2 ÁLGEBRA DE MATRICES

Página 48

■ **Ayudándote de la tabla...**

De la tabla podemos deducir muchas cosas:

— Al consejero A no le gusta ninguno de sus colegas como presidente.

— B solo tiene un candidato (el C).

— Dos consejeros (C y E) están de acuerdo en los mismos candidatos (B, C y D).

— El consejero F no opta por ninguno de sus compañeros.

— Al candidato E no le prefiere ninguno de los otros consejeros. De hecho, es el único que no se considera idóneo para el cargo.

— Los candidatos B y D han obtenido los mismos resultados.

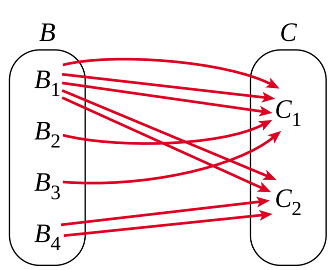
— Solo A y C se consideran idóneos para el puesto de presidente.

— ...

Según los resultados, el candidato C es el más idóneo para presidir la empresa (por lo menos eso piensan sus compañeros del consejo).

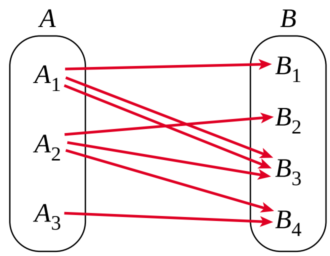
Página 49

■ **Aquí tienes representados, mediante flechas, los vuelos que hay el martes desde el país *B* hasta el país *C*. Representa, mediante una tabla, la información recogida en el diagrama.**



	C_1	C_2
B_1	3	2
B_2	1	0
B_3	1	0
B_4	0	2

■ **Una persona quiere salir el lunes de A, pasar la noche en B y llegar el martes a C.**



En total tenemos 5 posibles formas de ir de A_1 a C_1.

Continúa tú, rellenando razonadamente el resto de la tabla y explicando, en cada caso, cómo llegas a la respuesta.

	C_1	C_2
A_1	**5**	2
A_2	2	2
A_3	0	2

Página 51

1. Escribe las matrices traspuestas de:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 6 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 7 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{F} = (5 \;\; 4 \;\; 6 \;\; 1)$$

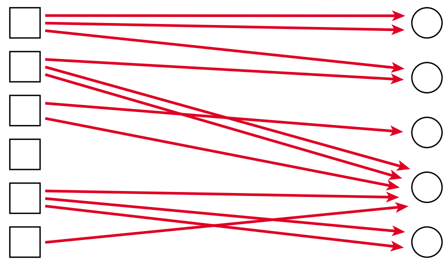
$$A^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad B^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \qquad C^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D^t = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 7 & 2 \end{pmatrix} \qquad E^t = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 7 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad F^t = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Escribe una matriz X tal que $X^t = X$.

Por ejemplo, $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Escribe una matriz que describa lo siguiente:



$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Página 52

1. Sean las matrices:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{-3} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{8} & \mathbf{-10} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{-3} & \mathbf{1} & \mathbf{5} \\ \mathbf{6} & \mathbf{2} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$$

Calcula $\boldsymbol{E = 2A - 3B + C - 2D}$.

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 8 & 2 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ -12 & 3 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 8 & -10 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & 2 & 10 \\ 12 & 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -1 & -18 \\ 16 & -15 & -23 \end{pmatrix}$$

Página 55

2. Efectúa todos los posibles productos entre las siguientes matrices:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{5} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{7} & \mathbf{1} & \mathbf{5} \\ \mathbf{6} & \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-5} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{5} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{-3} \end{pmatrix}$$

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 & 5 \\ 24 & -4 & -1 & -10 \end{pmatrix}; \qquad A \cdot D = \begin{pmatrix} 7 & 18 & -4 \\ 0 & 30 & 5 \end{pmatrix}; \qquad B \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & 14 & 21 \\ -3 & 3 & -2 \\ -2 & 5 & 1 \\ -5 & 26 & 13 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot B = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 39 & 3 \\ -9 & -4 \end{pmatrix}; \qquad D \cdot C = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 2 & 5 \\ 26 & 5 & 2 & 0 \\ 28 & 38 & -1 & 10 \end{pmatrix}; \qquad D \cdot D = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 4 & 31 & 4 \\ -4 & 4 & 17 \end{pmatrix}$$

