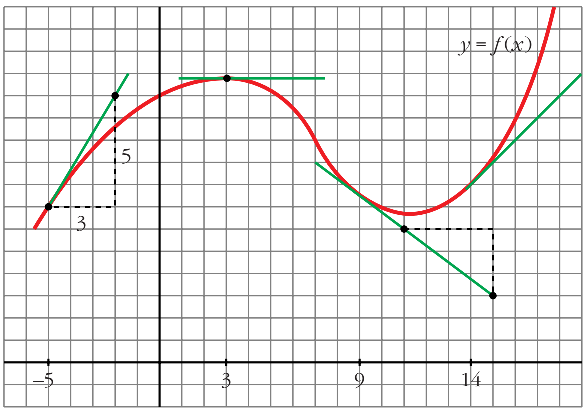
9 DERIVADAS. TÉCNICAS DE DERIVACIÓN

Página 250

Tangentes a una curva



■ **Halla, mirando la gráfica y las rectas trazadas, $f'(3)$, $f'(9)$ y $f'(14)$.**

$f'(3) = 0$; $f'(9) = \frac{-3}{4}$; $f'(14) = 1$

■ **Di otros tres puntos en los que la derivada sea positiva.**

La derivada también es positiva en $x = -4$, $x = -2$, $x = 0$…

■ **Di otro punto en el que la derivada sea cero.**

La derivada también es cero en $x = 11$.

■ **Di otros dos puntos en los que la derivada sea negativa.**

La derivada también es negativa en $x = 4$, $x = 5$…

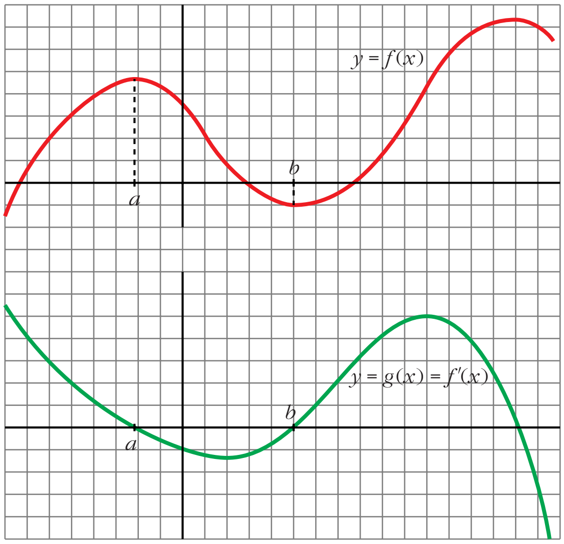
■ **Di un intervalo $[a, b]$ en el que se cumpla que "si $x \in [a, b]$, entonces $f'(x) > 0$".**

Por ejemplo, en el intervalo $[-5, 2]$ se cumple que, si $x \in [-5, 2]$, entonces $f'(x) > 0$.

Página 251

Función derivada

- **Continúa escribiendo las razones por las cuales $g(x)$ es una función cuyo comportamiento responde al de la derivada de $f(x)$.**



• En el intervalo (a, b), $f(x)$ es decreciente. Por tanto, su derivada es negativa. Es lo que le pasa a $g(x)$ en (a, b).

• La derivada de f en b es 0: $f'(b) = 0$. Y también es $g(b) = 0$.

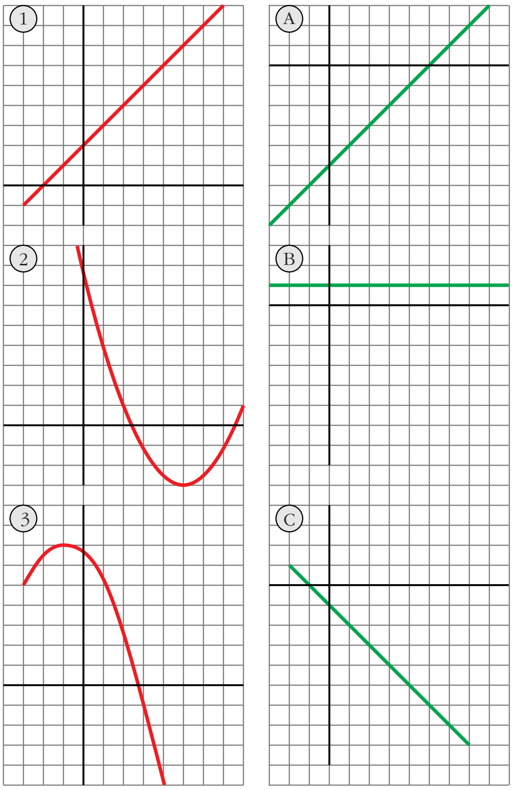
• En general:

$g(x) = f'(x) = 0$ donde $f(x)$ tiene tangente horizontal.

$g(x) = f'(x) > 0$ donde $f(x)$ es creciente.

$g(x) = f'(x) < 0$ donde $f(x)$ es decreciente.

- **Las tres gráficas de abajo, A, B, y C, son las funciones derivadas de las gráficas de arriba, 1, 2, y 3, pero en otro orden. Responde razonadamente cuál es la de cada cual.**



1) B

2) A

3) C

La derivada se anula en los puntos de tangente horizontal, es positiva donde la función es creciente, y es negativa donde la función decrece.

Página 257

1. Calcula la derivada de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$

b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

c) $f(x) = ln\,\dfrac{1-x}{1+x}$

d) $f(x) = \dfrac{1-tg\,x}{1+tg\,x}$

e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-tg\,x}{1+tg\,x}}$

f) $f(x) = ln\,\sqrt{e^{tg\,x}}$

g) $f(x) = \sqrt{3^{x+1}}$

h) $f(x) = log\,(sen\,x \cdot cos\,x)^2$

i) $f(x) = sen^2\,x + cos^2\,x + x$

j) $f(x) = sen\sqrt{x+1} \cdot cos\sqrt{x-1}$

k) $f(x) = arc\,sen\sqrt{x}$

l) $f(x) = sen\,(3x^5 - 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{2x})$

m) $f(x) = \sqrt{sen\,x + x^2 + 1}$

n) $f(x) = cos^2\sqrt[3]{x + (3-x)^2}$

a) $f'(x) = \dfrac{-1 \cdot (1+x) - (1-x) \cdot 1}{(1+x)^2} = \dfrac{-1-x-1+x}{(1+x)^2} = \dfrac{-2}{(1+x)^2}$

b) Utilizamos el resultado obtenido en a):

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}} \cdot \frac{-2}{(1+x)^2} = \frac{-1}{\sqrt{(1-x)(1+x)^3}}$$

c) Utilizamos el resultado obtenido en a):

$$f'(x) = \frac{1}{\dfrac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{-2}{(1+x)^2} = \frac{-2(1+x)}{(1-x)(1+x)^2} = \frac{-2}{1-x^2}$$

De otra forma: Si tomamos logaritmos previamente:

$f(x) = ln\,(1-x) - ln\,(1+x)$. Derivamos:

$$f'(x) = \frac{-1}{1-x} - \frac{1}{1+x} = \frac{-1-x-1+x}{1-x^2} = \frac{-2}{1-x^2}$$

d) $f'(x) = \dfrac{-(1+tg^2\,x)(1+tg\,x) - (1-tg\,x) \cdot (1+tg^2\,x)}{(1+tg\,x)^2} =$

$$= \frac{(1+tg^2\,x)[-1-tg\,x-1+tg\,x]}{(1+tg\,x)^2} = \frac{-2(1+tg^2\,x)}{(1+tg\,x)^2}$$

De otra forma: Si tenemos en cuenta el resultado obtenido en a):

$$f'(x) = \frac{-2}{(1+tg\,x)^2} \cdot D[tg\,x] = \frac{-2}{(1+tg\,x)^2} \cdot (1+tg^2\,x) = \frac{-2(1+tg^2\,x)}{(1+tg\,x)^2}$$

e) Teniendo en cuenta lo obtenido en d):

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1 - tg\,x}{1 + tg\,x}}} \cdot \frac{-2(1 + tg^2\,x)}{(1 + tg\,x)^2} = \frac{-(1 + tg^2\,x)}{\sqrt{(1 - tg\,x)(1 + tg\,x)^3}}$$

También podríamos haber llegado a este resultado utilizando lo obtenido en b).

f) $f(x) = ln\,\sqrt{e^{tg\,x}} = ln\,e^{(tg\,x)\,/\,2} = \dfrac{tg\,x}{2}$

$f'(x) = \dfrac{1 + tg^2\,x}{2}$

g) $f(x) = \sqrt{3^{x+1}} = 3^{(x+1)\,/\,2}$

$f'(x) = 3^{(x+1)\,/\,2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot ln\,3 = \dfrac{ln\,3}{2} \cdot \sqrt{3^{x+1}}$

h) $f(x) = log\,(sen\,x \cdot cos\,x)^2 = 2[log\,(sen\,x + log\,(cos\,x)]$

$$f'(x) = 2\left[\frac{cos\,x}{sen\,x} \cdot \frac{1}{ln\,10} + \frac{-sen\,x}{cos\,x} \cdot \frac{1}{ln\,10}\right] = \frac{2}{ln\,10} \cdot \frac{cos^2\,x - sen^2\,x}{sen\,x \cdot cos\,x} =$$

$$= \frac{4}{ln\,10} \cdot \frac{cos^2\,x - sen^2\,x}{2sen\,x \cdot cos\,x} = \frac{4}{ln\,10} \cdot \frac{cos\,2x}{sen\,2x} = \frac{4}{ln\,10 \cdot tg\,2x}$$

De otra forma:

$$f(x) = log\,(sen\,x \cdot cos\,x)^2 = 2\,log\left(\frac{sen\,2x}{2}\right)$$

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{ln\,10} \cdot \frac{cos\,2x}{\dfrac{sen\,2x}{2}} = \frac{4}{ln\,10 \cdot tg\,2x}$$

i) $f(x) = sen^2\,x + cos^2\,x + x = 1 + x$

$f'(x) = 1$

j) $$f'(x) = \frac{cos\,\sqrt{x+1} \cdot cos\,\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x+1}} + \frac{sen\,\sqrt{x+1} \cdot (-sen\,\sqrt{x-1})}{2\sqrt{x-1}} =$$

$$= \frac{cos\,\sqrt{x+1} \cdot cos\,\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x+1}} - \frac{sen\,\sqrt{x+1} \cdot sen\,\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}}$$

k) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x - x^2}}$

l) $f'(x) = cos\left(3x^5 - 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{2x}\right) \cdot \left(15x^4 - \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt[3]{2}}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)$

m) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{sen\ x + x^2 + 1}} \cdot (cos\ x + 2x) = \dfrac{cos\ x + 2x}{2\sqrt{sen\ x + x^2 + 1}}$

n) $f'(x) = 2cos\ \sqrt[3]{x + (3 - x)^2} \cdot \left[-sen\ \sqrt[3]{x + (3 - x)^2}\right] \cdot \dfrac{1 + 2(3 - x) \cdot (-1)}{\sqrt[3]{(x + (3 - x)^2)^2}} =$

$= \dfrac{-2\ cos\sqrt[3]{x + (3 - x)^2}\ sen\sqrt[3]{x + (3 - x)^2} \cdot (2x - 5)}{3\sqrt[3]{(x + (3 - x)^2)^2}} =$

$= \dfrac{(5 - 2x) \cdot sen\left(2\sqrt[3]{x + (3 - x)^2}\right)}{3\sqrt[3]{(x + (3 - x)^2)^2}}$

