8 LÍMITES DE FUNCIONES. CONTINUIDAD

Página 216

Algunos límites elementales

- **Utiliza tu sentido común para dar el valor de los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3$, $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 3x^2)$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3$, $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - x^2)$

c) $\lim\limits_{x \to 2} x^2$, $\lim\limits_{x \to 2} x^3$, $\lim\limits_{x \to 2} (x^3 - 5x^2 + 3)$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x^2+1}$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{x^2+1}$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2}$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x^2+1}$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{x^2+1}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3-5x^2}{x^2+1}$

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3}{x^2+1}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{3x+5}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 3x^2) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - x^2) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$; $\lim\limits_{x \to 2} x^3 = 8$; $\lim\limits_{x \to 2} (x^3 - 5x^2 + 3) = -9$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x^2+1} = 0$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{x^2+1} = 0$

f) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x^2+1} = 0$

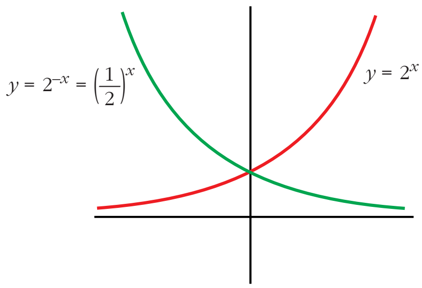
g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{x^2+1} = +\infty$; $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3-5x^2}{x^2+1} = +\infty$

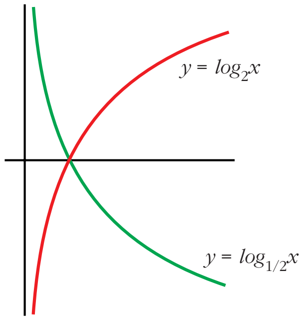
h) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3}{x^2+1} = -\infty$; $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{3x+5} = -\infty$

Página 217

Exponenciales y logarítmicas

■ **A la vista de estas gráficas, asigna valor a los siguientes límites:**





a) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^x$, $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^x$ **b)** $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^{-x}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^{-x}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} log_2 x$, $\lim\limits_{x \to 0} log_2 x$, $\lim\limits_{x \to +\infty} log_2 x$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} log_{1/2} x$, $\lim\limits_{x \to 0} log_{1/2} x$, $\lim\limits_{x \to +\infty} log_{1/2} x$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^x = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^x = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^{-x} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^{-x} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} log_2 x$ no existe, $\lim\limits_{x \to 0^+} log_2 x = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} log_2 x = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} log_{1/2} x$ no existe, $\lim\limits_{x \to 0^+} log_{1/2} x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} log_{1/2} x = -\infty$

Con la calculadora

Tanteando con la calculadora, da el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\, x}{x}$

b) $\lim\limits_{x \to 3} (x-3) \cdot ln\,(x-3)$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{3}{x}\right)^{2x}$

a) $lím \dfrac{senx}{x} = 1$

b) $lím\ (x-3) \cdot ln\,(x-3) = 0$

c) $lím \left(1 + \dfrac{3}{x}\right)^{2x} = e^6 \simeq 403{,}43$

Página 221

1. Si $u(x) \to 2$ y $v(x) \to -3$ cuando $x \to +\infty$, calcula el límite cuando $x \to +\infty$ de:

a) $u(x) + v(x)$ **b) $v(x)/u(x)$** **c) $5^{u(x)}$**

d) $\sqrt{v(x)}$ **e) $u(x) \cdot v(x)$** **f) $\sqrt[3]{u(x)}$**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} [u(x) + v(x)] = 2 + (-3) = -1$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{v(x)}{u(x)} = \dfrac{-3}{2}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} 5^{u(x)} = 5^2 = 25$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{v(x)}$ no existe

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} [u(x) \cdot v(x)] = 2 \cdot (-3) = -6$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{u(x)} = \sqrt[3]{2}$

2. Si $u(x) \to -1$ y $v(x) \to 0$ cuando $x \to +\infty$, calcula el límite cuando $x \to +\infty$ de:

a) $u(x) - v(x)$ **b) $v(x) - u(x)$** **c) $v(x)/u(x)$**

d) $log_2 v(x)$ **e) $u(x) \cdot v(x)$** **f) $\sqrt[3]{u(x)}$**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} [u(x) - v(x)] = -1 - 0 = -1$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} [v(x) - u(x)] = 0 - (-1) = 1$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{v(x)}{u(x)} = \dfrac{0}{-1} = 0$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} log_2 v(x) = \begin{cases} -\infty & \text{si } v(x) \to 0^+ \\ \text{no existe si } & v(x) \to 0^- \end{cases}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} [u(x) \cdot v(x)] = -1 \cdot 0 = 0$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{u(x)} = \sqrt[3]{-1} = -1$

Página 222

3. Halla los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + 3x - x^3)$ **b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-5 \cdot 2^{2x})$**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + 3x - x^3) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-5 \cdot 2^{2x}) = -\infty$

4. **Calcula estos límites:**

a) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^2 + 2}$ **b)** $\lim_{x \to +\infty} (-2log_{10}\, x)$

a) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^2 + 2} = +\infty$ b) $\lim_{x \to +\infty} (-2log_{10}\, x) = -\infty$

Página 223

5. **Indica cuáles de las siguientes expresiones son infinitos $(\pm\infty)$ cuando $x \to +\infty$:**

a) $3x^5 - \sqrt{x} + 1$ **b)** $0,5^x$ **c)** $-1,5^x$

d) $log_2 x$ **e)** $1/(x^3 + 1)$ **f)** $\sqrt{x}$

g) 4^x **h)** 4^{-x} **i)** -4^x

a) $\lim_{x \to +\infty} (3x^5 - \sqrt{x} + 1) = +\infty \quad \to \quad$ Sí

b) $\lim_{x \to +\infty} 0,5^x = 0 \quad \to \quad$ No

c) $\lim_{x \to +\infty} (-1,5^x) = -\infty \quad \to \quad$ Sí

d) $\lim_{x \to +\infty} log_2 x = +\infty \quad \to \quad$ Sí

e) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^3 + 1} = 0 \quad \to \quad$ No

f) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty \quad \to \quad$ Sí

g) $\lim_{x \to +\infty} 4^x = +\infty \quad \to \quad$ Sí

h) $\lim_{x \to +\infty} 4^{-x} = 0 \quad \to \quad$ No

i) $\lim_{x \to +\infty} -4^x = -\infty \quad \to \quad$ Sí

6. **a) Ordena de menor a mayor los órdenes de los siguientes infinitos:**

$$log_2 x \qquad \sqrt{x} \qquad x^2 \qquad 3x^5 \qquad 1,5^x \qquad 4^x$$

b) Teniendo en cuenta el resultado anterior, calcula:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{log_2 x}{\sqrt{x}} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^5}{x^2} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{1,5^x}$$

a) $4^x \quad 1,5^x \quad 3x^5 \quad x^2 \quad \sqrt{x} \quad log_2 x$

b) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{log_2 x}{\sqrt{x}} = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^5}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{1{,}5^x} = 0$$

Página 224

7. **Sabiendo que, cuando $x \to +\infty$, $f(x) \to +\infty$, $g(x) \to 4$, $h(x) \to -\infty$, $u(x) \to 0$, asigna, siempre que puedas, límite cuando $x \to +\infty$ a las expresiones siguientes:**

a) $f(x) - h(x)$ **b)** $f(x)^{f(x)}$ **c)** $f(x) + h(x)$

d) $f(x)^x$ **e)** $f(x) \cdot h(x)$ **f)** $u(x)^{u(x)}$

g) $f(x)/h(x)$ **h)** $[-h(x)]^{h(x)}$ **i)** $g(x)^{h(x)}$

j) $u(x)/h(x)$ **k)** $f(x)/u(x)$ **l)** $h(x)/u(x)$

m) $g(x)/u(x)$ **n)** $x + f(x)$ **ñ)** $f(x)^{h(x)}$

o) $x + h(x)$ **p)** $h(x)^{h(x)}$ **q)** x^{-x}

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) - h(x)\big) = +\infty - (-\infty) = +\infty + \infty = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)^{f(x)} = (+\infty)^{+\infty} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) + h(x)\big) = +\infty + (-\infty) \ \to$ Indeterminado

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)^x = +\infty^{+\infty} = +\infty$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) \cdot h(x)\big) = +\infty \cdot (-\infty) = -\infty$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x)^{u(x)} = 0^0 \ \to$ Indeterminado

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{h(x)} = \dfrac{+\infty}{-\infty} \ \to$ Indeterminado

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} [-h(x)]^{h(x)} = [+\infty]^{-\infty} = 0$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)^{h(x)} = 4^{-\infty} = 0$

j) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{u(x)}{h(x)} = \dfrac{0}{-\infty} = 0$

k) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{u(x)} = \dfrac{+\infty}{(0)} = \pm\infty$

l) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{h(x)}{u(x)} = \dfrac{-\infty}{(0)} = \pm\infty$

m) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{u(x)} = \dfrac{4}{(0)} = \pm\infty$

n) $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(x + f(x)\big) = +\infty + (+\infty) = +\infty$

ñ) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)^{h(x)} = (+\infty)^{-\infty} = 0$

o) $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(x + h(x)\big) = +\infty + (-\infty) \quad \to \quad$ Indeterminado

p) $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)^{h(x)} = (-\infty)^{-\infty} \quad \to \quad$ No existe

q) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{-x} = (+\infty)^{-\infty} = 0$

Página 225

8. Las funciones f, g, h y u son las del ejercicio propuesto 7 (página anterior). Di cuáles de las siguientes funciones son indeterminaciones. En cada caso, si es indeterminación, di de qué tipo, y, si no lo es, di cuál es el límite:

a) $f(x) + h(x)$ b) $f(x)/h(x)$ c) $f(x)^{-h(x)}$ d) $f(x)^{h(x)}$

e) $f(x)^{u(x)}$ f) $u(x)^{h(x)}$ g) $[g(x)/4]^{f(x)}$ h) $g(x)^{f(x)}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) + h(x)\big) = +\infty + (-\infty)$. Indeterminado.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{h(x)} = \dfrac{+\infty}{-\infty}$. Indeterminado.