3. **Intenta conseguir una matriz I_3 de dimensión 3×3 que, multiplicada por cualquier otra matriz $A(3 \times 3)$, la deje igual.**

Es decir: $A \cdot I_3 = I_3 \cdot A = A$

La matriz I_3 se llama matriz unidad de orden 3. Cuando la tengas, sabrás obtener una matriz unidad de cualquier orden.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Página 56

1. **Comprueba las propiedades 2, 3 y 4 anteriores, referentes al producto de números por matrices, tomando: $a = 3$, $b = 6$**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2)\ 9A = \begin{pmatrix} 27 & 45 & -9 \\ 18 & -27 & 0 \end{pmatrix} \\ \quad 3A + 6A = \begin{pmatrix} 9 & 15 & -3 \\ 6 & -9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 & 30 & -6 \\ 12 & -18 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 45 & -9 \\ 18 & -27 & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

$$9A = 3A + 6A$$

$$\left.\begin{array}{l} 3)\ 3(A + B) = 3 \begin{pmatrix} 10 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 9 & 0 \\ 18 & 9 & 24 \end{pmatrix} \\ \quad 3A + 3B = \begin{pmatrix} 9 & 15 & -3 \\ 6 & -9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 21 & -6 & 3 \\ 12 & 18 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 9 & 0 \\ 18 & 9 & 24 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

$$3(A + B) = 3A + 3B$$

$$4)\ 1 \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} = A$$

Página 57

2. **Comprueba las propiedades distributivas para las siguientes matrices:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 0 & 9 & -2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 5 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} A \cdot (B + C) = A \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 & 7 \\ 3 & -1 & 14 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 2 & 68 & 19 \\ 15 & -5 & 70 & 15 \\ 21 & 0 & 96 & 25 \end{pmatrix} \\ A \cdot B + A \cdot C = \begin{pmatrix} 11 & 5 & 42 & -1 \\ 15 & 0 & 45 & -10 \\ 17 & 5 & 60 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -3 & 26 & 20 \\ 0 & -5 & 25 & 25 \\ 4 & -5 & 36 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 2 & 68 & 19 \\ 15 & -5 & 70 & 15 \\ 21 & 0 & 96 & 25 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

$$\left.\begin{array}{l}(B + C) \cdot D = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 & 7 \\ 3 & -1 & 14 & 3 \end{pmatrix} \cdot D = \begin{pmatrix} -24 \\ -60 \end{pmatrix} \\ B \cdot D + C \cdot D = \begin{pmatrix} 0 \\ -48 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -24 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ -60 \end{pmatrix}\end{array}\right\}$$

$(B + C) \cdot D = B \cdot D + C \cdot D$

Página 59

1. Calcula, utilizando el método de Gauss, la inversa de cada una de las siguientes matrices o averigua que no la tiene:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

a) $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a - 2^a \\ 1^a \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$ La inversa es $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 3 \cdot 1^a \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a + 2^a \\ 2^a \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \to$

$\to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a : (-2) \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right) \to$ La inversa es $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

c) $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a + 2 \cdot 1^a \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \to$ No tiene inversa

2. Calcula la inversa de cada una de las siguientes matrices o averigua que no la tiene:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 4 \cdot 1^a \\ 3^a - 7 \cdot 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$

$\to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2 \cdot 2^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \to$ No tiene inversa

b) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$

$$\xrightarrow{\substack{1^a - 3 \cdot 3^a \\ 2^a - 2 \cdot 3^a \\ 3^a}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{1^a - 2 \cdot 2^a \\ 2^a \\ 3^a}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

La inversa es $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{3^a : 2 \\ 2^a \\ 1^a}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{\substack{1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 1^a}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & -1/2 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{1^a \\ 2^a \\ 2 \cdot 3^a - 2^a}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & -1 & -1/2 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{\substack{1^a \\ 2^a \cdot 5 - 3^a \\ 3^a : 5}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 10 & 0 & -2 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & -1/5 & -1/10 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{\substack{1^a \\ 2^a : 10 \\ 3^a}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/5 & 3/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & -1/5 & -1/10 \end{array}\right) \to \text{La inversa es } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ -1/5 & 3/5 & -1/5 \\ 2/5 & -1/5 & -1/10 \end{pmatrix}$$