2. Halla las derivadas 1ª, 2ª y 3ª de las siguientes funciones:

a) $y = x^5$ **b)** $y = x\ cos\ x$ **c)** $y = sen^2\ x + cos^2\ x + x$

a) $y = x^5$

$y' = 5x^4;\ \ y'' = 20x^3;\ \ y''' = 60x^2$

b) $y = x\ cos\ x$

$y' = cos\ x - x\ sen\ x$

$y'' = -sen\ x - sen\ x - x\ cos\ x = -2sen\ x - x\ cos\ x$

$y''' = -2cos\ x - cos\ x + x\ sen\ x = -3cos\ x + x\ sen\ x$

c) $y = sen^2\ x + cos^2\ x + x = 1 + x$

$y' = 1;\ \ y'' = 0;\ \ y''' = 0$

3. Calcula $f'(1)$ **siendo:** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}\ \sqrt[3]{3x}}{2\sqrt[5]{3x^2}} \cdot e^4$

$f(x) = \dfrac{\sqrt{x}\ \sqrt[3]{3x}}{2\sqrt[5]{3x^2}} \cdot e^4 = \dfrac{x^{1/2} \cdot 3^{1/3} \cdot x^{1/3} \cdot e^4}{2 \cdot 3^{1/5} \cdot x^{2/5}} = \dfrac{3^{2/15} \cdot e^4}{2} \cdot x^{13/30} = \dfrac{\sqrt[15]{9} \cdot e^4}{2} \cdot x^{13/30}$

$f'(x) = \dfrac{\sqrt[15]{9} \cdot e^4}{3} \cdot \dfrac{13}{30}\ x^{-17/30} = \dfrac{13\sqrt[15]{9} \cdot e^4}{60}\ \sqrt[30]{x^{17}}$

Por tanto: $f'(1) = \dfrac{13\sqrt[15]{9} \cdot e^4}{60}$

4. Calcula $f'(\pi/6)$ siendo: $f(x) = (cos^2\, 3x - sen^2\, 3x) \cdot sen\, 6x$

$$f(x) = (cos^2\, 3x - sen^2\, 3x) \cdot sen\, 6x = cos\, 6x \cdot sen\, 6x = \frac{sen\, 12x}{2}$$

$$f'(x) = \frac{12 cos\, 12x}{2} = 6 cos\, 12x$$

Por tanto: $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 6 \cdot cos\, \frac{12\pi}{6} = 6 \cdot cos(2\pi) = 6 \cdot 1 = 6$

5. Calcula $f'(0)$ siendo: $f(x) = ln\, \sqrt{x^2 + x + 1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot arc\, tg\, \frac{2x + 1}{\sqrt{3}}$

$$f(x) = ln\, \sqrt{x^2 + x + 1} - \frac{1}{\sqrt{3}}\, arc\, tg\, \frac{2x+1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\, ln\, (x^2 + x + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\, arc\, tg\, \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2/\sqrt{3}}{1 + \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2} =$$

$$= \frac{2x+1}{2x^2+2x+2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{4x^2+4x+1}{3}} = \frac{2x+1}{2x^2+2x+2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{3 + 4x^2 + 4x + 1} =$$

$$= \frac{2x+1}{2x^2+2x+2} - \frac{2}{4x^2+4x+4} = \frac{2x+1}{2x^2+2x+2} - \frac{1}{2x^2+2x+2} =$$

$$= \frac{2x}{2x^2+2x+2} = \frac{x}{x^2+x+1}$$

Por tanto: $f'(0) = 0$

Página 258

1. Estudia la derivabilidad en $x_0 = 3$ de la función: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & x \le 3 \\ 3x - 9, & x > 3 \end{cases}$

- Continuidad en $x_0 = 3$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} (x^2 - 3x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} (3x - 9) = 0 \end{array}\right\} \quad \lim_{x \to 3} f(x) = f(3) = 0$$

Por tanto, $f(x)$ es continua en $x_0 = 3$.

- Derivabilidad en $x_0 = 3$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (2x - 3) = 3 = f'(3^-) \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (3) = 3 = f'(3^+) \end{array}\right\}$$

Las derivadas laterales existen y coinciden.

Por tanto, $f(x)$ es derivable en $x_0 = 3$. Además, $f'(3) = 3$.

2. **Calcula m y n para que $f(x)$ sea derivable en $\mathbb{R}$: $f(x) = \begin{cases} x^2 - mx + 5, & x \le 0 \\ -x^2 + n, & x > 0 \end{cases}$**

- Si $x \neq 0$, la función es continua y derivable, pues está formada por dos polinomios.

- Continuidad en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (x^2 - mx + 5) = 5 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (-x^2 + n) = n \\ f(0) = 5 \end{array}\right\}$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$, ha de ser: $n = 5$

- Derivabilidad en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (2x - m) = -m = f'(0^-) \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (-2x) = 0 = f'(0^+) \end{array}\right\}$$

Para que sea derivable en $x = 0$, ha de ser: $-m = 0 \quad \to \quad m = 0$

Por tanto, $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R}$ para $m = 0$ y $n = 5$.

Página 259

1. **Sabemos que la derivada de la función $f(x) = x^3$ es $f'(x) = 3x^2$.**

Teniendo en cuenta este resultado, halla la derivada de su función inversa: $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Página 260

1. **Comprueba que $sen\,(x^2 y) - y^2 + x = 2 - \frac{\pi^2}{16}$ pasa por el punto $\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$ y halla la ecuación de la recta tangente en ese punto.**

Sustituimos $x = 2$, $y = \frac{\pi}{4}$ en la expresión:

$$sen\left(4 \cdot \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi^2}{16} + 2 = 0 + 2 - \frac{\pi^2}{16} = 2 - \frac{\pi^2}{16}$$

Se cumple la igualdad. Luego la curva dada pasa por el punto $\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$.

Necesitamos obtener el valor de $y'\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$. Hallamos previamente $y'(x, y)$:

Derivamos $sen\,(x^2y) - y^2 + x = 2 - \dfrac{\pi^2}{16}$:

$$cos\,(x^2y) \cdot (2xy + x^2 \cdot y') - 2y \cdot y' + 1 = 0$$

$$2xy\,cos\,(x^2y) + y' \cdot x^2 \cdot cos\,(x^2y) - 2yy' + 1 = 0$$

$$y'\big(x^2 \cdot cos\,(x^2y) - 2y\big) = -1 - 2xy\,cos\,(x^2y)$$

$$y' = \frac{-1 - 2xy\,cos\,(x^2y)}{x^2 \cdot cos\,(x^2y) - 2y}$$

Por tanto:

$$y'\left(2, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-1 - \pi \cdot cos\,\pi}{4\,cos\,\pi - \pi/2} = \frac{-1 + \pi}{-4 - \pi/2} = \frac{-2 + 2\pi}{-8 - \pi} = \frac{2 - 2\pi}{8 + \pi}$$

La ecuación de la recta tangente es: $y = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2 - 2\pi}{8 + \pi}(x - 2)$

2. Calcula la derivada de cada una de las siguientes funciones:

$\boldsymbol{f(x) = (sen\,x)^x}$ $\qquad\qquad$ $\boldsymbol{g(x) = x^{sen\,x}}$

$$f(x) = (sen\,x)^x \quad\to\quad ln\,f(x) = x\,ln\,(sen\,x)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = ln\,(sen\,x) + x \cdot \frac{cos\,x}{sen\,x} \quad\to\quad f'(x) = (sen\,x)^x\left[ln\,(sen\,x) + \frac{x\,cos\,x}{sen\,x}\right]$$

$$g(x) = x^{sen\,x} \quad\to\quad ln\,g(x) = sen\,x \cdot ln\,x$$

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = cos\,x \cdot ln\,x + sen\,x \cdot \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = x^{sen\,x} \cdot \left[cos\,x \cdot ln\,x + \frac{sen\,x}{x}\right]$$

Página 269

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

1 **a)** $\boldsymbol{y = \dfrac{x^2 - 3}{x^2 + 3}}$ $\qquad$ **b)** $\boldsymbol{y = \sqrt[3]{3x^2}}$

a) $y' = \dfrac{2x(x^2 + 3) - (x^2 - 3)\,2x}{(x^2 + 3)^2} = \dfrac{2x^3 + 6x - 2x^3 + 6x}{(x^2 + 3)^2} = \dfrac{12x}{(x^2 + 3)^2}$

b) $y' = \dfrac{2}{\sqrt[3]{9x}}$

2 **a)** $y = \left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{2/3}$ **b)** $y = \dfrac{2}{x} + \dfrac{x^2}{2}$

a) $y' = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{-1/3} \cdot \dfrac{-1 \cdot (1+x) - (1-x)}{(1+x)^2} = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{-1/3} \cdot \dfrac{-1-x-1+x}{(1+x)^2} =$

$= \dfrac{2}{3}\,\dfrac{-2}{(1-x)^{1/3} \cdot (1+x)^{5/3}} = \dfrac{-4}{3\sqrt[3]{(1-x)(1+x)^5}}$

b) $y' = 2 \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) + \dfrac{1}{2} \cdot 2x = -\dfrac{2}{x^2} + x$

3 **a)** $y = \dfrac{\ln x}{x}$ **b)** $y = 7e^{-x}$

a) $y' = \dfrac{(1/x) \cdot x - \ln x}{x^2} = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$ b) $y = -7e^{-x}$

4 **a)** $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ **b)** $y = sen\, x \cos x$

a) $y' = \dfrac{(e^x - e^{-x})^2 - (e^x + e^{-x})^2}{(e^x - e^{-x})^2} = \dfrac{e^{2x} + e^{-2x} - 2 - e^{2x} - e^{-2x} - 2}{(e^x - e^{-x})^2} = \dfrac{-4}{(e^x - e^{-x})^2}$

b) $y' = \cos x \cdot \cos x + (-sen\, x) \cdot sen\, x = \cos^2 x - sen^2\, x = \cos 2x$

5 **a)** $y = \dfrac{1}{sen\, x}$ **b)** $y = \ln(x^2 + 1)$

a) $y' = \dfrac{-\cos x}{sen^2\, x}$ b) $y' = \dfrac{2x}{x^2+1}$

6 **a)** $y = arc\ tg\, \dfrac{x}{3}$ **b)** $y = \cos^2(2x - \pi)$

a) $y' = \dfrac{1}{1 + (x/3)^2} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1/3}{1 + x^2/9} = \dfrac{3}{9 + x^2}$

b) $y' = 2\cos(2x - \pi) \cdot \big(-sen\,(2x - \pi)\big) \cdot 2 = -4\cos(2x - \pi) \cdot sen\,(2x - \pi) =$

$= -2\cos(4x - 4\pi)$

7 **a)** $y = sen^2\, x$ **b)** $y = \sqrt{tg\, x}$

a) $y' = 2sen\, x \cdot \cos x = sen\, 2x$ b) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{tg\, x}} \cdot (1 + tg^2\, x) = \dfrac{1 + tg^2\, x}{2\sqrt{tg\, x}}$

8 **a)** $y = sen\ x^2$ **b)** $y = arc\ tg\ (x^2 + 1)$

a) $y' = cos\ x^2 \cdot 2x = 2x\ cos\ x^2$

b) $y' = \dfrac{1}{1 + (x^2 + 1)^2} \cdot 2x = \dfrac{2x}{x^4 + 2x^2 + 2}$

9 **a)** $y = (2\sqrt{x} - 3)^7$ **b)** $y = log_2 \sqrt{x}$

a) $y' = 7(2\sqrt{x} - 3)^6 \cdot 2 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{7}{\sqrt{x}}(2\sqrt{x} - 3)^6$

b) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{ln\ 2} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2x\ ln\ 2}$