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)^{-h(x)} = (+\infty)^{+\infty} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)^{h(x)} = (+\infty)^{-\infty} = 0$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)^{u(x)} = (+\infty)^{0}$. Indeterminado.

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x)^{h(x)} = 0^{-\infty} = \pm\infty$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{g(x)}{4}\right]^{f(x)} = 1^{+\infty}$. Indeterminado.

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)^{f(x)} = 4^{+\infty} = +\infty$

Página 227

1. Sin operar, di el límite, cuando $x \to +\infty$, de las siguientes expresiones:

a) $(x^2 - \sqrt[3]{2x+1})$ b) $(x^2 - 2^x)$ c) $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x}$

d) $3^x - 2^x$ e) $5^x - \sqrt[3]{x^8 - 2}$ f) $\sqrt{x} - \log_5 x^4$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - \sqrt[3]{2x+1}) = +\infty$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 2^x) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x}\right) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (3^x - 2^x) = +\infty$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(5^x - \sqrt[3]{x^8 - 2}\right) = +\infty$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x} - \log_5 x^4\right) = +\infty$

2. Calcula el límite, cuando $x \to +\infty$, de las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{3x^3+5}{x+2} - \dfrac{4x^3-x}{x-2}$

b) $\dfrac{x^3}{2x^2+1} - \dfrac{x}{2}$

c) $\dfrac{3x+5}{2} - \dfrac{x^2-2}{x}$

d) $\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1}$

e) $2x - \sqrt{x^2+x}$

f) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x^3+5}{x+2} - \dfrac{4x^3-x}{x-2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(3x^3+5)(x-2)-(4x^3-x)(x+2)}{(x+2)(x-2)} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^4-6x^3+5x-10-4x^4-8x^3+x^2+2x}{x^2-4} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^4-14x^3+x^2+7x-10}{x^2-4} = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^3}{2x^2+1} - \dfrac{x}{2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3 - x(2x^2+1)}{2(2x^2+1)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3-2x^3-x}{4x^2+2} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x}{4x^2+2} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x+5}{2} - \dfrac{x^2-2}{x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2+5x-2x^2+4}{2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+5x+4}{2x} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+1}} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+x-x^2-1}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+1}} = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2x - \sqrt{x^2+x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(2x - \sqrt{x^2+x}\right)\left(2x + \sqrt{x^2+x}\right)}{2x + \sqrt{x^2+x}} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^2-x^2-x}{2x+\sqrt{x^2+x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2-x}{2x+\sqrt{x^2+x}} = +\infty$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}\right)\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}\right)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1-x-2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}} = 0$

Página 228

3. **Halla los siguientes límites cuando $x \to +\infty$:**

a) $\left(1 + \frac{1}{5x}\right)^x$ **b)** $\left(5 + \frac{1}{5x}\right)^{5x}$ **c)** $\left(1 + \frac{1}{5x}\right)^5$

d) $\left(1 + \frac{5}{x}\right)^x$ **e)** $\left(5 + \frac{5}{x}\right)^{5x}$ **f)** $\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{5x}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{5x}\right)^x = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{5x}\right)^{5x}\right]^{1/5} = e^{1/5}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(5 + \frac{1}{5x}\right)^{5x} = 5^{+\infty} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{5x}\right)^5 = 1^5 = 1$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^x = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x/5}\right)^{x/5}\right]^5 = e^5$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(5 + \frac{5}{x}\right)^{5x} = 5^{+\infty} = +\infty$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{5x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-5} = e^{-5}$

4. **Calcula estos límites cuando $x \to +\infty$:**

a) $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x-2}$ **b)** $\left(1 - \frac{1}{2x}\right)^{4x}$ **c)** $\left(1 + \frac{1}{5x}\right)^{3x}$

d) $\left(1 + \frac{3}{2x}\right)^5$ **e)** $\left(1 - \frac{1}{2x}\right)^{3x}$ **f)** $\left(1 + \frac{2}{5x}\right)^{5x}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x-2} = e^3$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{2x}\right)^{4x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{-2x}\right)^{-2x}\right]^{-2} = e^{-2}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{5x}\right)^{3x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{5x}\right)^{5x}\right]^{3/5} = e^{3/5}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{3}{2x}\right)^5 = 1^5 = 1$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{1}{2x}\right)^{3x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \dfrac{1}{-2x}\right)^{-2x}\right]^{-3/2} = e^{-3/2}$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{2}{5x}\right)^{5x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \dfrac{1}{5x/2}\right)^{5x/2}\right]^{2} = e^{2}$

Página 231

1. Sin operar, di el límite cuando $x \to -\infty$ de las siguientes expresiones:

a) $x^2 - \sqrt[3]{2x + 1}$ **b)** $x^2 + 2^x$ **c)** $x^2 - 2^x$

d) $x^2 - 2^{-x}$ **e)** $2^{-x} - 3^{-x}$ **f)** $\sqrt{x^5 - 1} - 5^x$

g) $2^x - x^2$ **h)** $x^2 - \sqrt{x^4 - 1}$ **i)** $\sqrt[3]{x + 2} - x^2$

j) $3^{-x} - 2^{-x}$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^2 - \sqrt[3]{2x + 1}\right) = +\infty - (-\infty) = +\infty + \infty = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 + 2^x) = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 - 2^x) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 - 2^{-x}) = -\infty$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} (2^{-x} - 3^{-x}) = -\infty$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^5 - 1} - 5^x\right)$ no existe

g) $\lim\limits_{x \to -\infty} (2^x - x^2) = -\infty$

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^5 - \sqrt{x^4 - 1}\right) = -\infty$

i) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt[3]{x + 2} - x^2\right) = -\infty$

j) $\lim\limits_{x \to -\infty} (3^{-x} - 2^{-x}) = +\infty$

2. Calcula el límite cuando $x \to -\infty$ de las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{3x^3 + 5}{x + 2} - \dfrac{4x^3 - x}{x - 2}$ **b)** $\dfrac{x^3}{2x^2 + 1} - \dfrac{x}{2}$ **c)** $\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1}$

d) $2x + \sqrt{x^2 + x}$ **e)** $\sqrt{x^2 + 2x} + x$ **f)** $\left(1 + \dfrac{3}{x}\right)^{2x}$

g) $\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^{5x+3}$ **h)** $\left(\dfrac{x^2 + x - 1}{x^2 + 2}\right)^{3x-1}$

a) $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{3x^3 + 5}{x + 2} - \frac{4x^3 - x}{x - 2}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{-3x^3 + 5}{-x + 2} - \frac{-4x^3 - x}{-x - 2}\right) =$

$\displaystyle = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^4 - 5x + 6x^3 - 10 - 4x^4 + x^2 + 8x^3 - 2x}{x^2 - 4} =$

$\displaystyle = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x^4 + 14x^3 + x^2 - 7x - 10}{x^2 - 4} = -\infty$

b) $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^3}{2x^2 + 1} - \frac{x}{2}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{-x^3}{2x^2 + 1} + \frac{x}{2}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-2x^3 + 2x^3 + x}{4x^2 + 2} =$

$\displaystyle = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{4x^2 + 2} = 0$

c) $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{x^2 + 1}\right) =$

$\displaystyle = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{x^2 + 2}\right)\left(\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + 1}\right)}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x - x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + 1}} =$

$\displaystyle = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x - 1}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{-1}{1 + 1} = -\frac{1}{2}$

d) $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} \left(2x + \sqrt{x^2 + x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(-2x + \sqrt{x^2 - x}\right) =$

$\displaystyle = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(-2x + \sqrt{x^2 - x}\right)\left(-2x - \sqrt{x^2 - x}\right)}{-2x - \sqrt{x^2 - x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2 - x^2 + x}{-2x - \sqrt{x^2 - x}} =$

$\displaystyle = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 + x}{-2x - \sqrt{x^2 - x}} = -\infty$

e) $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} + x\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 2x} - x\right) =$

$\displaystyle = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 - 2x} - x\right)\left(\sqrt{x^2 - 2x} + x\right)}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 2x - x^2}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} =$

$\displaystyle = \lim_{x \to +\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = \frac{-2}{1 + 1} = \frac{-2}{2} = -1$

f) $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{2x} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{3}{-x}\right)^{-2x} = \lim_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{-x/3}\right)^{-x/3}\right]^6 = e^6$

g) $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{5x + 3} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-5x + 3} = e^{-5}$

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x^2 + x - 1}{x^2 + 2} \right)^{3x - 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 - x - 1}{x^2 + 2} \right)^{-3x - 1} =$

$= e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(\frac{x^2 - x - 1}{x^2 + 2} - 1 \right) \cdot (-3x - 1) \right]} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{-x - 3}{-x^2 + 2} \cdot (-3x - 1) \right)} =$

$= e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x^2 + 10x + 3}{x^2 + 2}} = e^3$

Página 234

1. Si $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$ y $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 2$, di el valor del límite cuando x tiende a 1 de las siguientes funciones:

a) $f(x) + g(x)$ **b) $f(x) \cdot g(x)$** **c) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$**

d) $f(x)^{g(x)}$ **e) $\sqrt{g(x)}$** **f) $4f(x) - 5g(x)$**

a) $\lim\limits_{x \to 1} \big(f(x) + g(x)\big) = 3 + 2 = 5$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = 3 \cdot 2 = 6$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{3}{2}$

d) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)^{g(x)} = 3^2 = 9$

e) $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{g(x)} = \sqrt{2}$

f) $\lim\limits_{x \to 1} \big(4f(x) - 5g(x)\big) = 12 - 10 = 2$

2. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = m$, entonces $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = l + m$.

