5+3\lambda, -1-2\lambda, 3+\lambda)$$

Un vector dirección de s es $\vec{d}_s(3, -2, 1)$.

El vector \vec{OP} ha de ser perpendicular a \vec{d}_s :

$$\vec{OP} \cdot \vec{d}_s = 0 \rightarrow 3(5+3\lambda) - 2(-1-2\lambda) + (3+\lambda) = 0$$

$$15+9\lambda+2+4\lambda+3+\lambda=0 \rightarrow 14\lambda+20=0 \rightarrow \lambda = \frac{-20}{14} = \frac{-10}{7}$$

Luego: $O'\left(\frac{5}{7}, \frac{13}{7}, \frac{11}{7}\right)$; y el vector normal al plano es $\vec{OO}'\left(\frac{5}{7}, \frac{13}{7}, \frac{11}{7}\right)$; o

bien $(5, 13, 11)$.

El plano será: $5\left(x - \frac{5}{7}\right) + 13\left(y - \frac{13}{7}\right) + 11\left(z - \frac{11}{7}\right) = 0$

$$5x + 13y + 11z - 45 = 0$$