10 **a)** $y = sen^2\ x^2$ **b)** $y = arc\ tg\ \dfrac{1}{x}$

a) $y' = 2sen\ x^2 \cdot cos\ x^2 \cdot 2x = 4x\ sen\ x^2\ cos\ x^2 = 2x\ sen\ (2x^2)$

b) $y' = \dfrac{1}{1 + (1/x)^2} \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{-1/x^2}{1 + 1/x^2} = -\dfrac{1}{x^2 + 1}$

11 **a)** $y = cos^5\ (7x^2)$ **b)** $y = 3^x + 1$

a) $y' = 5cos^4\ (7x^2) \cdot \left(-sen\ (7x^2)\right) \cdot 14x = -70x\ cos^4\ (7x^2)\ sen\ (7x^2)$

b) $y' = 3^x\ ln3$

12 **a)** $y = \sqrt[3]{(5x - 3)^2}$ **b)** $y = arc\ sen\ \dfrac{x^2}{3}$

a) $y' = \dfrac{2}{3}(5x - 3)^{-1/3} \cdot 5 = \dfrac{10}{3\sqrt[3]{5x - 3}}$

b) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{x^2}{3}\right)^2}} \cdot \dfrac{2x}{3} = \dfrac{2x/3}{\dfrac{\sqrt{9 - x^4}}{3}} = \dfrac{2x}{\sqrt{9 - x^4}}$

13 **a)** $y = ln(2x - 1)$ **b)** $y = tg\ \dfrac{x^2}{2}$

a) $y' = \dfrac{2}{2x - 1}$

b) $y' = \left(1 + tg^2\ \dfrac{x^2}{2}\right) \cdot \dfrac{2x}{2} = x + x\ tg^2\ \dfrac{x^2}{2}$

14 **a)** $y = ln(x^2 - 1)$ **b)** $y = arc\ cos\ \sqrt{2x}$

a) $y' = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$

b) $y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - (\sqrt{2x})^2}} \cdot \dfrac{2}{2\sqrt{2x}} = \dfrac{-1}{\sqrt{2x} \cdot \sqrt{1 - 2x}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2x - 4x^2}}$

15 **a)** $y = ln\sqrt{1 - x}$ **b)** $y = (arc\ tg\ x)^2$

a) $y = ln\ \sqrt{1 - x} = ln\ (1 - x)^{1/2} = \dfrac{1}{2}\ ln\ (1 - x)$

$y' = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{-1}{(1 - x)} = \dfrac{-1}{2 - 2x}$

b) $y' = 2(arc\ tg\ x) \cdot \dfrac{1}{1 + x^2} = \dfrac{2\ arc\ tg\ x}{1 + x^2}$

16 **a)** $y = log_3(7x + 2)$ **b)** $y = ln\,tg\,\dfrac{3}{x}$

a) $y' = \dfrac{1}{ln\ 3} \cdot \dfrac{7}{(7x + 2)} = \dfrac{7}{(7x + 2)\ ln\ 3}$

b) $y' = \dfrac{1}{tg\ 3/x} \cdot \left(1 + tg^2\ \dfrac{3}{x}\right) \cdot \left(-\dfrac{3}{x^2}\right) = -\dfrac{3\ (1 + tg^2\ 3/x)}{x^2\ tg\ 3/x}$

17 **a)** $y = e^{4x}$ **b)** $y = ln\left(ln\ \dfrac{1}{x}\right)$

a) $y' = 4e^{4x}$

b) $y' = \dfrac{1}{ln\ 1/x} \cdot \dfrac{1}{1/x} \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -\dfrac{1}{x\ ln\ 1/x}$

18 **a)** $y = 2^x$ **b)** $y = arc\ sen\ \dfrac{x + 1}{x - 1}$

a) $y' = 2^x \cdot ln\ 2$

b) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{x + 1}{x - 1}\right)^2}} \cdot \dfrac{(x - 1) - (x + 1)}{(x - 1)^2} = \dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{(x - 1)^2 - (x + 1)^2}}{x - 1}} \cdot \dfrac{-2}{(x - 1)^2} =$

$= -\dfrac{2/(x - 1)}{\sqrt{(x - 1)^2 - (x + 1)^2}} = \dfrac{2}{(x - 1)\sqrt{x^2 + 1 - 2x - x^2 - 1 - 2x}} = -\dfrac{2}{(x - 1)\sqrt{-4x}}$

19 **a)** $\boldsymbol{y = 5\, tg^3 (3x^2 + 1)}$ **b)** $\boldsymbol{y = \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

a) $y' = 15\, tg^2 (3x^2 + 1) \cdot [1 + tg^2 (3x^2 + 1)] \cdot 6x = 90x\, [tg^2 (3x^2 + 1) + tg^4 (3x^2 + 1)]$

b) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} \left(1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \dfrac{2\sqrt{x} + 1}{4\sqrt{x}\sqrt{x + \sqrt{x}}} = \dfrac{2\sqrt{x} + 1}{4\sqrt{x^2 + x\sqrt{x}}}$

20 **a)** $\boldsymbol{y = \sqrt{tg\, x^2}}$ **b)** $\boldsymbol{y = \sqrt[3]{\dfrac{x - 2}{x + 2}}}$

a) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{tg\, x^2}}(1 + tg^2\, x^2) \cdot 2x = \dfrac{x(1 + tg^2\, x^2)}{\sqrt{tg\, x^2}}$

b) $y' = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{x - 2}{x + 2}\right)^{-2/3} \cdot \dfrac{x + 2 - (x - 2)}{(x + 2)^2} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{\left(\dfrac{x - 2}{x + 2}\right)^2}} \cdot \dfrac{4}{(x + 2)^2} =$

$= \dfrac{4}{3 \cdot (x + 2)^2 \cdot \dfrac{\sqrt[3]{(x - 2)^2}}{(x + 2)^{2/3}}} = \dfrac{4}{3(x + 2)^{4/3} \cdot \sqrt[3]{(x - 2)^2}} = \dfrac{4}{3\sqrt[3]{(x + 2)^4 (x - 2)^2}} =$

$= \dfrac{4}{3(x + 2)\sqrt[3]{(x + 2)(x - 2)^2}}$

21 **a) Comprueba que la siguiente función es continua y derivable y halla $\boldsymbol{f'(0)}$, $\boldsymbol{f'(3)}$ y $\boldsymbol{f'(1)}$:**

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

b) ¿Cuál es su función derivada?

c) ¿En qué punto se cumple $\boldsymbol{f'(x) = 5}$?

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

a) **Si $\boldsymbol{x \neq 1}$,** la función es continua y derivable, pues está formada por dos polinomios.

Continuidad en $\boldsymbol{x = 1}$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (3x - 1) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x^2 + x) = 2 \\ f(1) = 2 \end{array}\right\} \; f(x) \text{ es continua en } x = 1.$$

Derivabilidad en $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1} 3 = 3 = f'(1^-) \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1} (2x + 1) = 3 = f'(1^+) \end{array}\right\}$$ Las derivadas laterales existen y coinciden.

Luego, $f(x)$ es derivable en $x = 1$. Además, $f'(1) = 3$.

Así $f(x)$ es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$.

$f'(0) = 3$

$f'(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$

b) $f(x) = \begin{cases} 3 & x < 1 \\ 2x + 1 & x \geq 1 \end{cases}$

c) Si $f'(x) = 5$, entonces $x \geq 1$. Es decir:

$f'(x) = 2x + 1 = 5 \quad \to \quad x = \dfrac{4}{2} = 2 > 1$

$f'(2) = 5$

22 **Comprueba que $f(x)$ es continua pero no derivable en $x = 2$:**

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x-1) & \text{si } x < 2 \\ 3x - 6 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

- Si $x \neq 2$, la función es continua y derivable.

- Continuidad en $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \ln(x - 1) = \ln 1 = 0 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (3x - 6) = 0 \\ f(2) = 0 \end{array}\right\}$$ f es continua en $x = 2$.

- Derivabilidad en $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x - 1} = 1 = f'(2^-) \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 2} 3 = 3 = f'(2^+) \end{array}\right\}$$ Las derivadas laterales existen pero no coinciden.

$f(x)$ no es derivable en $x = 2$.

23 **Estudia la continuidad y derivabilidad de estas funciones:**

$$\textbf{a) } f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \le 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 3 \\ -x^2 + 3x + 2 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$$

$$\textbf{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & \text{si } x < -1 \\ 2x + 2 & \text{si } -1 \le x \le 2 \\ -x^2 + 8x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a) **Si $x \ne 0$ y $x \ne 3$,** la función es continua y derivable.

Continuidad en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} e^x = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} 1 = 1 \\ f(0) = 1 \end{array}\right\} \; f(x) \text{ es continua en } x = 0.$$

Continuidad en $x = 3$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} (-x^2 + 3x + 2) = 2 \\ f(3) = 2 \end{array}\right\}$$

Los límites por la derecha y por la izquierda no coinciden. La función no es continua en $x = 3$.

Derivabilidad en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} e^x = 1 = f'(0^-) \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} 0 = 0 = f'(0^+) \end{array}\right\}$$

Las derivadas laterales existen, pero no coinciden.

$f(x)$ no es derivable en $x = 0$.

Derivabilidad en $x = 3$:

Como $f(x)$ no es continua en $x = 3$, $f(x)$ no es derivable en $x = 3$.

b) **Si $x \ne -1$ y $x \ne 2$,** $f(x)$ es continua y derivable.

Continuidad en $x = -1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} (x^2 + 2x + 1) = 0 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} (2x + 2) = 0 \\ f(-1) = 0 \end{array}\right\} \; f(x) \text{ es continua en } x = -1.$$

Continuidad en $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (2x + 2) = 6 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (-x^2 + 8x) = 12 \\ f(2) = 12 \end{array}\right\}$$ Los límites por la derecha y por la izquierda no coinciden.

$f(x)$ no es continua en $x = 2$.

Derivabilidad en $x = -1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to -1} (2x + 2) = 0 = f'(2^-) \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to -1} 2 = 2 = f'(2^+) \end{array}\right\}$$ Las derivadas laterales existen pero no coinciden.

$f(x)$ no es derivable en $x = -1$.

Derivabilidad en $x = 2$:

$f(x)$ no es continua en $x = 2$ $\rightarrow$ $f(x)$ no es derivable en $x = 2$.