Enuncia las restantes propiedades de los límites de las operaciones con funciones empleando la notación adecuada.

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = m$, entonces:

1) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = l + m$

2) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) - g(x)] = l - m$

3) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = l \cdot m$

4) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{m}$ (Si $m \neq 0$).

5) Si $f(x) > 0$, $\lim\limits_{x \to a} \left[f(x)^{g(x)}\right] = l^m$

6) Si n es impar, o si n es par y $f(x) \geq 0 \rightarrow \lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$

7) Si $\alpha > 0$ y $f(x) > 0$, $\lim\limits_{x \to a} [\log_\alpha f(x)] = \log_\alpha l$

3. Si $\lim\limits_{x \to 2} p(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 2} q(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 2} r(x) = 3$ y $\lim\limits_{x \to 2} s(x) = 0$, di, en los casos que sea posible, el valor del $\lim\limits_{x \to 2}$ de las siguientes funciones:

(Recuerda que las expresiones $(+\infty)/(+\infty)$, $(+\infty) - (+\infty)$, $(0) \cdot (+\infty)$, $(1)^{(+\infty)}$, $(0)/(0)$ son indeterminaciones).

a) $2p(x) + q(x)$ **b)** $p(x) - 3q(x)$ **c)** $\dfrac{r(x)}{p(x)}$ **d)** $\dfrac{p(x)}{p(x)}$

e) $\dfrac{s(x)}{q(x)}$ **f)** $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ **g)** $s(x) \cdot p(x)$ **h)** $s(x)^{s(x)}$

i) $p(x)^{r(x)}$ **j)** $r(x)^{s(x)}$ **k)** $\dfrac{3 - r(x)}{s(x)}$ **l)** $\left[\dfrac{r(x)}{3}\right]^{s(x)}$

m) $r(x)^{p(x)}$ **n)** $r(x)^{-q(x)}$ **ñ)** $\left(\dfrac{r(x)}{3}\right)^{p(x)}$ **o)** $\left(\dfrac{r(x)}{3}\right)^{-p(x)}$

a) $\lim\limits_{x \to 2} [2p(x) + q(x)] = +\infty + (+\infty) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to 2} [p(x) - 3q(x)] = +\infty - (+\infty)$. Indeterminado.

c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{r(x)}{p(x)} = \dfrac{3}{+\infty} = 0$

d) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{p(x)}{p(x)} = \lim\limits_{x \to 2} 1 = 1$

e) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{s(x)}{q(x)} = \dfrac{0}{+\infty} = 0$

f) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{p(x)}{q(x)} = \dfrac{+\infty}{+\infty}$. Indeterminado.

g) $\lim\limits_{x \to 2} [s(x) \cdot p(x)] = 0 \cdot (+\infty)$. Indeterminado.

h) $\lim\limits_{x \to 2} s(x)^{s(x)} = 0^0$. Indeterminado.

i) $\lim\limits_{x \to 2} p(x)^{r(x)} = +\infty^3 = +\infty$

j) $\lim\limits_{x \to 2} r(x)^{s(x)} = 3^0 = 1$

k) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3 - r(x)}{s(x)} = \dfrac{3-3}{(0)} = \dfrac{0}{0}$. Indeterminado.

l) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{r(x)}{3}\right)^{s(x)} = 1^0 = 1$

m) $\lim\limits_{x \to 2} r(x)^{p(x)} = 3^{+\infty} = +\infty$

n) $\lim\limits_{x \to 2} r(x)^{-q(x)} = 3^{-\infty} = 0$

ñ) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{r(x)}{3}\right)^{p(x)} = 1^{+\infty}$. Indeterminado.

o) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{r(x)}{3}\right)^{-p(x)} = 1^{-\infty}$. Indeterminado.

Página 235

4. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 - 2x^2 + 2x + 5}{x^2 - 6x - 7}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^3 - 5x + 1}{x^3 + 2x^2 - 3x}$

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 - 2x^2 + 2x + 5}{x^2 - 6x - 7} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(x+1)(x^2 - 3x + 5)}{(x+1)(x-7)} =$

$= \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 3x + 5}{x - 7} = \dfrac{9}{-8} = \dfrac{-9}{8}$

b) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^3 - 5x + 1}{x^3 + 2x^2 - 3x} = \dfrac{45}{84} = \dfrac{15}{28}$

5. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}{\sqrt[3]{x^3 + 3x^2}}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[4]{x^3 - x}}{\sqrt{x^2 + x - 2}}$

a) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}{\sqrt[3]{x^3 + 3x^2}} = \lim\limits_{x \to -3} \sqrt[6]{\dfrac{(x-1)^3 (x+3)^3}{x^4 (x+3)^2}} = \lim\limits_{x \to -3} \sqrt[6]{\dfrac{(x-1)^3 (x+3)}{x^4}} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[4]{x^3 - x}}{\sqrt{x^2 + x - 2}} = \lim\limits_{x \to 1} \sqrt[4]{\dfrac{x(x-1)(x+1)}{(x+2)^2\,(x-1)^2}} = \lim\limits_{x \to 1} \sqrt[4]{\dfrac{x(x+1)}{(x+2)^2\,(x-1)}} \to$

$\to \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) \text{ no existe} \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{cases}$

Página 236

6. Calcula: $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x^2 - 5x + 2}{x^2 + 2x} - \dfrac{x^3 + 2x + 1}{x^3 + x} \right)$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2 - 5x + 2}{x^2 + 2x} - \frac{x^3 + 2x + 1}{x^3 + x} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2 - 5x + 2}{x(x+2)} - \frac{x^3 + 2x + 1}{x(x^2 + 1)} \right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(x^2+1)(x^2 - 5x + 2) - (x+2)(x^3 + 2x + 1)}{x(x+2)(x^2+1)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^4 - 5x^3 + 2x^2 + x^2 - 5x + 2 - x^4 - 2x^2 - x - 2x^3 - 4x - 2}{x(x+2)(x^2+1)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-7x^3 + x^2 - 10x}{x(x+2)(x^2+1)} = \lim_{x \to 0} \frac{x(-7x^2 + x - 10)}{x(x+2)(x^2+1)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-7x^2 + x - 10}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{-10}{2 \cdot 1} = -5$$

7. Calcula: $\lim\limits_{x \to 7} \left(\dfrac{x^2 - 7x + 4}{x - 3} \right)^{\frac{x+1}{x-7}}$

$$\lim_{x \to 7} \left(\frac{x^2 - 7x + 4}{x - 3} \right)^{\frac{x+1}{x-7}} = e^{\lim\limits_{x \to 7} \left[\left(\frac{x^2 - 7x + 4}{x - 3} - 1\right) \cdot \frac{x+1}{x-7}\right]} = e^{\lim\limits_{x \to 7} \left(\frac{x^2 - 8x + 7}{x - 3} \cdot \frac{x+1}{x-7}\right)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x \to 7} \frac{(x-7)(x-1)(x+1)}{(x-3)(x-7)}} = e^{\lim\limits_{x \to 7} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-3)}} = e^{12}$$

Página 239

1. Encuentra cuatro intervalos distintos en cada uno de los cuales la ecuación: $2x^4 - 14x^2 + 14x - 1 = 0$ tenga una raíz.

Consideramos la función $f(x) = 2x^4 - 14x^2 + 14x - 1$.

Tenemos que $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ y que:

$\left.\begin{array}{l} f(-4) = 231 > 0 \\ f(-3) = -7 < 0 \end{array}\right\}$ Hay una raíz en $(-4, -3)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = -1 < 0 \\ f(1) = 1 > 0 \end{array}\right\} \text{ Hay una raíz en } (0, 1).$$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1 > 0 \\ f(1{,}5) = -1{,}375 < 0 \end{array}\right\} \text{ Hay una raíz en } (1; 1{,}5).$$

$$\left.\begin{array}{l} f(1{,}5) = -1{,}375 < 0 \\ f(2) = 3 > 0 \end{array}\right\} \text{ Hay una raíz en } (1{,}5; 2).$$

2. Comprueba que las funciones $e^x + e^{-x} - 1$ y $e^x - e^{-x}$ se cortan en algún punto.

Consideramos la función diferencia:

$$F(x) = e^x + e^{-x} - 1 - (e^x - e^{-x}) = e^x + e^{-x} - 1 - e^x + e^{-x} = 2e^{-x} - 1$$

$F(x)$ es una función continua. Además:

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 1 > 0 \\ f(1) = -0{,}26 < 0 \end{array}\right\} \text{ Signo de } F(0) \neq \text{ signo de } F(1).$$

Por el teorema de Bolzano, existe $c \in (0,1)$ tal que $F(c) = 0$; es decir, existe $c \in (0, 1)$ tal que las dos funciones se cortan en ese punto.

3. Justifica cuáles de las siguientes funciones tienen máximo y mínimo absoluto en el intervalo correspondiente:

a) $x^2 - 1$ en $[-1, 1]$

b) x^2 en $[-3, 4]$

c) $1/(x - 1)$ en $[2, 5]$

d) $1/(x - 1)$ en $[0, 2]$

e) $1/(1 + x^2)$ en $[-5, 10]$

a) $f(x) = x^2 - 1$ es continua en $[-1, 1]$. Por el teorema de Weierstrass, podemos asegurar que tiene un máximo y un mínimo absolutos en ese intervalo.

b) $f(x) = x^2$ es continua en $[-3, 4]$. Por tanto, también tiene un máximo y un mínimo absolutos en ese intervalo.

c) $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$ es continua en $[2, 5]$. Por tanto, tiene un máximo y un mínimo absolutos en ese intervalo.

d) $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$ *no* es continua en $[0, 2]$, pues es discontinua en $x = 1$. No podemos asegurar que tenga máximo y mínimo absolutos en ese intervalo. De hecho, no tiene ni máximo ni mínimo absolutos, puesto que:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$$

e) $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ es continua en $[-5, 10]$. Por tanto, tiene máximo y mínimo absolutos en ese intervalo.