Página 61

3. Calcula x, y, z, t para que se cumpla: $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - z & 2y - t \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x - z = 5 \\ 2y - t = 1 \\ z = 0 \\ t = 2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{5}{2} \\ y = \dfrac{3}{2} \\ z = 0 \\ t = 2 \end{array}\right\}$$

Solución: $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 & 3/2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

4. Para las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, comprueba:

a) $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$

b) $(A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C)$

c) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

a) $A \cdot (B + C) = A \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 41 & 10 \end{pmatrix}$

$A \cdot B + A \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 26 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 15 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 41 & 10 \end{pmatrix}$

$\Big\}\ A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

b) $(A + B) \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \cdot C = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 30 & 6 \end{pmatrix}$

$A \cdot C + B \cdot C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 15 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 15 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 30 & 6 \end{pmatrix}$

$\Big\}\ (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

c) $A \cdot (B \cdot C) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 15 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 107 & 3 \end{pmatrix}$

$(A \cdot B) \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 26 & 3 \end{pmatrix} \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 107 & 3 \end{pmatrix}$

$\Big\}\ A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

5. Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Encuentra X que cumpla: $3 \cdot X - 2 \cdot A = 5 \cdot B$

$3X = 5B + 2A = \begin{pmatrix} 0 & 30 \\ 5 & -15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 10 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 30 \\ 15 & -17 \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 5 & -17/3 \end{pmatrix}$

6. Encuentra dos matrices, A y B, de dimensión 2×2 que cumplan:

$$2A + B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad A - B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$2A + B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$A - B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\Big\}$ Sumando: $3A = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$B = A - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Solución: $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

7. Encuentra dos matrices X e Y que verifiquen:

$$2X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } X - Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$2X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

$X - Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

$\Big\}$ $2X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

$-2X + 2Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}$ $\Big\}$

Sumando: $-Y = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -10 \end{pmatrix} \rightarrow Y = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$

8. Averigua cómo ha de ser una matriz *X* que cumpla:

$$\boldsymbol{X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X}$$

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x+y \\ z & z+t \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z & y+t \\ z & t \end{pmatrix} \end{array}\right\} \text{ han de ser iguales}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = x + z \\ x + y = y + t \\ z = z \\ z + t = t \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = t \\ \\ z = 0 \end{array}\right\}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$, donde x e y son números reales cualesquiera.

9. Efectúa las siguientes operaciones con las matrices dadas:

$$\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}}$$

a) $\boldsymbol{(A \cdot B) + (A \cdot C)}$

b) $\boldsymbol{(A - B) \cdot C}$

c) $\boldsymbol{A \cdot B \cdot C}$

a) $A \cdot B + A \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 18 & 6 \end{pmatrix}$

b) $(A - B) \cdot C = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -15 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

c) $A \cdot B \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 12 \\ 9 & -9 \end{pmatrix}$

10. Dada la matriz $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$ comprueba que $\boldsymbol{(A - I)^2 = 0}$.

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

11. Halla la inversa de las matrices:

a) $\boldsymbol{\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}$ **b)** $\boldsymbol{\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}}$

a) $\begin{pmatrix}7&3\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \quad\to\quad \begin{pmatrix}7x+3z&7y+3t\\2x+z&2y+t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{r}7x+3z=1\\2x+z=0\end{array}\right\}\begin{array}{l}x=1\\z=-2\end{array} \qquad\qquad \left.\begin{array}{r}7y+3t=0\\2y+t=1\end{array}\right\}\begin{array}{l}y=-3\\t=7\end{array}$

Por tanto, la inversa es $\begin{pmatrix}1&-3\\-2&7\end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix}3&-2\\-8&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \quad\to\quad \begin{pmatrix}3x-2z&3y-2t\\-8x+5z&-8y+5t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{r}3x-2z=1\\-8x+5z=0\end{array}\right\}\begin{array}{l}x=-5\\z=-8\end{array} \qquad\qquad \left.\begin{array}{r}3y-2t=0\\-8y+5t=1\end{array}\right\}\begin{array}{l}y=-2\\t=-3\end{array}$

Por tanto, la inversa es $\begin{pmatrix}-5&-2\\-8&-3\end{pmatrix}$.