24 **Calcula la derivada de las siguientes funciones, aplicando previamente las propiedades de los logaritmos:**

a) $\boldsymbol{y = ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}}$ **b)** $\boldsymbol{y = ln(x\, tg\, x)^2}$

c) $\boldsymbol{y = ln\left(\dfrac{1}{x^2} \cdot \sqrt[3]{x^2-1}\right)}$ **d)** $\boldsymbol{y = ln\sqrt[3]{\dfrac{1}{(1+x)^2}}}$

a) $y = ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} = \dfrac{1}{2}\,[ln\,(1-x) - ln\,(1+x)]$

$$y' = \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{1-x} - \frac{1}{1+x}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{-1-x-1+x}{1-x^2}\right] = \frac{-1}{1-x^2} = \frac{1}{x^2-1}$$

b) $y = ln\,(x\,tg\,x)^2 = 2[ln\,x + ln\,(tg\,x)]$

$$y' = 2\left[\frac{1}{x} + \frac{1+tg^2\,x}{tg\,x}\right] = 2\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{tg\,x} + tg\,x\right] = \frac{2}{x} + 2\,cotg\,x + 2\,tg\,x$$

c) $y = ln\left(\dfrac{1}{x^2} \cdot \sqrt[3]{x^2-1}\right) = -2ln\,x + \dfrac{1}{3}\,ln\,(x^2-1)$

$$y' = \frac{-2}{x} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2x}{(x^2-1)} = \frac{-2}{x} + \frac{2x}{3x^2-3} = \frac{-6x^2+6+2x^2}{3x^3-3x} = \frac{-4x^2+6}{3x^3-3x}$$

d) $y = ln\sqrt[3]{\frac{1}{(1+x)^2}} = \frac{1}{3}\,[ln\ 1 - ln\ (1+x)^2] = \frac{-2}{3}\ ln\ (1+x)$

$y' = \frac{-2}{3} \cdot \frac{1}{(1+x)} = \frac{-2}{3+3x}$

25 **Calcula la derivada de estas funciones implícitas:**

a) $x^2 + y^2 = 9$

b) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$

c) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

d) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$

e) $x^3 + y^3 + 2xy = 0$

f) $\frac{(x-1)^2}{8} + \frac{(y+3)^2}{14} = 1$

a) $2x + 2y \cdot y' = 0$

$y' = \frac{-2x}{2y} = \frac{-x}{y}$

b) $2x + 2yy' - 4 - 6y' = 0$

$y'(2y-6) = 4 - 2x$

$y' = \frac{4-2x}{2y-6} = \frac{2-x}{y-3}$

c) $\frac{2x}{16} + \frac{2yy'}{9} = 0$

$\frac{x}{8} + \frac{2yy'}{9} = 0$

$\frac{2yy'}{9} = -\frac{x}{8} \rightarrow 2yy' = \frac{-9x}{8} \rightarrow y' = \frac{-9x}{16y}$

d) $\frac{2x}{9} - \frac{2yy'}{25} = 0 \rightarrow \frac{2yy'}{25} = \frac{2x}{9}$

$y' = \frac{25x}{9y}$

e) $3x^2 + 3y^2y' + 2y + 2xy' = 0$

$y'(3y^2 + 2x) = -3x^2 - 2y$

$y' = \frac{-3x^2 - 2y}{3y^2 + 2x}$

f) $\dfrac{2(x-1)}{8} + \dfrac{2(y+3)y'}{14} = 0$

$\dfrac{(x-1)}{4} + \dfrac{(y+3)y'}{7} = 0$

$\dfrac{(y+3)y'}{7} = -\dfrac{(x-1)}{4} \rightarrow (y+3)y' = \dfrac{7(1-x)}{4}$

$y' = \dfrac{7-7x}{4y+12}$

Página 270

26 Aplica la derivación logarítmica para derivar:

a) $y = x^{3x}$

b) $y = x^{x+1}$

c) $y = x^{e^x}$

d) $y = (ln\ x)^{x+1}$

e) $y = \left(\dfrac{sen\ x}{x}\right)^x$

f) $y = x^{tg\ x}$

a) $y = x^{3x} \rightarrow ln\ y = 3x\ ln\ x$

$\dfrac{y'}{y} = 3\ ln\ x + 3x \cdot \dfrac{1}{x} = 3\ ln\ x + 3$

$y' = x^{3x}(3ln\ x + 3)$

b) $y = x^{x+1} \rightarrow ln\ y = (x+1)\ ln\ x$

$\dfrac{y'}{y} = ln\ x + (x+1) \cdot \dfrac{1}{x} = ln\ x + 1 + \dfrac{1}{x}$

$y' = x^{x+1}\left(ln\ x + 1 + \dfrac{1}{x}\right)$

c) $y = x^{e^x} \rightarrow ln\ y = e^x \cdot ln\ x$

$\dfrac{y'}{y} = e^x \cdot ln\ x + e^x \cdot \dfrac{1}{x} = e^x\left(ln\ x + \dfrac{1}{x}\right)$

$y' = x^{e^x} \cdot e^x\left(ln\ x + \dfrac{1}{x}\right)$

d) $y = (ln\ x)^{x+1} \rightarrow ln\ y = (x+1) \cdot ln\ (ln\ x)$

$\dfrac{y'}{y} = ln\ (ln\ x) + (x+1) \cdot \dfrac{1}{ln\ x} \cdot \dfrac{1}{x} = ln\ (ln\ x) + \dfrac{x+1}{x\ ln\ x}$

$y' = (ln\ x)^{x+1} \cdot \left[ln\ (ln\ x) + \dfrac{x+1}{x\ ln\ x}\right]$

e) $y = \left(\dfrac{sen\ x}{x}\right)^x \quad \to \quad ln\ y = x\ ln \left(\dfrac{sen\ x}{x}\right) = x\,\big(ln\ (sen\ x) - ln\ x\big)$

$$\frac{y'}{y} = ln\ (sen\ x) - ln\ x + x\left(\frac{cos\ x}{sen\ x} - \frac{1}{x}\right) = ln\left(\frac{sen\ x}{x}\right) + \frac{x\ cos\ x}{sen\ x} - 1$$

$$y' = \left(\frac{sen\ x}{x}\right)^x \cdot \left[ln\left(\frac{sen\ x}{x}\right) + \frac{x\ cos\ x}{sen\ x} - 1\right]$$

f) $y = x^{tg\,x} \quad \to \quad ln\ y = tg\ x \cdot ln\ x$

$$\frac{y'}{y} = (1 + tg^2\ x) \cdot ln\ x + tg\ x \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = x^{tg\,x} \cdot \left[(1 + tg^2\ x)\ ln\ x + \frac{tg\ x}{x}\right]$$

27 **Obtén la derivada de las siguientes funciones de dos maneras y comprueba, operando, que llegas al mismo resultado:**

I) Utilizando las reglas de derivación que conoces.

II) Aplicando la derivación logarítmica.

a) $y = \left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)^3$ **b)** $y = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

c) $y = sen^3\ x\ cos^2\ x$ **d)** $y = \sqrt{x^2+1}\ \sqrt[3]{x^2}$

a) I) $y' = 3\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)^2 \cdot \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{3 \cdot (x^2+1)^2\,(x^2-1)}{x^4}$

II) $ln\ y = 3\big(ln\ (x^2+1) - ln\ x\big)$

$$\frac{y'}{y} = 3\left(\frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x}\right) = 3\left(\frac{2x^2 - x^2 - 1}{x(x^2+1)}\right) = \frac{3(x^2-1)}{x(x^2+1)}$$

$$y' = \left(\frac{x^2+1}{x}\right)^3 \cdot \frac{3(x^2-1)}{x(x^2+1)} = \frac{3 \cdot (x^2+1)^2\,(x^2-1)}{x^4}$$

b) I) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}} \cdot \dfrac{1-x+1+x}{(1-x^2)} = \dfrac{1}{\sqrt{(1+x)(1-x)^3}}$

II) $ln\ y = \dfrac{1}{2}\ [ln\ (1+x) - ln\ (1-x)]$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+x} - \frac{-1}{1-x}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1-x+1+x}{(1+x)(1-x)}\right] = \frac{1}{(1+x)(1-x)}$$

$$y' = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{1}{(1+x)(1-x)} = \frac{1}{\sqrt{(1+x)(1-x)^3}}$$

c) I) $y' = 3sen^2\, x \cos x \cdot \cos^2 x + sen^3\, x \cdot 2\cos x\,(-sen\, x) =$

$= 3sen^2\, x \cos^3 x - 2\cos x\, sen^4\, x$

II) $\ln y = 3\ln (sen\, x) + 2\ln (\cos x)$

$$\frac{y'}{y} = 3\,\frac{\cos x}{sen\, x} + 2 \cdot \frac{-sen\, x}{\cos x} = \frac{3\cos^2 x - 2sen^2\, x}{sen\, x \cos x}$$

$$y' = sen^3\, x \cos^2 x \cdot \frac{3\cos^2 x - 2sen^2\, x}{sen\, x \cos x} = sen^2\, x \cos x\,(3\cos^2 x - 2sen^2\, x) =$$

$= 3sen^2\, x \cos^3 x - 2\cos x\, sen^4\, x$

d) I) $$y' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot \sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x^2+1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{x\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{2\sqrt{x^2+1}}{3\sqrt[3]{x}} =$$

$$= \frac{3x^2 + 2(x^2+1)}{3\sqrt{x^2+1}\,\sqrt[3]{x}} = \frac{3x^2 + 2x^2 + 2}{3\sqrt{x^2+1}\,\sqrt[3]{x}} = \frac{5x^2+2}{3\sqrt{x^2+1}\,\sqrt[3]{x}}$$

II) $\ln y = \frac{1}{2} \ln (x^2+1) + \frac{2}{3} \ln x$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2+1} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+1} + \frac{2}{3x} = \frac{3x^2 + 2x^2 + 2}{3x(x^2+1)} = \frac{5x^2+2}{3x(x^2+1)}$$

$$y' = \sqrt{x^2+1} \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \frac{5x^2+2}{3x(x^2+1)} = \frac{5x^2+2}{3\sqrt{x^2+1}\,\sqrt[3]{x}}$$

28 **Utilizando la definición de derivada, calcula: $f'(-2)$, siendo $f(x) = \dfrac{1}{x}$**

$$f'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{1}{-2+h} - \dfrac{1}{-2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{2-2+h}{-4+2h}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h(-4+2h)} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{-4+2h} = \frac{-1}{4} = f'(-2)$$

29 **Halla la función derivada de $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ aplicando la definición de derivada.**

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{x+h-1}{x+h+1} - \dfrac{x-1}{x+1}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+1)(x+h-1) - (x-1)(x+h+1)}{h(x+h+1)(x+1)} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + \cancel{xh} - \cancel{x} + \cancel{x} + h - \cancel{1} - \cancel{x^2} - \cancel{xh} - \cancel{x} + \cancel{x} + h + \cancel{1}}{h(x+h+1)(x+1)} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2h}{h(x+h+1)(x+1)} = \lim_{h \to 0} \frac{2}{(x+h+1)(x+1)} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

30 **Calcula los puntos de derivada nula de las siguientes funciones:**

a) $y = \dfrac{x}{(x+3)^2}$ **b)** $y = \dfrac{16}{x^2(x-4)}$

c) $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$ **d)** $y = e^x(x-1)$

e) $y = x^2 e^x$ **f)** $y = sen\ x + cos\ x$

a) $y' = \dfrac{(x+3)^2 - 2(x+3)x}{(x+3)^4} = \dfrac{(x+3) - 2x}{(x+3)^3} = \dfrac{3-x}{(x+3)^3}$

$y' = 0 \;\to\; 3 - x = 0 \;\to\; x = 3 \;\to\; y = \dfrac{1}{12}$

Se anula en el punto $\left(3, \dfrac{1}{12}\right)$.

b) $y = \dfrac{16}{x^3 - 4x^2} \;\to\; y' = \dfrac{-16(3x^2 - 8x)}{(x^3 - 4x^2)^2}$

$y' = 0 \;\to\; 3x^2 - 8x = 0 \;\to\; x(3x-8) = 0 \begin{cases} x = 0 \ \text{(no vale)} \\ x = \dfrac{8}{3} \;\to\; y = \dfrac{-27}{16} \end{cases}$

$x = 0$ no está en el dominio.