Página 245

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

1 **Sabiendo que $\textit{lím } a_n = +\infty$, $\textit{lím } b_n = -\infty$ y $\textit{lím } c_n = 3$, di en cuáles de los siguientes casos hay indeterminación.**

En los casos en que no la haya, di cuál es el límite cuando $x \to +\infty$:

a) $a_n + b_n$ **b)** $b_n + c_n$

c) $\dfrac{a_n}{c_n}$ **d)** $\dfrac{a_n}{b_n}$

e) $(a_n)^{b_n}$ **f)** $[3 - c_n] \cdot a_n$

g) $\dfrac{b_n}{3 - c_n}$ **h)** $\left(\dfrac{3}{c_n}\right)^{b_n}$

a) $\textit{lím}\left(a_n + b_n\right) = \textit{lím}\, a_n + \textit{lím}\, b_n = +\infty + (-\infty) =$

$= +\infty - (+\infty) \;\to\;$ Indeterminación.

b) $\textit{lím}\left(b_n + c_n\right) = \textit{lím}\, b_n + \textit{lím}\, c_n = -\infty + 3 = -\infty$

c) $\textit{lím}\, \dfrac{a_n}{c_n} = \dfrac{+\infty}{3} = +\infty$

d) $\textit{lím}\, \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{+\infty}{-\infty} \;\to\;$ Indeterminación.

e) $\textit{lím}\, [a_n]^{b_n} = 3^{-\infty} = \dfrac{1}{3^{+\infty}} = 0$

f) $\textit{lím}\, [3 - c_n] \cdot a_n = 0 \cdot (+\infty) \;\to\;$ Indeterminación.

g) $\textit{lím}\, \dfrac{b_n}{3 - c_n} = \dfrac{-\infty}{(0)} = \pm\infty$ (puede ser $+\infty$ o $-\infty$).

h) $\textit{lím}\left[\dfrac{3}{c_n}\right]^{b_n} = 1^{-\infty} \;\to\;$ Indeterminación.

2 **Calcula los límites cuando $x \to -\infty$ de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \dfrac{2x + 5}{2 - x}$ **b)** $g(x) = \dfrac{10x - 5}{x^2 + 1}$

c) $h(x) = \dfrac{3x^2 + x - 4}{2x + 3}$ **d)** $i(x) = \dfrac{x^3 + 2x - 3}{7 + 5x^3}$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x+5}{2-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x+5}{2+x} = -2$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{10x-5}{x^2+1} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2+x-4}{2x+3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2-x-4}{-2x+3} = -\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3+2x-3}{7+5x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^3-2x-3}{7-5x^3} = \dfrac{1}{5}$

3 Calcula los siguientes límites:

a) $\boldsymbol{\lim \dfrac{\sqrt{3n^2+6n}}{2n+1}}$ **b)** $\boldsymbol{\lim \sqrt{\dfrac{5n^2-7}{n+1}}}$

c) $\boldsymbol{\lim \dfrac{1+\sqrt{n}}{2n-3}}$ **d)** $\boldsymbol{\lim \dfrac{3n}{\sqrt{n^3+2}}}$

a) $\lim \dfrac{\sqrt{3n^2+6n}}{2n+1} = \lim \dfrac{\sqrt{3}\,n}{2n} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\lim \sqrt{\dfrac{5n^2-7}{n+1}} = +\infty$

c) $\lim \dfrac{1+\sqrt{n}}{2n-3} = 0$

d) $\lim \dfrac{3n}{\sqrt{n^3+2}} = 0$

4 Calcula estos límites:

a) $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - x^3)}$ **b)** $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+1}{e^x}}$

c) $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x+7}\right)}$ **d)** $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x}}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - x^3) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+1}{e^x} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x+7}\right) = +\infty$

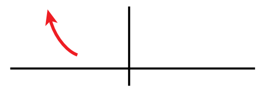
d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x} = 0$

5 **Calcula los siguientes límites y representa gráficamente los resultados obtenidos:**

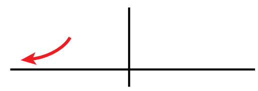
a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (0{,}5^x + 1)$ **b)** $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^{x+1}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^x$ **d)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^{1-3x}$

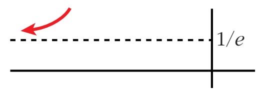
a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (0{,}5^x + 1) = \lim\limits_{x \to +\infty} (0{,}5^{-x} + 1) = +\infty$



b) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^{x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} 2^{-x+1} = 0$

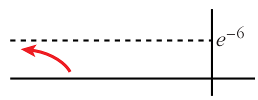


c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{-x} = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$



d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^{1-3x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{2}{x}\right)^{1+3x} =$

$= e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{2}{x} - 1\right) \cdot (1 + 3x)} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{-2 - 6x}{x}\right)} = e^{-6} = \dfrac{1}{e^6}$



6 **Halla:**

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 4}\right)$ **b)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} + x\right)$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 4}\right) =$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 4}\right)\left(\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 4}\right)}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 4}} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{(x^2 + 2x) - (x^2 - 4)}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 4}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x + 4}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 4}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-2x + 4}{\sqrt{x^2 - 2x} + \sqrt{x^2 - 4}} = \frac{-2}{1 + 1} = \frac{-2}{2} = -1$$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} + x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right) =$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right)\left(\sqrt{x^2 + 1} + x\right)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0$$

7 **Sabiendo que:**

$$\lim_{x \to 2} p(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to 2} q(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2} r(x) = 3 \qquad \lim_{x \to 2} s(x) = 0$$

di, en los casos que sea posible, el valor de los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to 2} \frac{s(x)}{p(x)}$ **b)** $\lim_{x \to 2} [s(x) \cdot q(x)]$

c) $\lim_{x \to 2} [s(x)]^{p(x)}$ **d)** $\lim_{x \to 2} [p(x) - 2q(x)]$

a) $\lim_{x \to 2} \frac{s(x)}{p(x)} = \frac{0}{+\infty} = 0$

b) $\lim_{x \to 2} [s(x) \cdot q(x)] = 0 \cdot (-\infty) \quad \to \quad$ Indeterminado.

c) $\lim_{x \to 2} [s(x)]^{p(x)} = 0^{+\infty} = 0$

d) $\lim_{x \to 2} [p(x) - 2q(x)] = +\infty - 2\,(-\infty) = +\infty + (+\infty) = +\infty$

8 **Calcula:**

a) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2 + 3}{x^3} - \frac{1}{x} \right)$ **b)** $\lim_{x \to 1} \left[\frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x\,(x-1)} \right]$

a) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2 + 3}{x^3} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 3 - x^2}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{3}{x^3} = \frac{3}{(0)}.$

Hallamos los límites laterales:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{3}{x^3} = -\infty; \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{3}{x^3} = +\infty.$$

b) $\lim_{x \to 1} \left[\frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x\,(x-1)} \right] = \lim_{x \to 1} \frac{2x - (x-1)}{x(x-1)^2} = \lim_{x \to 1} \frac{2x - x + 1}{x(x-1)^2} =$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x+1}{x(x-1)^2} = \frac{2}{0}$$

Hallamos los límites laterales:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x+1}{x(x-1)^2} = +\infty; \quad \lim_{x \to 1^+} \frac{x+1}{x(x-1)^2} = +\infty.$$

9 **Calcula el límite de las siguientes funciones cuando $x \to +\infty$:**

a) $f(x) = \dfrac{5x^2 - 2x + 1}{(2x-1)^2}$ **b)** $g(x) = \dfrac{x + \log x}{\log x}$

c) $h(x) = \dfrac{3 + 2\sqrt{x}}{\sqrt{2x+1}}$ **d)** $i(x) = \dfrac{3 \cdot 2^x}{2^x + 1}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^2 - 2x + 1}{(2x-1)^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^2 - 2x + 1}{4x^2 - 4x + 1} = \dfrac{5}{4}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + \log x}{\log x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x}{\log x} + 1\right) = +\infty + 1 = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3 + 2\sqrt{x}}{\sqrt{2x+1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{2}\,\sqrt{x}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3 \cdot 2^x}{2^x + 1} = 3$

Página 246

10 **Calcula los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 - 5x}{x+1} - \dfrac{3x}{2}\right)$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - \sqrt{x^4 + 2x})$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1{,}2^x - \dfrac{3x^2}{x+1}\right)$ **d)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x+4}{2x+5}\right)^{x-1}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 - 5x}{x+1} - \dfrac{3x}{2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x^2 - 10x - 3x(x+1)}{2(x+1)}\right) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - 10x - 3x^2 - 3x}{2x+2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^2 - 13x}{2x+2} = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - \sqrt{x^4 + 2x}) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x^2 - \sqrt{x^4 + 2x})(x^2 + \sqrt{x^4 + 2x})}{x^2 + \sqrt{x^4 + 2x}} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^4 - (x^4 + 2x)}{x^2 + \sqrt{x^4 + 2x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^4 - x^4 - 2x}{x^2 + \sqrt{x^4 + 2x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x}{x^2 + \sqrt{x^4 + 2x}} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1{,}2^x - \dfrac{3x^2}{x+1}\right) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x+4}{2x+5}\right)^{x-1} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{+\infty} = +\infty$