Página 64

1. Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{4}&\mathbf{-1}\\\mathbf{-1}&\mathbf{3}&\mathbf{2}\\\mathbf{2}&\mathbf{2}&\mathbf{0}\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{3}&\mathbf{-1}\\\mathbf{2}&\mathbf{-1}&\mathbf{5}\\\mathbf{1}&\mathbf{10}&\mathbf{-8}\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{-2}&\mathbf{0}&\mathbf{-3}\\\mathbf{-1}&\mathbf{3}&\mathbf{1}&\mathbf{4}\\\mathbf{2}&\mathbf{1}&\mathbf{5}&\mathbf{-1}\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{2}&\mathbf{1}&\mathbf{-1}\\\mathbf{0}&\mathbf{2}&\mathbf{-1}&\mathbf{1}&\mathbf{2}\\\mathbf{-1}&\mathbf{1}&\mathbf{3}&\mathbf{2}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{8}&\mathbf{7}&\mathbf{9}&\mathbf{4}\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&4&-1\\-1&3&2\\2&2&0\end{pmatrix}\to \begin{array}{l}\text{1ª}\\\text{2ª + 1ª}\\\text{3ª – 2 · 1ª}\end{array} \begin{pmatrix}1&4&-1\\0&7&1\\0&-6&2\end{pmatrix}\to \begin{array}{l}\text{1ª}\\\text{2ª}\\\text{3ª – 2 · 2ª}\end{array} \begin{pmatrix}1&4&-1\\0&7&1\\0&-20&0\end{pmatrix}\to ran\ (A)=3$$

$$B=\begin{pmatrix}1&3&-1\\2&-1&5\\1&10&-8\end{pmatrix}\to \begin{array}{l}\text{1ª}\\\text{2ª – 2 · 1ª}\\\text{3ª – 1ª}\end{array} \begin{pmatrix}1&3&-1\\0&-7&7\\0&7&-7\end{pmatrix}\to \begin{array}{l}\text{1ª}\\\text{2ª}\\\text{3ª + 2ª}\end{array} \begin{pmatrix}1&3&-1\\0&-7&7\\0&0&0\end{pmatrix}\to ran\ (B)=2$$

$$C=\begin{pmatrix}1&-2&0&-3\\-1&3&1&4\\2&1&5&-1\end{pmatrix}\to \begin{array}{l}\text{1ª}\\\text{2ª + 1ª}\\\text{3ª – 2 · 1ª}\end{array} \begin{pmatrix}1&-2&0&-3\\0&1&1&1\\0&5&5&5\end{pmatrix}\to \begin{array}{l}\text{1ª}\\\text{2ª}\\\text{3ª – 5 · 2ª}\end{array}$$

$$\begin{pmatrix}1&-2&0&-3\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to ran\ (C)=2$$

$$D=\begin{pmatrix}1&0&2&1&-1\\0&2&-1&1&2\\-1&1&3&2&0\\0&8&7&9&4\end{pmatrix}\to \begin{array}{l}\text{1ª}\\\text{2ª}\\\text{3ª + 1ª}\\\text{4ª}\end{array} \begin{pmatrix}1&0&2&1&-1\\0&2&-1&1&2\\0&1&5&3&-1\\0&8&7&9&4\end{pmatrix}\to \begin{array}{l}\text{1ª}\\\text{2ª}\\\text{–2 · 3ª + 2ª}\\\text{4ª – 4 · 2ª}\end{array}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&2&1&-1\\0&2&-1&1&2\\0&0&-11&-5&4\\0&0&11&5&-4\end{pmatrix}\to \begin{array}{l}\text{1ª}\\\text{2ª}\\\text{3ª}\\\text{4ª + 3ª}\end{array} \begin{pmatrix}1&0&2&1&-1\\0&2&-1&1&2\\0&0&-11&-5&4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to ran\ (D)=3$$

Página 65

1. Expresa en forma matricial los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} x + z = 10 \\ 2x + 3y = 17 \\ 3x + 4y + z = 32 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ x - 2y = 11 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x - 2y - 3z - 2t = -19 \\ y + 2z + t = 12 \\ 2y + 3z + t = 16 \\ 3x - 2y + t = 5 \end{cases}$

a) $$\left.\begin{aligned} x + z &= 10 \\ 2x + 3y &= 17 \\ 3x + 4y + z &= 32 \end{aligned}\right\} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 10 \\ 17 \\ 32 \end{pmatrix}}_{C}$$

b) $$\left.\begin{aligned} 2x - y &= 7 \\ x - 2y &= 11 \end{aligned}\right\} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix}}_{C}$$

c) $$\left.\begin{aligned} x - 2y - 3z - 2t &= -19 \\ y + 2z + t &= 12 \\ 2y + 3z + t &= 16 \\ 3x - 2y + t &= 5 \end{aligned}\right\} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} -19 \\ 12 \\ 16 \\ 5 \end{pmatrix}}_{C}$$