La derivada se anula en el punto $\left(\dfrac{8}{3}, \dfrac{-27}{16}\right)$.

c) $y' = \dfrac{(2x-1)(x^2+x+1) - (x^2-x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} =$

$= \dfrac{\cancel{2x^3} + \cancel{2x^2} + \cancel{2x} - \cancel{x^2} - \cancel{x} - 1 - \cancel{2x^3} - \cancel{x^2} + \cancel{2x^2} + \cancel{x} - \cancel{2x} - 1}{(x^2+x+1)^2} = \dfrac{2x^2 - 2}{(x^2+x+1)^2}$

$y' = 0 \;\to\; 2x^2 - 2 = 0 \;\to\; x^2 = 1 \begin{cases} x = 1 \;\to\; y = \dfrac{1}{3} \\ x = -1 \;\to\; y = 3 \end{cases}$

Se anula en los puntos $(-1, 3)$ y $\left(1, \dfrac{1}{3}\right)$.

d) $y' = e^x(x-1) + e^x = e^x(x - 1 + 1) = xe^x$

$y' = 0 \;\to\; x = 0 \;\to\; y = -1$

Se anula en el punto $(0, -1)$.

e) $y' = 2x\,e^x + x^2\,e^x = e^x(2x + x^2)$

$y' = 0 \;\to\; 2x + x^2 = 0 \;\to\; x(2+x) = 0 \begin{cases} x = 0 \;\to\; y = 0 \\ x = -2 \;\to\; y = 4e^{-2} \end{cases}$

Se anula en los puntos $(0, 0)$ y $(-2, 4e^{-2})$.

f) $y' = \cos x - \operatorname{sen} x$

$$y' = 0 \;\rightarrow\; \cos x = \operatorname{sen} x \;\rightarrow\; \operatorname{tg} x = 1 \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k \;\rightarrow\; y = \sqrt{2} \\ x = \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi k \;\rightarrow\; y = -\sqrt{2} \end{cases}$$

Se anula en los puntos $\left(\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k, \sqrt{2}\right), \left(\dfrac{5\pi}{4} + 2\,\pi k, -\sqrt{2}\right)$, con $k \in \mathbb{Z}$.

31 **Comprueba que la función $y = |x - 2|$ no es derivable en $x = 2$.**

$$y = \begin{cases} -x + 2 & \text{si } x < 2 \\ x - 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \qquad y' = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

La función es continua, pues: $\lim\limits_{x \to 2^-} (-x + 2) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x - 2) = f(2) = 0$

Las derivadas laterales son: $f'(2^-) = -1 \neq f'(2^+) = 1$. Por tanto, no es derivable en $x = 2$.

32 **¿Cuántos puntos hay en esta función que no tengan derivada?**

$y = |x^2 + 6x + 8|$

$$x^2 + 6x + 8 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-6 \pm 2}{2} = \begin{cases} x = -2 \\ x = -4 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} x^2 + 6x + 8 & \text{si } x < -4 \\ -x^2 - 6x - 8 & \text{si } -4 \leq x \leq -2 \\ x^2 + 6x + 8 & \text{si } x > -2 \end{cases} \qquad y' = \begin{cases} 2x + 6 & \text{si } x < -4 \\ -2x - 6 & \text{si } -4 < x < -2 \\ 2x + 6 & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

La función es continua, pues es el valor absoluto de una función continua.

En $x = -4 \;\rightarrow\; y'(-4^-) = -2 \neq y'(-4^+) = 2$

En $x = -2 \;\rightarrow\; y'(-2^-) = -2 \neq y'(-2^+) = 2$

La función no es derivable en $x = -4$ ni en $x = -2$; es decir, en $(-4, 0)$ y en $(-2, 0)$. Son dos puntos "angulosos".

33
S **Dada la función $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$, halla: $f'(x)$, $f''(x)$ y $f'''(x)$.**

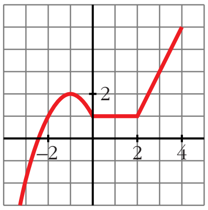
$f'(x) = \cos x \, e^{\operatorname{sen} x}$

$f''(x) = -\operatorname{sen} x \, e^{\operatorname{sen} x} + \cos^2 x \, e^{\operatorname{sen} x} = (\cos^2 x - \operatorname{sen} x)\, e^{\operatorname{sen} x}$

$$f'''(x) = (2\cos x(-\operatorname{sen} x) - \cos x)\, e^{\operatorname{sen} x} + (\cos^2 x - \operatorname{sen} x) \cos x \, e^{\operatorname{sen} x} =$$
$$= (-2\operatorname{sen} x \cos x - \cos x + \cos^3 x - \operatorname{sen} x \cos x)\, e^{\operatorname{sen} x} =$$
$$= (\cos^3 x - 3\operatorname{sen} x \cos x - \cos x)\, e^{\operatorname{sen} x}$$

34 **Esta es la gráfica de una función $y = f(x)$. Calcula, observándola: $f'(-1)$, $f'(1)$ y $f'(3)$**

¿En qué puntos no es derivable?



$f'(-1) = 0$; $f'(1) = 0$; $f'(3) = 2$

No es derivable en $x = 0$ ni en $x = 2$.

35 **S** **Estudia la continuidad y derivabilidad de esta función:**

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ x & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

Continuidad:

- **Si $x \neq 0$ y $x \neq 1$** → Es continua, pues está formada por funciones continuas.

- **En $x = 0$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} 0 = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0 \\ f(0) = 0 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0).$$

Por tanto, la función es continua en $x = 0$.

- **En $x = 1$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} x^2 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} x = 1 \\ f(1) = 1 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1).$$

Por tanto, la función es continua en $x = 1$.

La función es continua en $\mathbb{R}$.

Derivabilidad:

- **Si $x \neq 0$ y $x \neq 1$** → La función es derivable. Su derivada es, en esos puntos:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- **En $x = 0$:**

$f'(0^-) = 0 = f'(0^+)$. Por tanto, $f(x)$ es derivable en $x = 0$; y $f'(0) = 0$.

- **En $x = 1$:**

$f'(1^-) = 2 \neq f'(1^+) = 1$. Por tanto, $f(x)$ no es derivable en $x = 1$.

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$. Su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

36 **Calcula las derivadas primera, segunda y tercera de la función $f(x) = 4\ ln\ x - x^3 + 1$ en el punto $x = 1$.**

$$f'(x) = 4 \cdot \frac{1}{x} - 3x^2 = \frac{4}{x} - 3x^2 \quad \to \quad f'(1) = 1$$

$$f''(x) = \frac{-4}{x^2} - 6x \quad \to \quad f''(1) = -10$$

$$f'''(x) = \frac{8}{x^3} - 6 \quad \to \quad f'''(1) = 2$$

PARA RESOLVER

37 S **Considera la función: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + m & \text{si } x \le 1 \\ -x^2 + nx & \text{si } x > 1 \end{cases}$**

a) Calcula m y n para que f sea derivable en todo $\mathbb{R}$.

b) ¿En qué puntos es $f'(x) = 0$?

a) Para que sea derivable, en primer lugar ha de ser continua.

- **Si $x \neq 1$,** la función es continua, pues está formada por dos polinomios.
- **En $x = 1$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x^2 - 5x + m) = -4 + m \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (-x^2 + nx) = -1 + n \\ f(1) = -4 + m \end{array}\right\}$$

Para que sea continua en $x = 1$, ha de ser: $-4 + m = -1 + n$; es decir: $m = n + 3$.

Derivabilidad:

- **Si $x \neq 1$,** la función es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{si } x < 1 \\ -2x + n & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- **En $x = 1$:**

$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = -3 \\ f'(1^+) = -2 + n \end{array}\right\}$ Para que sea derivable en $x = 1$, ha de ser $-3 = -2 + n$, es decir, $n = -1$.

Por tanto, la función será derivable en todo $\mathbb{R}$ si $m = 2$ y $n = -1$. En este caso, la derivada sería:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{si } x < 1 \\ -2x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

b) $f'(x) = 2x - 5$ si $x < 1$

$$2x - 5 = 0 \rightarrow x = \frac{5}{2}; \text{ pero } \frac{5}{2} > 1$$

$f'(x) = -2x - 1$ si $x \geq 1$

$$-2x - 1 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2}; \text{ pero } -\frac{1}{2} < 1$$

Por tanto, $f'(x)$ no se anula en ningún punto.

38 **Prueba que la función $f(x) = x + |x - 3|$ no es derivable en $x = 3$.**

$$f(x) = \begin{Bmatrix} x - x + 3 & \text{si } x < 3 \\ x + x - 3 & \text{si } x \geq 3 \end{Bmatrix} = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 3 \\ 2x - 3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 3 \\ 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$f'(3^-) = 0 \neq f'(3^+) = 2$. Por tanto, la función no es derivable en $x = 3$.

39 **S** **Determina el valor de k que hace que la función $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2 + k}$ tenga un único punto de tangente horizontal.**

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2 + k) - 2xe^x}{(x^2 + k)^2} = \frac{(x^2 - 2x + k)\,e^x}{(x^2 + k)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2 - 2x + k = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4k}}{2}$$

Para que haya una sola ecuación, ha de ser $4 - 4k = 0$; es decir, $k = 1$.

40 **S** **Dada la función $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - x & \text{si } x > 0 \end{cases}$ estudia si es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$.**

Continuidad:

- **En $x \neq 0$** $\rightarrow$ La función es continua, pues está formada por dos funciones continuas.

• **En $x = 0$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} e^{-x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (1 - x) = 1 \\ f(0) = 1 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0).$$ Por tanto, la función es continua en $x = 0$.

La función es continua en todo $\mathbb{R}$.

Derivabilidad:

• **Si $x \neq 0$** $\rightarrow$ La función es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

• **En $x = 0$:**

$f'(0^-) = -1 = f'(0^+)$

Por tanto, $f(x)$ es derivable en $x = 0$ y $f'(0) = -1$. La función es derivable en todo $\mathbb{R}$. Su derivada sería:

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

41 S **Calcula a y b para que la siguiente función sea derivable en todo $\mathbb{R}$:**

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - bx - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Para que sea derivable, en primer lugar, ha de ser continua.

• **Si $x \neq 2$** $\rightarrow$ La función es continua, pues está formada por dos polinomios.

• **En $x = 2$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (ax^2 + 3x) = 4a + 6 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (x^2 - bx - 4) = -2b \\ f(2) = 4a + 6 \end{array}\right\}$$

Para que sea continua, ha de ser $4a + 6 = -2b$, es decir, $2a + 3 = b$; o bien $b = -2a - 3$.

Derivabilidad:

• **Si $x \neq 2$** $\rightarrow$ la función es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + 3 & \text{si } x < 2 \\ 2x - b & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

• **En $x = 2$:**

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = 4a + 3 \\ f'(2^+) = 4 - b \end{array}\right\}$$ Para que sea derivable ha de ser $4a + 3 = 4 - b$, es decir, $b = -4a + 1$.

Teniendo en cuenta las dos condiciones obtenidas:

$$\left.\begin{array}{l} b = -2a - 3 \\ b = -4a + 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -2a - 3 = -4a + 1 \;\;\rightarrow\;\; 2a = 4 \;\;\rightarrow\;\; a = 2 \\ b = -7 \end{array}$$

Por tanto, para que $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$, ha de ser $a = 2$ y $b = -7$.

Página 271

42 S **Sea la función: $f(x) = x\,|x| = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x \le 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$**

a) Halla $f'(x)$.

b) Halla $f''(x)$.

c) Representa f' y f''.