11 **Calcula:**

a) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \left[\frac{3}{x^2 - 5x + 6} - \frac{4}{x - 2} \right]$ **b)** $\displaystyle\lim_{x \to 2} \left(\frac{1 - \sqrt{3 - x}}{x - 2} \right)$

c) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sqrt{x + 9} - 3}{x^2} \right)$ **d)** $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (2x + 1 - \sqrt{4x^2 + 1})$

a) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \left[\frac{3}{x^2 - 5x + 6} - \frac{4}{x - 2} \right] = \lim_{x \to 2} \left[\frac{3}{(x - 2)(x - 3)} - \frac{4}{(x - 2)} \right] =$

$\displaystyle = \lim_{x \to 2} \frac{3 - 4(x - 3)}{(x - 2)(x - 3)} = \lim_{x \to 2} \frac{3 - 4x + 12}{(x - 2)(x - 3)} = \lim_{x \to 2} \frac{-4x + 15}{(x - 2)(x - 3)} = \frac{7}{(0)}$

Hallamos los límites laterales:

$\displaystyle\lim_{x \to 2^-} \frac{-4x + 15}{(x - 2)(x - 3)} = +\infty; \quad \lim_{x \to 2^+} \frac{-4x + 15}{(x - 2)(x - 3)} = -\infty$

b) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{1 - \sqrt{3 - x}}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(1 - \sqrt{3 - x})(1 + \sqrt{3 - x})}{(x - 2)(1 + \sqrt{3 - x})} =$

$\displaystyle = \lim_{x \to 2} \frac{1 - (3 - x)}{(x - 2)(1 + \sqrt{3 - x})} = \lim_{x \to 2} \frac{1 - 3 + x}{(x - 2)(1 + \sqrt{3 - x})} =$

$\displaystyle = \lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{(x - 2)(1 + \sqrt{3 - x})} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{1 + \sqrt{3 - x}} = \frac{1}{2}$

c) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x + 9} - 3}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{x + 9} - 3)(\sqrt{x + 9} + 3)}{x^2(\sqrt{x + 9} + 3)} = \lim_{x \to 0} \frac{x + 9 - 9}{x^2(\sqrt{x + 9} + 3)} =$

$\displaystyle = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x^2(\sqrt{x + 9} + 3)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x(\sqrt{x + 9} + 3)} = \frac{1}{(0)}$

Hallamos los límites laterales:

$\displaystyle\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x(\sqrt{x + 9} + 3)} = -\infty; \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x(\sqrt{x + 9} + 3)} = +\infty$

d) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (2x + 1 - \sqrt{4x^2 + 1}) = \lim_{x \to +\infty} \frac{(2x + 1 - \sqrt{4x^2 + 1})(2x + 1 + \sqrt{4x^2 + 1})}{(2x + 1 + \sqrt{4x^2 + 1})} =$

$\displaystyle = \lim_{x \to +\infty} \frac{(2x + 1)^2 - (4x^2 + 1)}{(2x + 1 + \sqrt{4x^2 + 1})} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2 + 4x + 1 - 4x^2 + 1}{(2x + 1 + \sqrt{4x^2 + 1})} =$

$\displaystyle = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x + 2}{(2x + 1 + \sqrt{4x^2 + 1})} = \frac{4}{2 + 2} = \frac{4}{4} = 1$

12 **Averigua si estas funciones son continuas en $x = 2$:**

a) $f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{si } x < 2 \\ 6 - x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 2 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (3x - 2) = 4 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (6 - x) = 4 \\ f(2) = 6 - 2 = 4 \end{array}\right\}$ $f(x)$ es continua en $x = 2$, puesto que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$.

b) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x^2 - 1) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (2x + 1) = 5 \end{array}\right\}$ $f(x)$ *no* es continua en $x = 2$, puesto que no existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

13 **S** **Estudia la continuidad de estas funciones:**

a) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 1 \\ \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x < 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

a) • En $x \neq 1 \;\to\; f(x)$ es continua; puesto que e^x y $\ln x$ son continuas para $x < 1$ y $x \geq 1$, respectivamente.

• En $x = 1$: $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} e^x = e \neq \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (\ln x) = 0$

No es continua en $x = 1$, pues no existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

b) El dominio de la función es $D = \mathbb{R} - \{0\}$.

• Si $x \neq 0$ y $x \neq 1 \;\to\;$ La función es continua.

• En $x = 0$: Es discontinua, puesto que $f(x)$ no está definida para $x = 0$. Además, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$. Hay una asíntota vertical en $x = 0$.

• En $x = 1$: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (2x - 1) = 1 \\ f(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 2 - 1 = 1 \end{array}\right\}$ $f(x)$ es continua en $x = 1$, pues $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$.

PARA RESOLVER

14 **a) Calcula el límite de la función $f(x)$ cuando $x \to 0$, $x \to 2$, $x \to 3$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$:**

$$f(x) = \frac{x - 3}{x^2 - 5x + 6}$$

b) Representa gráficamente los resultados.

a) $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-5x+6} = \dfrac{x-3}{(x-3)(x-2)}$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \dfrac{-3}{6} = \dfrac{-1}{2}$

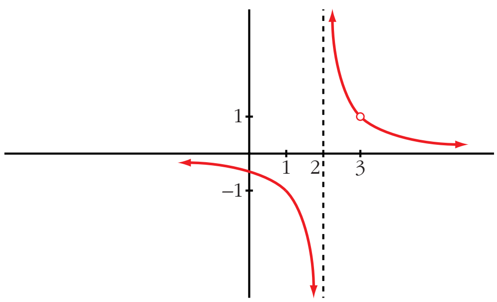
$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{1}{(0)}$.

Hallamos los límites laterales: $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{x-2} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

b)



15
S

a) Calcula el límite de la función $y = \dfrac{x^2-9}{x^2-3x}$ en los puntos en los que no está definida.

b) Halla su límite cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$ y representa la función con la información que obtengas.

c) ¿Cuáles son los puntos de discontinuidad de esta función?

a) El dominio de la función es: $D = \mathbb{R} - \{0, 3\}$, pues el denominador se anula en:

$$x^2 - 3x = 0 \;\to\; x(x-3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

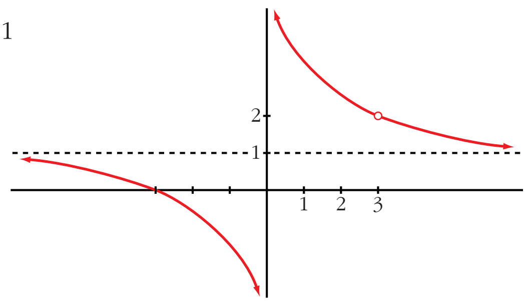
$$y = \frac{x^2-9}{x^2-3x} = \frac{(x+3)(x-3)}{x(x-3)}$$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x+3}{x} = \dfrac{3}{(0)}$.

Hallamos los límites laterales: $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x+3}{x} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x+3}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x+3}{x} = \dfrac{6}{3} = 2$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+3}{x} = 1$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x+3}{x} = 1$



c) La función es discontinua en $x = 0$ (tiene una asíntota vertical) y en $x = 3$ (no está definida; tiene una discontinuidad evitable).

16 **Determina el valor de a para que se verifique $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + ax + 1} - x) = 2$.**

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + ax + 1} - x\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + ax + 1} - x\right)\left(\sqrt{x^2 + ax + 1} + x\right)}{\sqrt{x^2 + ax + 1} + x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + ax + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + ax + 1} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{ax + 1}{\sqrt{x^2 + ax + 1} + x} = \frac{a}{1+1} = \frac{a}{2} = 2 \;\rightarrow\; a = 4$$

17 **Halla los puntos de discontinuidad de la función $y = \dfrac{2}{x-3} - \dfrac{12}{x^2-9}$ y di si en alguno de ellos la discontinuidad es evitable.**

$$y = \frac{2}{x-3} - \frac{12}{x^2-9} = \frac{2(x+3) - 12}{(x-3)(x+3)} = \frac{2x + 6 - 12}{(x-3)(x+3)} = \frac{2x - 6}{(x-3)(x+3)} =$$

$$= \frac{2(x-3)}{(x-3)(x+3)}$$

La función es discontinua en $x = 3$ y en $x = -3$; pues no está definida para esos valores.

- En $x = -3$: $\lim\limits_{x \to -3^-} \dfrac{2(x-3)}{(x-3)(x+3)} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -3^+} \dfrac{2}{(x+3)} = +\infty$

  Hay una asíntota vertical en $x = -3$, la discontinuidad no es evitable.

- En $x = 3$: $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2}{(x+3)} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

  Luego, en $x = 3$, la discontinuidad es evitable.

18 **S** **Calcula el valor que debe tener k para que las siguientes funciones sean continuas:**

a) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \le 2 \\ k - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} x + k & \text{si } x \le 0 \\ x^2 - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) • Si $x \neq 2$, la función es continua.

• En $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x + 1) = 3 \\[2ex] \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (k - x) = k - 2 \\[2ex] f(2) = 2 + 1 = 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Para que sea continua, ha de ser:} \\ k - 2 = 3 \;\; \to \;\; k = 5\end{array}$$

b) • Si $x \neq 0$, la función es continua.

• En $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x + k) = k \\[2ex] \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 - 1) = -1 \\[2ex] f(0) = 0 + k = k \end{array}\right\} \text{Para que sea continua, ha de ser: } k = -1$$

19 **S** **Calcula el valor de k para que cada una de las siguientes funciones sea continua:**

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ k & \text{si } x = 1 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ k & \text{si } x = 1 \end{cases}$

a) • Si $x \neq 1$, la función es continua.

• Si $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x^3 + x^2 + x + 1)(x - 1)}{(x - 1)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} (x^3 + x^2 + x + 1) = 4$$

$f(1) = k$

Para que sea continua, ha de ser $k = 4$.

b) • Si $x \neq 1$, la función es continua.

• Si $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2}$$

$f(1) = k$

Para que sea continua, ha de ser $k = \dfrac{1}{2}$.