2. Comprueba que las inversas de las matrices asociadas a los sistemas del ejercicio anterior son las que damos a continuación:

a) $\begin{pmatrix} 3/2 & 2 & -3/2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1/2 & -2 & 3/2 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$ **c)** $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -6 & 3 & 1 \\ -3 & -12 & 5 & 1 \\ 3 & 10 & -3 & -1 \\ -3 & -6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Resuelve con ellas, matricialmente, los sistemas del ejercicio 1.

a) Comprobamos que es la inversa:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/2 & 2 & -3/2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1/2 & -2 & 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Resolvemos el sistema:

$$X = A^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} 3/2 & 2 & -3/2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1/2 & -2 & 3/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 17 \\ 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Solución: $x = 1,\ \ y = 5,\ \ z = 9$

b) Comprobamos que es la inversa:

$$B \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Resolvemos el sistema:

$$X = B^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Solución: $x = 1$, $y = -5$

c) Comprobamos que es la inversa:

$$C \cdot C^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -6 & 3 & 1 \\ -3 & -12 & 5 & 1 \\ 3 & 10 & -3 & -1 \\ -3 & -6 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Resolvemos el sistema:

$$X = C^{-1} \cdot D = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -6 & 3 & 1 \\ -3 & -12 & 5 & 1 \\ 3 & 10 & -3 & -1 \\ -3 & -6 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -19 \\ 12 \\ 16 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Solución: $x = 0$, $y = -1$, $z = 5$, $t = 3$

Página 70

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Operaciones con matrices

1 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$**, calcula:**

a) $-2A + 3B$ **b)** $\frac{1}{2} A \cdot B$ **c)** $B \cdot (-A)$ **d)** $A \cdot A - B \cdot B$

a) $\begin{pmatrix} -23 & 4 \\ -12 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -17/2 & -2 \\ -11/2 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 21 & -6 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 43 & -16 \\ 24 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & -16 \\ 22 & -9 \end{pmatrix}$

2 Efectúa el producto $(-3 \quad 2) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$**.**

$(7 \quad 7) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (7)$

3 a) ¿Son iguales las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ **y** $B = (2 \quad 3)$**?**

b) Halla, si es posible, las matrices AB; BA; $A + B$; $A^t - B$.

a) No, A tiene dimensión 2×1 y B tiene dimensión 1×2. Para que dos matrices sean iguales, deben tener la misma dimensión y coincidir término a término.

b) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$; $B \cdot A = (1 \;\; 3)$; $A + B$ no se puede hacer, pues no tienen la misma dimensión.

$A^t - B = (2 \;\; 3) - (2 \;\; 3) = (0 \;\; 0)$

4 **Dadas las matrices:** $\mathbf{A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$ **y** $\mathbf{B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$ **comprueba que:**

a) $\mathbf{(A + B)^t = A^t + B^t}$

b) $\mathbf{(3A)^t = 3A^t}$

$$\left.\begin{aligned} &\text{a) } (A+B)^t = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &A^t + B^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} (A+B)^t = A^t + B^t$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{b) } (3A)^t = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ 9 & 0 & 3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -6 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \\ &3A^t = 3\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -6 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} (3A)^t = 3A^t$$

5 **Calcula** $\mathbf{3AA^t - 2I}$**, siendo** $\mathbf{A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}}$**.**

$$3A\,A^t - 2I = 3\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 10 & 17 \\ 17 & 29 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 30 & 51 \\ 51 & 87 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 51 \\ 51 & 85 \end{pmatrix}$$

6 **Dadas las matrices** $\mathbf{A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}}$ **y** $\mathbf{B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$**, comprueba que** $\mathbf{(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t}$**.**

$$\left.\begin{aligned} &A \cdot B = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; (A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \\ &B^t \cdot A^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} (A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$$

7 **Calcula, en cada caso, la matriz** $\mathbf{B}$ **que verifica la igualdad:**

a) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} + B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

b) $2\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} - 3B = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

b) $2\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} - 3B = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \to 3B = 2\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 4/3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

Matriz inversa

8 **Comprueba que la matriz inversa de A es A^{-1}:**

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$A \cdot A^{-1} = I$

9 **¿Cuál es la matriz inversa de la matriz unidad?**

La matriz unidad, I.