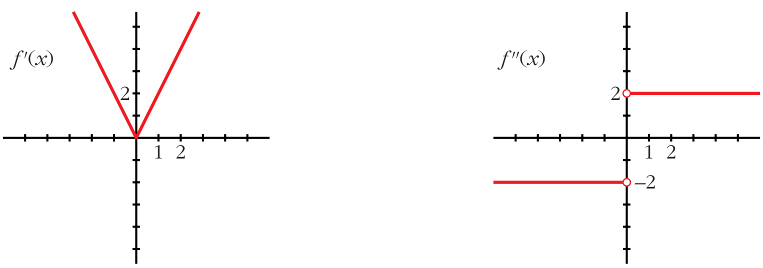
a) $f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

En $x = 0$ existe la derivada, pues $f(x)$ es continua, y, además, $f'(0^-) = f'(0^+)$.

b) $f''(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

En $x = 0$ no existe la segunda derivada, pues $f''(0^-) \neq f''(0^+)$.

c)



43 S **Estudia la derivabilidad de la función: $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ y calcula $f'(1)$.**

$f'(x) = \dfrac{-2}{3\sqrt[3]{x}}$

$f(x)$ es una función continua en $\mathbb{R}$.

$f(x)$ es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$ (en $x = 0$ no existe la derivada).

$f'(1) = \dfrac{-2}{3}$

44 **Halla el valor de la derivada de la función: $cos(x + y) + sen(x - y) = 0$ en el punto $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$.**

Derivamos:

$$-sen\,(x + y) \cdot (1 + y') + cos\,(x - y) \cdot (1 - y') = 0$$

$$-sen\,(x + y) - y'\,sen\,(x + y) + cos\,(x - y) - y'\,cos\,(x - y) = 0$$

$$-sen\,(x + y) + cos\,(x - y) = y'\left(sen\,(x + y) + cos\,(x - y)\right)$$

$$y' = \frac{-sen\,(x + y) + cos\,(x - y)}{sen\,(x + y) + cos\,(x - y)}$$

Calculamos la derivada en el punto $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$:

$$y'\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-1 + 1}{1 + 1} = \frac{0}{2} = 0$$

45 S **Calcula la derivada de orden n de la función $f(x) = e^{2x}$.**

$$f'(x) = 2e^{2x}$$
$$f''(x) = 4e^{2x} = 2^2e^{2x}$$
$$f'''(x) = 8e^{2x} = 2^3e^{2x}$$
$$\dots$$
$$f^n(x) = 2^ne^{2x}$$

Lo demostramos por inducción:

Para $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, vemos que se cumple.

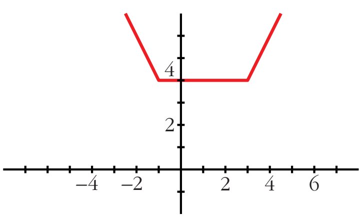
Supongamos que es cierto para $n - 1$; es decir, que $f^{n-1}(x) = 2^{n-1}e^{2x}$; entonces, derivando, tenemos que: $f^n(x) = 2 \cdot 2^{n-1}e^{2x} = 2^ne^{2x}$. Por tanto, la expresión obtenida es cierta para todo n.

46 **a) Representa la función siguiente: $f(x) = |x + 1| + |x - 3|$**

Observando la gráfica, di en qué puntos no es derivable.

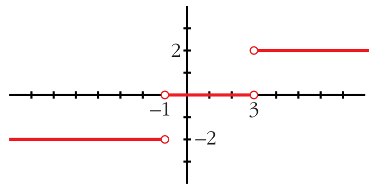
b) Representa $f'(x)$.

a) $f(x) = \begin{cases} -x - 1 - x + 3 & \text{si } x < -1 \\ x + 1 - x + 3 & \text{si } -1 \le x \le 3 \\ x + 1 + x - 3 & \text{si } x > 3 \end{cases} = \begin{cases} -2x + 2 & \text{si } x < -1 \\ 4 & \text{si } -1 \le x \le 3 \\ 2x - 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$



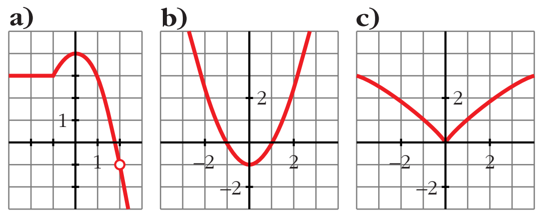
No es derivable en $x = -1$ ni en $x = 3$. (Son puntos "angulosos").

b) $f'(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } -1 < x < 3 \\ 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$



47 **S** **Observa las gráficas de las siguientes funciones e indica en qué puntos no son derivables.**

¿Alguna de ellas es derivable en todo $\mathbb{R}$?



a) No es derivable en $x = -1$ (tiene un punto "anguloso") ni en $x = 2$ (no está definida la función).

b) Es derivable en todo $\mathbb{R}$.

c) No es derivable en $x = 0$ (tiene un punto "anguloso").

48 **S** **La función $f(x)$ está definida por:**

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x & \text{si } x \le 0 \\ ax + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Calcula a y b para que f sea continua y derivable.

Continuidad:

- **En $x \ne 0$** $\rightarrow$ La función es continua, pues está formada por dos polinomios.
- **En $x = 0$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (x^3 - x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (ax + b) = b \\ f(0) = 0 \end{array}\right\} \text{Para que sea continua ha de ser } b = 0$$

Derivabilidad:

- **Si $x \ne 0$** $\rightarrow$ La función es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ a & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- **En $x = 0$:**

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = -1 \\ f'(0^+) = a \end{array}\right\} \text{Para que sea derivable, ha de ser } a = -1.$$

Por tanto, $f(x)$ será continua y derivable si $a = -1$ y $b = 0$.

49 **S** **Estudia la continuidad y derivabilidad de esta función:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{si } x \le 1 \\ x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

¿Existe algún punto en el que $f'(x) = 0$?

Represéntala gráficamente.

Continuidad:

- **En $x \neq 1$:** La función es continua, pues está formada por dos polinomios.
- **En $x = 1$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x^2 + 2x - 1) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x + 1) = 2 \\ f(1) = 2 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1).$$

Por tanto, la función es continua en $x = 1$.

La función es continua en todo $\mathbb{R}$.

Derivabilidad:

- **Si $x \neq 1$:** La función es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- **En $x = 1$:**

$f'(1^-) = 4 \neq f'(1^+) = 1$

La función no es derivable en $x = 1$.

Por tanto, la función es derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$.

Puntos en los que $f'(x) = 0$:

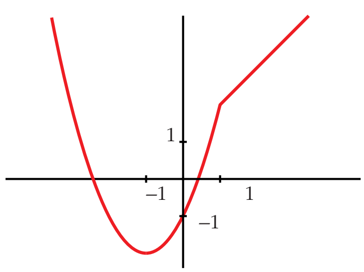
$f'(x) = 2x + 2$ si $x < 1$

$2x + 2 = 0 \quad \to \quad x = -1$

$f'(x) = 1$ si $x > 1 \quad \to \quad f'(x) \neq 0$ si $x > 1$

Por tanto, la derivada se anula en $x = -1$.

Gráfica de $f(x)$:



50 **S** **Halla a y b para que la función $f(x)$ sea continua:**

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } x < -1 \\ ax + b & \text{si } -1 \le x < 0 \\ 3x^2 + 2 & \text{si } 0 \le x \end{cases}$$

Para los valores de a y b obtenidos, estudia la derivabilidad de f.

- **Si $x \neq -1$ y $x \neq 0$:** La función es continua, pues está formada por polinomios.

- **En $x = -1$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} (2x + a) = -2 + a \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} (ax + b) = -a + b \\ f(-1) = -a + b \end{array}\right\}$$

Para que sea continua, ha de ser $-2 + a = -a + b$, es decir: $b = 2a - 2$.

- **En $x = 0$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (ax + b) = b \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (3x^2 + 2) = 2 \\ f(0) = 2 \end{array}\right\}$$

Para que sea continua, ha de ser $b = 2$.

Por tanto, $f(x)$ será continua si $a = 2$ y $b = 2$.

Para estos valores, queda:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < -1 \\ 2x + 2 & \text{si } -1 \le x < 0 \\ 3x^2 + 2 & \text{si } 0 \le x \end{cases}; \text{ es decir:}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 + 2 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

Derivabilidad:

- **Si $x \neq 0$:** Es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 0 \\ 6x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

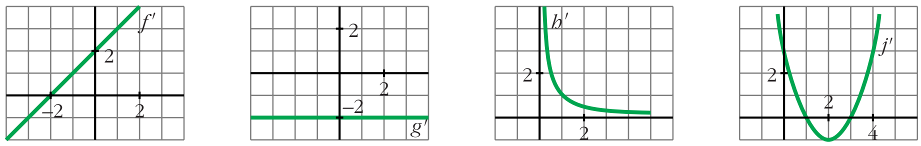
- **En $x = 0$:**

$f'(0^-) = 2 \neq f'(0^+) = 0$

La función no es derivable en $x = 0$.

Por tanto, es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

51 **S** **Estas gráficas representan las funciones derivadas de las funciones f, g, h y j:**



a) ¿Cuáles de estas funciones tienen puntos de tangente horizontal?

b) ¿Cuál de estas gráficas es la función derivada de una función polinómica de primer grado?

c) ¿Cuál de ellas corresponde a una función polinómica de segundo grado?

a) Los puntos de tangente horizontal son los puntos en los que se anula la derivada.

f tiene un punto de tangente horizontal en $x = -2$, pues $f'(-2) = 0$.

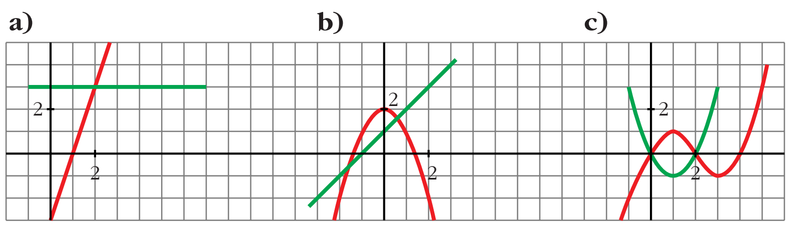
j tiene dos puntos de tangente horizontal en $x = 1$ y en $x = 3$, pues $j'(1) = j'(3) = 0$.

g y h no tienen ningún punto de tangente horizontal.

b) La derivada de una función polinómica de primer grado es una función constante. Por tanto, es g'.

c) La derivada de una función polinómica de segunda grado es una función polinómica de primer grado. Por tanto, es f'.

52 **¿Cuál de estas gráficas representa la función f y cuál su derivada f'? Justifica tu respuesta.**



a) La función es una recta que tiene pendiente 3. Por tanto, su derivada es $y = 3$. Luego, estas gráficas *sí* representan a una función y su derivada.

b) En $x = 0$, la función tiene un máximo; la derivada se anula. La recta tendría que pasar por (0, 0).

No representan, por tanto, a una función y su derivada.

c) En $x = 1$, la función tiene un máximo; la derivada se anula, y tendría que pasar por (1, 0). Estas *tampoco* representan a una función y su derivada.

Por tanto, solo la primera es válida.