20 S **Estudia la continuidad de cada una de las siguientes funciones para los distintos valores del parámetro a:**

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{si } x \le 2 \\ a - x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} e^{ax} & \text{si } x \le 0 \\ x + 2a & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) • En $x \neq 2$, la función es continua.

• En $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x^2 + ax) = 4 + 2a \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (a - x^2) = a - 4 \\ f(2) = 4 + 2a \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Para que sea continua, ha de ser:} \\ 4 + 2a = a - 4 \;\; \to \;\; a = -8 \end{array}$$

Por tanto, la función es continua si $a = -8$, y es discontinua (en $x = 2$) si $a \neq -8$.

b) • En $x \neq 0$, la función es continua.

• En $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} e^{ax} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x + 2a) = 2a \\ f(0) = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Para que sea continua, ha de ser:} \\ 1 = 2a \;\; \to \;\; a = \dfrac{1}{2} \end{array}$$

Por tanto, la función es continua si $a = \dfrac{1}{2}$, y es discontinua (en $x = 0$) si $a \neq \dfrac{1}{2}$.

Página 247

21 S **Estudia la continuidad de esta función:**

$$f(x) = \begin{cases} |x + 2| & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 \le x < 1 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

• Si $x \neq -1$ y $x \neq 1$ $\to$ la función es continua.

• Si $x = -1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} |x + 2| = 1 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} x^2 = 1 \\ f(-1) = 1 \end{array}\right\} \text{La función es continua en } x = -1.$$

- Si $x = 1 \;\rightarrow\;$ No es continua, pues no está definida en $x = 1$; no existe $f(1)$. Además:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} x^2 = 1 \\[2ex] \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (2x + 1) = 3\end{array}\right\} \text{ La discontinuidad es de salto (finito).}$$

22 **Un comerciante vende un determinado producto. Por cada unidad de producto cobra la cantidad de 5 €. No obstante, si se le encargan más de 10 unidades, disminuye el precio por unidad, y por cada x unidades cobra:**

$$C(x) = \begin{cases} 5x & \text{si } 0 < x \le 10 \\ \sqrt{ax^2 + 500} & \text{si } x > 10 \end{cases}$$

a) Halla a de forma que el precio varíe de forma continua al variar el número de unidades que se compran.

b) ¿A cuánto tiende el precio de una unidad cuando se compran “muchísimas” unidades?

El precio de una unidad es $C(x)/x$.

a) $\lim\limits_{x \to 10^-} C(x) = \lim\limits_{x \to 10^-} (5x) = 50$

$\lim\limits_{x \to 10^+} C(x) = \lim\limits_{x \to 10^+} \sqrt{ax^2 + 500} = \sqrt{100a + 500}$

$C(10) = 50$

Para que sea continua, ha de ser:

$\sqrt{100a + 500} = 50 \;\rightarrow\; 100a + 500 = 2\,500 \;\rightarrow\; 100a = 2\,000 \;\rightarrow\; a = 20$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{C(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{ax^2 + 500}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{20x^2 + 500}}{x} = \sqrt{20} \approx 4{,}47$ €

23 **Dada la función $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 1 - x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$:**

a) Estudia su continuidad.

b) Halla $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

a) • Si $x \ne 0$, la función es continua.

• En $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} e^x = 1 \\[2ex] \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (1 - x) = 1 \\[2ex] f(0) = 1 - 0 = 1\end{array}\right\} \text{ También es continua en } x = 0.$$

Por tanto, $f(x)$ es continua.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (1 - x) = -\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} e^x = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{+\infty}} = 0$$

24 **S** **En el laboratorio de Biología de la universidad, han determinado que el tamaño T de los ejemplares de una cierta bacteria (medido en micras) varía con el tiempo t, siguiendo la ley:**

$$T(t) = \begin{cases} \sqrt{t + a} & \text{si } t < 8 \text{ horas} \\ \dfrac{-3 + \sqrt{3t - 15}}{t - 8} & \text{si } t > 8 \text{ horas} \end{cases}$$

El parámetro a es una variable biológica cuya interpretación trae de cabeza a los científicos, pero piensan que puede haber un valor para el cual el crecimiento se mantenga continuo en $t = 8$.

a) Decide la cuestión.

b) Investiga cuál llegará a ser el tamaño de una bacteria si se la cultiva indefinidamente.

a) $\lim\limits_{t \to 8^-} T(t) = \lim\limits_{t \to 8^-} \sqrt{t + a} = \sqrt{8 + a}$

$$\lim_{t \to 8^+} T(t) = \lim_{t \to 8^+} \frac{-3 + \sqrt{3t - 15}}{t - 8} = \lim_{t \to 8^+} \frac{\sqrt{3t - 15} - 3}{t - 8} =$$

$$= \lim_{t \to 8^+} \frac{\left(\sqrt{3t - 15} - 3\right)\left(\sqrt{3t - 15} + 3\right)}{(t - 8)\left(\sqrt{3t - 15} + 3\right)} = \lim_{t \to 8^+} \frac{3t - 15 - 9}{(t - 8)\left(\sqrt{3t - 15} + 3\right)} =$$

$$= \lim_{t \to 8^+} \frac{3t - 24}{(t - 8)\left(\sqrt{3t - 15} + 3\right)} = \lim_{t \to 8^+} \frac{3(t - 8)}{(t - 8)\left(\sqrt{3t - 15} + 3\right)} =$$

$$= \lim_{t \to 8^+} \frac{3}{\sqrt{3t - 15} + 3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Para que $T(t)$ pueda ser continua, tendría que cumplirse que:

$$\sqrt{8 + a} = \frac{1}{2} \rightarrow 8 + a = \frac{1}{4} \rightarrow a = \frac{-31}{4}$$

Pero, si $a = \dfrac{-31}{4}$, quedaría $T(t) = \sqrt{t - \dfrac{31}{4}}$ si $t < 8$.

Esto daría lugar a que $T(t)$ no existiera para $t \le \dfrac{31}{4} = 7{,}75$ horas.

Por tanto, *no* hay ningún valor de a para el que el crecimiento se mantenga continuo.

b) $\lim\limits_{t \to +\infty} T(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{-3 + \sqrt{3t - 15}}{t - 8} = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \approx 1{,}73$ micras.

25 **Calcula el límite de las siguientes funciones cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$, definiéndolas previamente por intervalos:**

a) $f(x) = |x - 3| - |x|$ **b)** $f(x) = |2x - 1| + x$ **c)** $f(x) = \dfrac{x + 1}{|x|}$

a) • Si $x \le 0$: $|x - 3| - |x| = -(x - 3) - (-x) = -x + 3 + x = 3$

• Si $0 < x \le 3$: $|x - 3| - |x| = -(x - 3) - x = -2x + 3$

• Si $x > 3$: $|x - 3| - |x| = (x - 3) - x = -3$

Luego: $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x \le 0 \\ -2x + 3 & \text{si } 0 < x \le 3 \\ -3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -3; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$

b) • Si $2x - 1 \le 0 \;\to\; x \le \dfrac{1}{2}$

$|2x - 1| + x = -(2x - 1) + x = -2x + 1 + x = -x + 1$

• Si $2x - 1 > 0 \;\to\; x > \dfrac{1}{2}$

$|2x - 1| + x = (2x - 1) + x = 3x - 1$

Luego: $f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } x \le \dfrac{1}{2} \\ 3x - 1 & \text{si } x > \dfrac{1}{2} \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (3x - 1) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-x + 1) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x + 1) = +\infty$

c) • Si $x < 0$: $\dfrac{x + 1}{|x|} = \dfrac{x + 1}{-x}$

• Si $x > 0$: $\dfrac{x + 1}{|x|} = \dfrac{x + 1}{x}$

Luego: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x + 1}{-x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x + 1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x + 1}{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x + 1}{x} = -1$

26 **S** **Se define la función f del modo siguiente:**

$$f(x) = \begin{cases} \ln x - 1 & \text{si } x > 1 \\ 2x^2 + ax + b & \text{si } x \le 1 \end{cases}$$

Encuentra los valores de a y b para que la función sea continua y su gráfica pase por el origen de coordenadas.

- Para que la gráfica de $f(x)$ pase por el origen de coordenadas, ha de ser $f(0) = 0$, es decir: $f(0) = b = 0$
- Para que la función sea continua (para $x \neq 1$, es una función continua), tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (2x^2 + ax) = 2 + a \\ \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (\ln x - 1) = -1 \\ \\ f(1) = 2 + a \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Han de ser iguales, es decir:} \\ 2 + a = -1 \;\;\rightarrow\;\; a = -3 \end{array}$$

Por tanto, si $a = -3$ y $b = 0$, la función es continua; y su gráfica pasa por el origen de coordenadas.

27 **Calcula:** $\lim\limits_{x \to 0} \left[\dfrac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{3x} \right]$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{3x} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}\right)\left(\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}\right)}{3x\left(\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(1 + x) - (1 - x)}{3x\left(\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + x - 1 + x}{3x\left(\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2x}{3x\left(\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{2}{3\left(\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}\right)} = \frac{2}{3 \cdot 2} = \frac{1}{3}$$

28 **Dada $f(x) = \dfrac{|x|}{x + 1}$, justifica que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$.**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{x + 1} & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{x}{x + 1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x + 1} = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x}{x + 1} = -1$$

29 **Estudia la continuidad en $x = 0$ de la función: $y = 2x + \dfrac{|x|}{x}$**

¿Qué tipo de discontinuidad tiene?

En $x = 0$, la función no está definida, luego es discontinua. Como:

$y = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$, entonces:

$\lim\limits_{x \to 0^-} (2x - 1) = -1; \quad \lim\limits_{x \to 0^+} (2x + 1) = 1$

Por tanto, hay una discontinuidad de salto (finito) en $x = 0$.

CUESTIONES TEÓRICAS

30
S
Sea la función $f(x) = x^2 + 1$.

¿Podemos asegurar que dicha función toma todos los valores del intervalo [1, 5]? En caso afirmativo, enuncia el teorema que lo justifica.

$f(x)$ es continua en [0, 2] y $f(0) = 1$, $f(2) = 5$.

Por tanto, por el teorema de los valores intermedios, la función toma, en el intervalo [0, 2], todos los valores del intervalo [1, 5].

31
S
Da una interpretación geométrica del teorema de Bolzano y utilízalo para demostrar que las gráficas de $f(x) = x^3 + x^2$ y $g(x) = 3 + \cos x$ se cortan en algún punto.

- Interpretación geométrica: Si una función $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado, y en sus extremos toma valores de distinto signo, entonces, con seguridad, corta al eje X en ese intervalo.
- Para las dos funciones dadas, $f(x) = x^3 + x^2$ y $g(x) = 3 + \cos x$, consideramos la función diferencia: $f(x) - g(x) = x^3 + x^2 - 3 - \cos x$

  Como $f(x)$ y $g(x)$ son continuas, también lo es $f(x) - g(x)$.

  Además: $\begin{cases} f(0) - g(0) = -4 \quad \to \quad f(0) - g(0) < 0 \\ f(2) - g(2) \approx 9{,}42 \quad \to \quad f(2) - g(2) > 0 \end{cases}$

  Por tanto, existe un número $c \in (0, 2)$ tal que $f(c) - g(c) = 0$ (aplicando el teorema de Bolzano), es decir, $f(c) = g(c)$.

Página 248

32
S
Sea la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$.

El segundo miembro de la igualdad carece de sentido cuando $x = 2$. ¿Cómo elegir el valor de $f(2)$ para que la función f sea continua en ese punto?

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = \lim_{x \to 2} (x+2) = 4$$

Para que f sea continua en $x = 2$, debemos elegir $f(2) = 4$.

33 **De una función g se sabe que es continua en el intervalo cerrado [0, 1] y que para $0 < x \le 1$ es:**

$$g(x) = \frac{x^2 + x}{x}$$

¿Cuánto vale $g(0)$?

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x(x+1)}{x} = \lim_{x \to 0^+} (x+1) = 1.$$

Por tanto, $g(0) = 1$.

34
S **Dada la función:**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-4}{4} & \text{si } 0 \le x \le \dfrac{1}{2} \\ e^{-x^2} & \text{si } \dfrac{1}{2} \le \quad \le 1 \end{cases}$$

observamos que f está definida en [0, 1] y que verifica $f(0) = -1 < 0$ y $f(1) = e^{-1} > 0$, pero no existe ningún $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = 0$. ¿Contradice el teorema de Bolzano? Razona la respuesta.

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to 1/2^-} f(x) = \lim_{x \to 1/2^-} \frac{x - 4}{4} = \frac{-7}{8} \\ \displaystyle\lim_{x \to 1/2^+} f(x) = \lim_{x \to 1/2^+} e^{-x^2} = e^{-1/4} \end{array}\right\}$$

$f(x)$ *no* es continua en $x = \dfrac{1}{2}$

Por tanto, f no es continua en el intervalo [0, 1]; luego no cumple las hipótesis del teorema de Bolzano en dicho intervalo.

35
S **Se sabe que $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y que $f(a) = 3$ y $f(b) = 5$. ¿Es posible asegurar que para algún c del intervalo $[a, b]$ cumple que $f(c) = 7$? Razona la respuesta y pon ejemplos.**

No lo podemos asegurar. Por ejemplo:

$f(x) = x + 3$ cumple que $f(0) = 3$ y $f(2) = 5$. Sin embargo, no existe $c \in [0, 2]$ tal que $f(c) = 7$, ya que: $f(c) = c + 3 = 7 \;\rightarrow\; c = 4 \;\rightarrow\; c \notin [0, 2]$.

36 **S** **Halla razonadamente dos funciones que no sean continuas en un punto x_0 de su dominio y tales que la función suma sea continua en dicho punto.**

Por ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \neq 2 \\ 2 & \text{si } x = 2 \end{cases} \quad \text{no es continua en } x = 2;$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases} \quad \text{no es continua en } x = 2;$$

pero la función suma, $f(x) + g(x) = 3x$, sí es continua en $x = 2$.

37 **S** **¿Tiene alguna raíz real la siguiente ecuación?: *sen* $x + 2x + 1 = 0$**

Si la respuesta es afirmativa, determina un intervalo de amplitud menor que 2 en el que se encuentre la raíz.

Consideramos la función $f(x) = sen\, x + 2x + 1$.

Tenemos que: $f(x)$ es continua en $[-1, 0]$.

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) \approx 1{,}84 < 0 \\ f(0) = 1 > 0 \end{array}\right\} \text{ signo de } f(1) \neq \text{signo de } f(0)$$

Por el teorema de Bolzano, podemos asegurar que existe $c \in (-1, 0)$ tal que $f(c) = 0$; es decir, la ecuación $sen\, x + 2x + 1 = 0$ tiene al menos una raíz en el intervalo $(-1, 0)$.

38 **S** **Demuestra que la ecuación $x^5 + x + 1 = 0$ tiene, al menos, una solución real.**

Consideramos la función $f(x) = x^5 + x + 1$.

Tenemos que: $f(x)$ es continua en $[-1, 0]$.

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) = -1 < 0 \\ f(0) = 1 > 0 \end{array}\right\} \text{ signo de } f(-1) \neq \text{signo de } f(0)$$

Por el teorema de Bolzano, podemos asegurar que existe $c \in (-1, 0)$ tal que $f(c) = 0$; es decir, la ecuación $x^5 + x + 1 = 0$ tiene al menos una raíz en el intervalo $(-1, 0)$.

39 **S** **Una ecuación polinómica de grado 3 es seguro que tiene alguna raíz real. Demuestra que es así, y di si ocurre lo mismo con las de grado 4.**

- Si $f(x)$ es un polinomio de grado 3, tenemos que:

— Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, entonces $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; y si

— $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, entonces $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

Por tanto, podemos encontrar k tal que: signo de $f(-k) \neq$ signo de $f(k)$.

Además, $f(x)$ es continua. Por el teorema de Bolzano, sabemos que $f(x)$ tiene al menos una raíz en el intervalo $(-k, k)$.

- Si $f(x)$ es un polinomio de grado 4 no ocurre lo mismo. Por ejemplo, $x^4 + 1 = 0$ no tiene ninguna raíz real; puesto que $x^4 + 1 > 0$ para cualquier valor de x.

40 S Si el término independiente de un polinomio en x es igual a –5 y el valor que toma el polinomio para $x = 3$ es 7, razona que hay algún punto en el intervalo (0, 3) en el que el polinomio toma el valor –2.

Si $f(x)$ es un polinomio, entonces es una función continua. El término independiente es igual a –5; es decir, $f(0) = -5$; y, además, $f(3) = 7$. Por tanto, aplicando el teorema de los valores intermedios, como $-5 < -2 < 7$, podemos asegurar que existe $c \in (0, 3)$ tal que $f(c) = -2$.

41 S La función $y = tg\ x$ toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ y, sin embargo, no se anula en él. ¿Contradice esto el teorema de Bolzano?

La función $y = tg\ x$ no es continua en $x = \frac{\pi}{2}$, que está en el intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$.

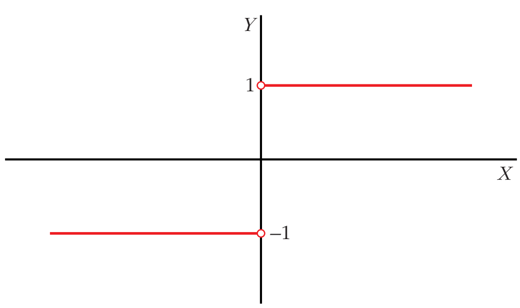
Por tanto, no podemos aplicar el teorema de Bolzano para dicho intervalo.

42 S Considera la función $f(x) = \frac{x}{|x|}$. Determina su dominio. Dibuja su gráfica y razona si se puede asignar un valor a $f(0)$ para que la función sea continua en todo $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad \text{Dominio} = \mathbb{R} - \{0\}$$

Como $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1 \neq \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$, no podemos asignar ningún valor a $f(0)$ para que la función sea continua en todo $\mathbb{R}$ (pues en $x = 0$ no lo es).

Gráfica:



43 **S** **Si existe el límite de una función $f(x)$ cuando $x \to a$, y si $f(x)$ es positivo cuando $x < a$, ¿podemos asegurar que tal límite es positivo? ¿Y que no es negativo? Justifica razonadamente las respuestas.**

Si $f(x) > 0$ cuando $x < a$, entonces, si existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, ha de ser $\lim\limits_{x \to a} f(x) \geq 0$.

Por tanto, podemos asegurar que el límite no es negativo (podría ser positivo o cero).

44 **S** **a) Comprueba que $\lim\limits_{x \to +\infty} [ln(x + 1) - ln(x)] = 0$.**

b) Calcula $\lim\limits_{x \to +\infty} x[ln(x + 1) - ln(x)]$.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} [ln\,(x + 1) - ln\,(x)] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)\right] = ln\ 1 = 0$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} x[ln\,(x + 1) - ln\,(x)] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[x\,ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^x\right] =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \left[ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x\right] = ln\ e = 1$

45 **S** **De dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ se sabe que son continuas en el intervalo $[a, b]$, que $f(a) > g(a)$ y que $f(b) < g(b)$.**

¿Puede demostrarse que existe algún punto c de dicho intervalo en el que se corten las gráficas de las dos funciones?

Consideramos la función $f(x) - g(x)$.