Página 272

53 **S** **Halla los puntos de derivada nula de la función $y = (3x - 2x^2)\, e^x$.**

$$y' = (3 - 4x)e^x + (3x - 2x^2)e^x = (3 - 4x + 3x - 2x^2)e^x = (-2x^2 - x + 3)e^x$$

$$y' = 0 \;\rightarrow\; -2x^2 - x + 3 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{-4} = \frac{1 \pm 5}{-4} \begin{cases} x = \dfrac{-3}{2} \\ x = 1 \end{cases}$$

54 **Dada la función $f(x) = e^x + ln(1 - x)$, comprueba que $f'(0) = 0$ y $f''(0) = 0$. ¿Será también $f'''(0) = 0$?**

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{1 - x} \;\rightarrow\; f'(0) = 1 - 1 = 0$$

$$f''(x) = e^x - \frac{1}{(1 - x)^2} \;\rightarrow\; f''(0) = 1 - 1 = 0$$

$$f'''(x) = e^x - \frac{2}{(1 - x)^3} \;\rightarrow\; f'''(0) = 1 - 2 = -1 \neq 0$$

55 **Estudia la continuidad y derivabilidad de esta función:**

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{2x(x-3)}{x^2 - 9} & \text{si } x \neq 0,\; x \neq 3 \\ 1 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} -1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{2x(x-3)}{(x-3)(x+3)} & \text{si } x \neq 0,\; x \neq 3 \\ 1 & \text{si } x = 3 \end{array} \right\} = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{2x}{x+3} & \text{si } x \neq 0,\; x \neq 3 \\ 1 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{-3\}$. Por tanto, en $x = -3$ no es continua (ni derivable), pues no está definida.

Continuidad:

- **En $x \neq 0$, $x \neq 3$ y $x \neq -3$:** Es continua, pues las funciones que la forman son continuas en este caso.

- **En $x = 0$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{x + 3} = 0 \\ f(0) = -1 \end{array}\right\}$$

No es continua en $x = 0$ (tiene una discontinuidad evitable).

• **En $x = 3$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x}{x+3} = 1 \\ f(3) = 1 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3). \text{ La función es continua en } x = 3.$$

• **En $x = -3$:** *No* es continua, pues no está definida.

Por tanto, $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{-3, 0\}$.

Derivabilidad:

• **Si $x \neq 0$, $x \neq 3$ y $x \neq -3$:** Es derivable. Además: $f'(x) = \dfrac{6}{(x+3)^2}$

• **En $x = 0$ y en $x = -3$:** *No* es derivable, pues no es continua.

• **En $x = 3$:** *Sí* es derivable, pues $f'(3^-) = f'(3^+) = f'(3) = \dfrac{1}{6}$.

Por tanto, $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R} - \{-3, 0\}$. Además:

$$f'(x) = \frac{6}{(x+3)^2} \quad \text{si } x \neq 0 \text{ y } x \neq -3$$

56 S **Determina, si es posible, el valor del parámetro a para que la función f sea derivable en todo su dominio de definición:**

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ a(1 - e^{1-x}) & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

Para que $f(x)$ sea derivable, en primer lugar, ha de ser continua.

• **Si $x > 0$, $x \neq 1$:** La función es continua, pues está formada por funciones continuas.

• **En $x = 1$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x \ln x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} [a(1 - e^{1-x})] = 0 \\ f(1) = 0 \end{array}\right\} f(x) \text{ es continua en } x = 0.$$

Derivabilidad

• **Si $x > 0$, $x \neq 1$:** es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} \ln x + 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ ae^{1-x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

• **En $x = 1$:**

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = 1 \\ f'(1^+) = a \end{array}\right\} f(x) \text{ es derivable en } x = 1 \text{ si } a = 1.$$

Luego, para que f sea derivable en todo su dominio de definición, ha de ser $a = 1$.

57 **S** **Estudia la derivabilidad en $x = 0$ de la función:**

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt[3]{x^2} & x \le 0 \\ 1 - \sqrt[3]{x^2} & x > 0 \end{cases}$$

Como $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 1$, la función es continua en $x = 0$.

Veamos si es derivable:

- **Si $x \neq 0$,** tenemos que:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}} & \text{si } x < 0 \\[2ex] \dfrac{-2}{3\sqrt[3]{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

No existen las derivadas laterales en $x = 0$. Por tanto, $f(x)$ *no* es derivable en $x = 0$.

58 **S** **Estudia la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \dfrac{1}{1 + |x|}$ **b)** $f(x) = \dfrac{|x|}{x^2 - 1}$

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 - x} & \text{si } x < 0 \\[2ex] \dfrac{1}{1 + x} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

Continuidad:

- **Si $x \neq 0$** $\rightarrow$ Es continua, pues está formada por dos funciones continuas en los intervalos en los que están definidas.

- **Si $x = 0$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} \dfrac{1}{1 - x} = 1 \\[2ex] \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} \dfrac{1}{1 + x} = 1 \\[2ex] f(0) = 1 \end{array}\right\} \lim_{x \to 0} f(x) = f(0). \text{ Es continua en } x = 0.$$

Por tanto, es una función continua en $\mathbb{R}$.

Derivabilidad:

- **Si $x \neq 0$:** Es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1 - x)^2} & \text{si } x < 0 \\[2ex] \dfrac{-1}{(1 + x)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

• **En $x = 0$:**

$f'(0^-) = 1 \neq f'(0^+) = -1$

No es derivable en $x = 0$.

Por tanto, es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{x^2 - 1} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x}{x^2 - 1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

El dominio de la función es $D = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$. Por tanto, en $x = -1$ y en $x = 1$, la función no es continua (ni derivable).

Continuidad:

• **Si $x \neq 0$, $x \neq -1$, $x \neq 1$:** La función es continua, pues está formada por funciones continuas (en estos puntos).

• **En $x = -1$ y en $x = 1$:** No es continua, pues no está definida en estos puntos.

• **En $x = 0$:**

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{-x}{x^2 - 1} = 0 \\ &\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x^2 - 1} = 0 \\ &f(0) = 0 \end{aligned}\right\} \lim_{x \to 0} f(x) = f(0). \text{ La función es continua en } x = 0.$$

Por tanto, es una función continua en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

Derivabilidad:

• **Si $x \neq 0$, $x \neq -1$, $x \neq 1$:** Es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

• **En $x = -1$ y en $x = 1$:** No es derivable, pues no está definida la función.

• **En $x = 0$:**

$f'(0^-) = 1 \neq f'(0^+) = -1$. No es derivable en $x = 0$.

Por tanto, es derivable en $\mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$.

59 **Prueba que** $D\left[arc\ tg\ \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right] = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$

$$D\left[arc\ tg\ \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right] = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{\left(1 + \dfrac{e^{2x} - e^{-2x} - 2}{4}\right) \cdot 2} =$$

$$= \frac{(e^x + e^{-x}) \cdot 4}{(e^{2x} + e^{-2x} + 2) \cdot 2} = \frac{(e^x + e^{-x}) \cdot 2}{(e^x + e^{-x}) \cdot 2} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

60 **Demuestra que la derivada de la función** $y = arc\ tg \sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$ **con** $0 \le x \le \pi$ **es una constante.**

Recuerda la fórmula de $tg\ \dfrac{x}{2}$.

Si $0 \le x \le \pi \quad \to \quad 0 \le \dfrac{x}{2} \le \dfrac{\pi}{2} \quad \to \quad tg\ \dfrac{x}{2} = \sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$

Así: $y = arc\ tg \sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = arc\ tg \left(tg\ \dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{x}{2}$

Por tanto: $y' = \dfrac{1}{2}$

61 **Si** $f(x) = x^2|x|$, **halla** f', f'' **y** f'''.

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 & \text{si } x < 0 \\ x^3 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

Derivando:

$$f'(x) = \begin{cases} -3x^2 & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

(En $x = 0$, tenemos que $f'(0^-) = f'(0^+) = f'(0) = 0$).

$$f''(x) = \begin{cases} -6x & \text{si } x < 0 \\ 6x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

(En $x = 0$, tenemos que $f''(0^-) = f''(0^+) = f''(0) = 0$).

$$f'''(x) = \begin{cases} -6 & \text{si } x < 0 \\ 6 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(En $x = 0$ no existe f''', puesto que $f'''(0^-) = -6 \ne f'''(0^+) = 6$).

62 **Halla los puntos de derivada nula de la función $y = \cos 2x - 2 \cos x$.**

$y' = -\text{sen } 2x \cdot 2 - 2 \cdot (-\text{sen } x) = -2\text{sen } 2x + 2 \text{ sen } x =$

$= -2 \cdot 2\text{sen } x \cdot \cos x + 2\text{sen } x = 2\text{sen } x\,(-2\cos x + 1)$

$y' = 0 \;\rightarrow\; 2\text{sen } x\,(-2\cos x + 1) = 0$

$\text{sen } x = 0 \;\rightarrow\; x = 0 + k \cdot \pi$

$-2\cos x + 1 = 0 \;\rightarrow\; \cos x = \dfrac{1}{2}$ $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k \\ x = \dfrac{5\pi}{3} + 2\pi k \end{cases}$; con $k \in \mathbb{Z}$

CUESTIONES TEÓRICAS

63 **Sabes que** $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$.

A partir de esta expresión, justifica la validez de esta otra:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Llamando $h = x - x_0$, tenemos que:

- Si $h \to 0$, entonces $x \to x_0$.
- Además, $x_0 + h = x$

Por tanto: $\displaystyle f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

64 **Relaciona los siguientes límites con la derivada de las funciones que aparecen en ellos:**

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \qquad \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\phi(2 + x) - \phi(2)}{x}$$

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(a)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\phi(2 + x) - \phi(2)}{x} = \phi'(2)$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = f'(0)$$

65 S **Una función polinómica de tercer grado, ¿cuántos puntos de derivada nula puede tener?**

¿Es posible que no tenga ninguno?

¿Es posible que solo tenga uno?

La derivada de una función polinómica de tercer grado es una función polinómica de segundo grado.

Por tanto, puede haber dos puntos, un punto, o ningún punto, con derivada nula.

Por ejemplo:

$f(x) = x^3 - 3x \quad \to \quad f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array} \right\} \text{ Dos puntos}$

$f(x) = x^3 \quad \to \quad f'(x) = 3x^2 = 0 \quad \to \quad x = 0 \quad \to$ Un punto

$f(x) = x^3 + 3x \quad \to \quad f'(x) = 3x^2 + 3 \neq 0$ para todo $x \quad \to$ Ninguno

66 **Justifica que una función polinómica de segundo grado tiene siempre un punto de tangente horizontal.**

Su derivada es una función polinómica de primer grado, que se anula siempre en un punto.

67 **¿Puede haber dos funciones que tengan la misma derivada? Pon ejemplos de funciones cuya derivada sea $f'(x) = 2x$.**

Sí. Por ejemplo, si $f'(x) = 2x$, podemos considerar: $f(x) = x^2 + k$, siendo k una constante cualquiera.

68 S **Dadas $f(x) = (x + 1)^2$ y $g(x) = 3x$, calcula:**

a) $f'(3x)$ **b) $(f \circ g)'(x)$**

c) $g'[f(x)]$ **d) $(g \circ f)'(x)$**

$f'(x) = 2(x + 1) = 2x + 2; \; g'(x) = 3$

a) $f'(3x) = 2 \cdot 3x + 2 = 6x + 2$

b) $(f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x) = (2 \cdot 3x + 2) \cdot 3 = 18x + 6$

c) $g'[f(x)] = 3$

d) $(g \circ f)'(x) = g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x) = 3(2x + 2) = 6x + 6$

69 **La función $y = \sqrt{x^2 - 4x}$, ¿tiene algún punto de derivada nula?**

¿Y la función $y = \sqrt{4x - x^2}$?

$$y = \sqrt{x^2 - 4x} \quad \to \quad Dominio = (-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$$

$$y' = \frac{2x - 4}{2\sqrt{x^2 - 4x}} = \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x}} = 0 \quad \to \quad x = 2$$

Pero $x = 2$ no pertenece al dominio de definición de la función. Por tanto, no tiene ningún punto de derivada nula.