- Si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en $[a, b]$, entonces $f(x) - g(x)$ es continua en $[a, b]$.
- Si $f(a) > g(a)$, entonces $f(a) - g(a) > 0$.
- Si $f(b) < g(b)$, entonces $f(b) - g(b) < 0$.

Es decir, signo $[f(a) - g(a)] \neq$ signo $[f(b) - g(b)]$.

Por el teorema de Bolzano, podemos asegurar que existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) - g(c) = 0$, es decir, tal que $f(c) = g(c)$. (Las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ se cortan en $x = c$).

46 **S** **Si $f(x)$ es continua en [1, 9], $f(1) = -5$ y $f(9) > 0$, ¿podemos asegurar que $g(x) = f(x) + 3$ tiene al menos un cero en el intervalo [1, 9]?**

- Si $f(x)$ es continua en [1, 9], entonces $g(x) = f(x) + 3$ también será continua en [1, 9] (pues es suma de dos funciones continuas).
- Si $f(1) = -5$, entonces $g(1) = f(1) + 3 = -5 + 3 = -2 < 0$.
- Si $f(9) > 0$, entonces $g(9) = f(9) + 3 > 0$.

Es decir, signo de $g(1) \neq$ signo de $g(9)$.

Por el teorema de Bolzano, podemos asegurar que existe $c \in (1, 9)$ tal que $g(c) = 0$, es decir, la función $g(x)$ tiene al menos un cero en el intervalo $[1, 9]$.

47 **Escribe una definición para cada una de estas expresiones y haz una representación de f:**

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

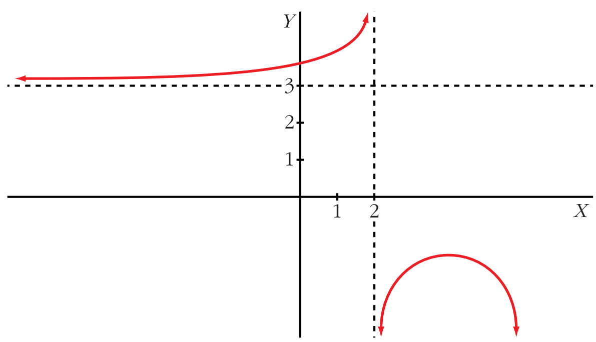
c) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$ **d)** $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$

a) Dado $\varepsilon > 0$, existe h tal que, si $x < -h$, entonces $|f(x) - 3| < \varepsilon$.

b) Dado k, podemos encontrar h tal que, si $x > h$, entonces $f(x) < -k$.

c) Dado k, podemos encontrar δ tal que, si $2 - \delta < x < 2$, entonces $f(x) > k$.

d) Dado k, podemos encontrar δ tal que, si $2 < x < 2 + \delta$, entonces $f(x) < -k$.



Página 249

48 **Si una función no está definida en $x = 3$, ¿puede ocurrir que $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 5$?**

¿Puede ser continua la función en $x = 3$?

Sí, puede ser que $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 5$, por ejemplo:

$f(x) = \dfrac{(x-3)(x+2)}{x-3}$ es tal que $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x-3)(x+2)}{x-3} = 5$; y $f(x)$ no está definida en $x = 3$.

Sin embargo, $f(x)$ no puede ser continua en $x = 3$ (pues no existe $f(3)$).

49 **De una función continua, f, sabemos que $f(x) < 0$ si $x < 2$ y $f(x) > 0$ si $x > 2$. ¿Podemos saber el valor de $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$?**

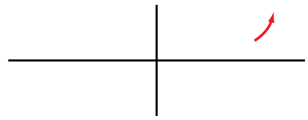
$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 0$

50 **Expresa simbólicamente cada una de estas frases y haz una representación gráfica de cada caso:**

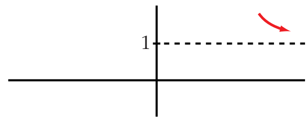
a) Podemos conseguir que $f(x)$ sea mayor que cualquier número K, por grande que sea, dando a x valores tan grandes como sea necesario.

b) Si pretendemos que los valores de $g(x)$ estén tan próximos a 1 como queramos, tendremos que dar a x valores suficientemente grandes.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



b) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$



PARA PROFUNDIZAR

51 **Estudia el comportamiento de cada una de estas funciones cuando x tiende a $+\infty$:**

a) $f(x) = x^3 - sen\ x$ **b)** $g(x) = \dfrac{cos\ x}{x^2 + 1}$

c) $h(x) = \dfrac{E[x]}{x}$ **d)** $j(x) = \dfrac{3x + sen\ x}{x}$

a) Como $-1 \le sen\ x \le 1$, entonces: $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - sen\ x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

b) Como $-1 \le cos\ x \le 1$, entonces: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{cos\ x}{x^2 + 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\pm 1}{x^2 + 1} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{E[x]}{x} = 1$

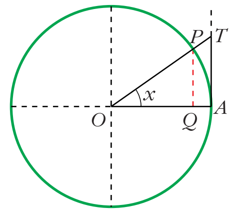
d) Como $-1 \le sen\ x \le 1$, entonces: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x + sen\ x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x}{x} = 3$

52 **Calcula:** $\lim\limits_{x \to 1} (x)^{1/(1 - x)}$

Como es del tipo 1^∞, podemos aplicar la regla:

$$\lim_{x \to 1} x^{1/(1 - x)} = e^{\lim\limits_{x \to 1} \left[(x - 1) \cdot \frac{1}{1 - x}\right]} = e^{\lim\limits_{x \to 1} (-1)} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

53 **En una circunferencia de radio 1, tomamos un ángulo AOP de x radiantes. Observa que:**



$\overline{PQ} = \text{sen } x$, $\overline{TA} = \text{tg } x$ y arco $\widehat{PA} = x$

Como:

$\overline{PQ} < \widehat{PA} < \overline{TA} \to \to \text{sen } x < x < \text{tg } x$.

A partir de esa desigualdad, prueba que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

Tenemos que $\text{sen } x < x < \text{tg } x$. Dividiendo entre $\text{sen } x$, queda:

$$1 < \frac{x}{\text{sen } x} < \frac{1}{\cos x} \quad \to \quad 1 > \frac{\text{sen } x}{x} > \cos x$$

Tomando límites cuando $x \to 0$, queda:

$$1 \geq \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} \geq 1; \text{ es decir: } \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1.$$

54 **Sabiendo que** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } x}{x} = 1$, **calcula:**

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{tg } x}{x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$

a) $$\lim_{x \to 0} \frac{\text{tg } x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x / \cos x}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\text{sen } x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) =$$

$$= 1 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1$$

b) $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\text{sen } x}{x} \right)^2 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{1 + \cos x} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

PARA PENSAR UN POCO MÁS

55 **a) Supongamos que f es continua en [0, 1] y que $0 < f(x) < 1$ para todo x de [0, 1]. Prueba que existe un número c de (0, 1) tal que $f(c) = c$.**

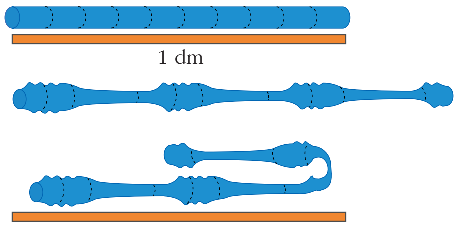
Haz una gráfica para que el resultado sea evidente.

☞ ***Aplica el teorema de Bolzano a la función $g(x) = f(x) - x$.***

b) Imagina una barra de plastilina de 1 dm de longitud. Se sitúa sobre un segmento de longitud 1 dm. A continuación, deformamos la barrita estirándola en algunos lugares y encogiéndola en otros.

Por último, volvemos a situar la barra deformada *dentro* del segmento, aunque podemos plegarla una o más veces.

Pues bien, podemos asegurar que *algún punto de la barra está exactamente en el mismo lugar en el que estaba.* $^{(*)}$



— **Llamando x a un punto cualquiera de la barra inicial, construye la gráfica de la función:**

$x \to f(x)$ = posición de x después de la transformación

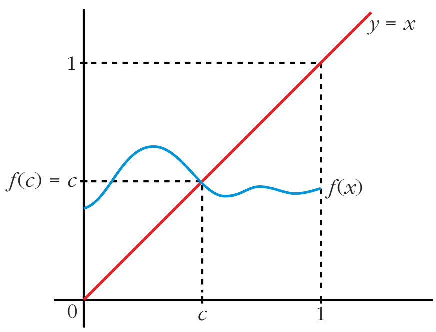
— **Relaciona $f(x)$ con la del apartado a).**

— **Demuestra la afirmación $^{(*)}$.**

a) Consideramos la función $g(x) = f(x) - x$. Tenemos que:

- $g(x)$ es continua en $[0, 1]$, pues es la diferencia de dos funciones continuas en $[0, 1]$.
- $g(0) = f(0) > 0$, pues $f(x) > 0$ para todo x de $[0, 1]$.
- $g(1) = f(1) - 1 < 0$, pues $f(x) < 1$ para todo x de $[0, 1]$.

Por el teorema de Bolzano, sabemos que existe $c \in (0, 1)$ tal que $g(c) = 0$, es decir, $f(c) - c = 0$, o bien $f(c) = c$.



b) Llamando x a un punto cualquiera de la barra inicial, construimos la función:

$x \to f(x)$ = "posición de x después de la transformación".

Tenemos que:

- f es continua en $[0, 1]$ (puesto que situamos la barra sobre un segmento de longitud 1 dm y solo la deformamos, no la rompemos).
- $0 < f(x) < 1$ para todo x de $[0, 1]$ (ya que situamos la barra deformada *dentro* del segmento).
- Aplicando a $f(x)$ los resultados obtenidos en el apartado a), tenemos que existe c de $(0, 1)$ tal que $f(c) = c$; es decir, existe algún punto de la barra que está exactamente en el mismo lugar que estaba.