Para la otra función:

$$y = \sqrt{4x - x^2} \quad \to \quad Dominio = [0, 4]$$

$$y' = \frac{4 - 2x}{2\sqrt{4x - x^2}} = \frac{2 - x}{\sqrt{4x - x^2}} = 0 \quad \to \quad x = 2 \text{ (Sí pertenece al dominio)}$$

La derivada se anula en $x = 2$.

PARA PROFUNDIZAR

70 **Demuestra que todas las derivadas de orden par de la función $f(x) = sen\ 2x$ se anulan en el origen de coordenadas.**

$$f^{\mathrm{I}}(x) = 2cos\ 2x$$

$$f^{\mathrm{II}}(x) = -4sen\ 2x = -2^2 \cdot sen\ 2x$$

$$f^{\mathrm{III}}(x) = -8cos\ 2x = -2^3 \cdot cos\ 2x$$

$$f^{\mathrm{IV}}(x) = 16sen\ 2x = 2^4 \cdot sen\ 2x$$

$$\ldots$$

En general, las derivadas de orden par son de la forma: $f^{(n)}(x) = k \cdot sen\ 2x$, donde k es constante.

Por tanto, se anulan todas en $x = 0$, puesto que $sen\ 0 = 0$. Como $f(0) = 0$, tenemos que todas las derivadas de orden par de $f(x)$ se anulan en el origen de coordenadas.

Página 273

71 **Dada $y = sen\ x$, halla un punto en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ en el que la tangente sea paralela a la cuerda que pasa por (0, 0) y $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.**

La cuerda que pasa por (0, 0) y $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ tiene pendiente: $m = \frac{1}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}$.

Tenemos que hallar un punto del intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ en el que la derivada de la función sea igual a $\frac{2}{\pi}$:

$$\left.\begin{array}{l} y' = cos\, x = \dfrac{2}{\pi} \\ x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \end{array}\right\} \rightarrow \; x = 0{,}88$$

72 **Prueba, utilizando la definición de derivada, que la función:**

$$\boldsymbol{f(x) = (1 - x)\sqrt{1 - x^2}}$$

es derivable en $x = 1$ y no lo es en $x = -1$.

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h\sqrt{1 - (1 + h)^2}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(-\sqrt{1 - (1 + h)^2}\right) = 0 = f'(1)$$

$$f'(-1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-1 + h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(2 - h)\sqrt{2h - h^2} - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left((2 - h)\sqrt{\frac{2h - h^2}{h^2}}\right) = \lim_{h \to 0} (2 - h)\sqrt{\frac{(2 - h)}{h}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{0} \quad \rightarrow \quad \text{no existe } f'(-1)$$

73 **Sean f y g dos funciones derivables en $\mathbb{R}$, tales que:**

$f(0) = 5;\ f'(0) = 6;\ f'(1) = 3$

$g(0) = 1;\ g'(0) = 4;$ y $g'(5) = 2$

Prueba que $f \circ g$ y $g \circ f$ tienen la misma derivada en $x = 0$.

Aplicamos la regla de la cadena:

$$(f \circ g)'(0) = f'\big(g(0)\big) \cdot g'(0) = f'(1) \cdot g'(0) = 3 \cdot 4 = 12$$

$$(g \circ f)'(0) = g'\big(f(0)\big) \cdot f'(0) = g'(5) \cdot f'(0) = 2 \cdot 6 = 12$$

74
S

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{sen\, x}{x} + 2 & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

¿Hay algún valor de k para el cual $f(x)$ sea continua en $x = 0$?

Continuidad: Debe cumplirse que $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{sen\ x}{x} + 2 \right) = 1 + 2 = 3 \\ f(0) = k \end{array}\right\}$$

La función será continua en $x = 0$ si $k = 3$.

75 Halla la derivada *n*-ésima de las funciones siguientes:

a) $y = e^{ax}$ **b)** $y = \dfrac{1}{x}$ **c)** $y = ln(1 + x)$

a) $y' = a\, e^{ax}$; $y'' = a^2 e^{ax}$; $y''' = a^3 e^{ax}$; … $y^{n)} = a^n e^{ax}$

Lo demostramos por inducción: (para $n = 1, 2, 3$ se cumple).

Si $y^{n-1)} = a^{n-1} e^{ax}$, derivando obtenemos: $y^{n)} = a \cdot a^{n-1} e^{ax} = a^n e^{ax}$, como queríamos demostrar.

b) $y' = \dfrac{-1}{x^2}$; $y'' = \dfrac{2}{x^3}$; $y''' = \dfrac{-6}{x^4}$; … $y^{n)} = \dfrac{(-1)^n\, n!}{x^{n+1}}$

Lo demostramos por inducción: (para $n = 1, 2, 3$ se cumple).

Si $y^{n-1)} = \dfrac{(-1)^{n-1}\,(n-1)!}{x^n}$, derivando obtenemos:

$y^{n)} = \dfrac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!\,(-1) \cdot n}{x^{n+1}} = \dfrac{(-1)^n\, n!}{x^{n+1}}$, como queríamos demostrar.

c) $y' = \dfrac{1}{1+x}$; $y'' = \dfrac{-1}{(1+x)^2}$; $y''' = \dfrac{2}{(1+x)^3}$; … $y^{n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}\,(n-1)!}{(1+x)^n}$

Lo probamos por inducción: (para $n = 1, 2, 3$ se cumple).

Si $y^{n-1)} = \dfrac{(-1)^{n-2}\,(n-2)!}{(1+x)^{n-1}}$, derivando, obtenemos:

$y^{n)} = \dfrac{(-1)^{n-2} \cdot (n-2)!\,(-1)(n-1)}{(1+x)^n} = \dfrac{(-1)^{n-1}\,(n-1)!}{(1+x)^n}$, como queríamos demostrar.

76 Considera la función: $f(x) = \begin{cases} x^n\, sen(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ **siendo *n* un número natural.**

a) Demuestra que *f* es derivable en $x = 0$ para $n = 2$.

b) Demuestra que *f* no es derivable en $x = 0$ para $n = 1$.

a) $f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h^2\, sen\,(1/h) - 0}{h} = \lim\limits_{h \to 0} h\, sen\left(\dfrac{1}{h}\right) \overset{(*)}{=} 0$

(*) Tenemos en cuenta que $-1 \leq sen\left(\dfrac{1}{h}\right) \leq 1$.

Por tanto, f es derivable en $x = 0$ para $n = 2$.

b) $f'(0) = \lim \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim \dfrac{h\ sen\ (1/h) - 0}{h} = \lim\ sen \left(\dfrac{1}{h}\right)$

Este límite no existe (el valor de $sen \left(\dfrac{1}{h}\right)$ va oscilando entre –1 y 1).

Por tanto, f no es derivable en $x = 0$ para $n = 1$.

77 **Prueba que existe un punto de la curva: $f(x) = e^x + arc\ tg\ x$ cuya tangente (en ese punto) es paralela a la recta $y = 3x + 2$.**

☞ ***Aplica el teorema de Bolzano a la función $f'(x) - 3$.***

La pendiente de la recta $y = 3x + 2$ es $m = 3$.

Tenemos que probar que existe un punto de la curva $f(x)$ tal que $f'(x) = 3$.

$$f'(x) = e^x + \frac{1}{1 + x^2} = 3$$

Consideramos la función $G(x) = f'(x) - 3$; es decir:

$$G(x) = e^x + \frac{1}{1 + x^2} - 3$$

Tenemos que: $\begin{cases} G(0) = -1 < 0 \\ G(1) = e - \dfrac{5}{2} \approx 0{,}22 > 0 \\ G(x) \text{ es una función continua en } [0, 1] \end{cases}$

Aplicando el teorema de Bolzano, sabemos que existe un punto $c \in (0, 1)$ tal que $G(c) = 0$. Es decir, $f'(c) - 3 = 0$; o bien $f'(c) = 3$, como queríamos probar.

78 **Comprueba en cada caso que $f(x)$ verifica la ecuación indicada:**

a) $f(x) = e^x\ sen\ x$

$f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 0$

b) $f(x) = ln \dfrac{1}{x + 1}$

$x f'(x) + 1 = e^{f(x)}$

a) $f'(x) = e^x\ sen\ x + e^x \cos x$

$f''(x) = \cancel{e^x\ sen\ x} + e^x \cos x + e^x \cos x - \cancel{e^x\ sen\ x} = 2e^x \cos x$

$f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 2e^x \cos x - 2e^x\ sen\ x - 2e^x \cos x + 2e^x\ sen\ x = 0$

Por tanto: $f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 0$

De otra forma:

$f'(x) = e^x\ sen\ x + e^x \cos x = f(x) + e^x \cos x$

$f''(x) = f'(x) + e^x \cos x - e^x\ sen\ x =$

$= f'(x) + e^x \cos x - e^x\ sen\ x + e^x\ sen\ x - e^x\ sen\ x =$

$= f'(x) + (e^x\ sen\ x + e^x \cos x) - 2(e^x\ sen\ x) =$

$= f'(x) + f'(x) - 2f(x) = 2f'(x) - 2f(x)$

Por tanto: $f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 0$

b) $f(x) = ln\ 1 - ln\ (x + 1) = -ln(x + 1)$

$f'(x) = \dfrac{-1}{x+1}$

$xf'(x) + 1 = \dfrac{-x}{x+1} + 1 = \dfrac{-x + x + 1}{x+1} = \dfrac{1}{x+1} = e^{ln\left(\frac{1}{x+1}\right)} = e^{f(x)}$

Por tanto: $xf'(x) + 1 = e^{f(x)}$

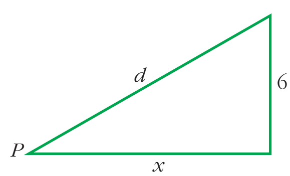
PARA PENSAR UN POCO MÁS

79 **Un avión vuela horizontalmente a 6 km de altura. La ruta del avión pasa por la vertical de un punto P y se sabe que, en el instante en que la distancia del avión a P es 10 km, dicha distancia aumenta a razón de 6 km/minuto.**

Halla la velocidad del avión, que supondremos constante.

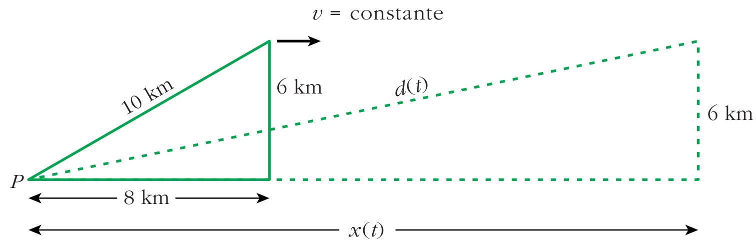
Pasos:

a) Expresa d en función de x:



b) Obtén la expresión de la velocidad de alejamiento de P, $d'(t)$, en función de x y de $x'(t)$.

c) Despeja $x'(t_0)$ siendo t_0 el instante al que se refiere el enunciado y, por tanto, para el que conocemos algunos datos numéricos. $x'(t_0)$ es la velocidad del avión en ese instante y, por tanto, su velocidad constante.



a) $d = \sqrt{x^2 + 36}$

b) $d(t) = \sqrt{(x(t))^2 + 36}$

$$d'(t) = \frac{2x(t)\,x'(t)}{2\sqrt{(x(t))^2 + 36}} = \frac{x(t) \cdot x'(t)}{\sqrt{(x(t))^2 + 36}}$$

c) $x'(t_0) = \dfrac{d'(t_0)\sqrt{(x(t_0))^2 + 36}}{x(t_0)} = \dfrac{6\sqrt{8^2 + 36}}{8} = \dfrac{60}{8} = 7{,}5$ km/min

El avión va a 7,5 km/min; es decir, a 450 km/h.