10 **Halla la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y la de $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.**

$|A| = 2 \to A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

$|B| = -4 \to B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$

11 **Con las matrices A y B del ejercicio anterior y sus inversas, A^{-1} y B^{-1}, comprueba que:**

a) $(A + B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$

b) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

a) $\left.\begin{array}{l} (A + B)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \\ A^{-1} + B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3/4 \end{pmatrix} \end{array}\right\} (A + B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$

b) $\left.\begin{array}{l} (A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/8 & -3/8 \end{pmatrix} \\ B^{-1} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/8 & -3/8 \end{pmatrix} \end{array}\right\} (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

12 **Halla la matriz inversa de las siguientes matrices:**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \begin{matrix} 1^a \\ 2^a : 2 \\ 3^a : 3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 \end{array}\right)$$

Por tanto: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \begin{matrix} 3^a \\ 2^a \\ 1^a \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Por tanto: $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Rango de una matriz

13 **Di cuál es el rango de las matrices *A* y *B*:**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{5} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

$ran\ (A) = 3$ (ya está en forma escalonada)

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} 1^a \\ 2^a + 1^a \\ 3^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2^a \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to ran\ (B) = 2$$

14 **Estudia el rango de estas matrices y di, en cada caso, el número de columnas que son L.I.:**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{5} & \mathbf{11} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{6} & \mathbf{29} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{6} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-3} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{3} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{7} & \mathbf{5} & \mathbf{5} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 11 \\ 1 & -1 & 6 & 29 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 1^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & -2 & 5 & 27 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 2 \cdot 2^a \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 11 & 41 \end{pmatrix} \to \mathit{ran}\ (A) = 3$$

Hay 3 columnas linealmente independientes en A.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 3 \cdot 1^a \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2^a \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \mathit{ran}\ (B) = 2$$

Hay 2 columnas linealmente independientes en B.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} 3^a \\ 2^a \\ 1^a \\ 4^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & -1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 1^a \\ 4^a - 3 \cdot 1^a \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 2^a \\ 4^a - 2^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \mathit{ran}\ (C) = 2$$

Hay dos columnas linealmente independientes en C.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 1^a \\ 4^a - 1^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to \mathit{ran}\ (D) = 4$$

Las cuatro columnas de D son linealmente independientes.

Ecuaciones con matrices

15 S **Halla las matrices X e Y que verifican el sistema**

$$\mathbf{2X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},\ X - Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ \\ X - Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \text{ Sumando las dos ecuaciones, queda:}$$

$$3X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \to X = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Despejamos Y en la 2ª ecuación:

$$Y = X - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $X = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $Y = \begin{pmatrix} -1/3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

16 S **Calcula X tal que $X - B^2 = A \cdot B$, siendo:**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$X = A \cdot B + B^2$

$$\left.\begin{array}{l} A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ \\ B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

17 S **Determina los valores de m para los cuales $X = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ verifique $X^2 - \frac{5}{2}X + I = 0$.**

$$X^2 - \frac{5}{2}X + I = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \frac{5}{2}\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} m^2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \frac{5}{2}\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^2 - (5/2)m + 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tiene que cumplirse que:

$$m^2 - \frac{5}{2}m + 1 = 0 \;\rightarrow\; 2m^2 - 5m + 2 = 0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; m = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} m = 2 \\ m = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Hay dos soluciones: $m_1 = 2$; $m_2 = \frac{1}{2}$

18 S **Resuelve: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$**

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \;\rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} x-y \\ 3x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2x \\ 3y-2 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x-\ \ y = 3+2x \\ 3x+2y = 3y-2 \end{array}\right\} \ \left.\begin{array}{r} x+y=-3 \\ 3x-y=-2 \end{array}\right\}$$

Sumando: $4x = -5 \rightarrow x = \dfrac{-5}{4} \rightarrow y = -3 - x = -3 + \dfrac{5}{4} = \dfrac{-7}{4}$

Solución: $x = \dfrac{-5}{4}$; $y = \dfrac{-7}{4}$

Página 71

PARA PRACTICAR

19 S **Dada la matriz** $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$**, calcula** $A^2, A^3, \dots, A^{128}$**.**

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \ A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I; \ A^4 = A^3 \cdot A = I \cdot A = A$$

$$A^{128} = A^{42 \cdot 3 + 2} = (A^3)^{42} \cdot A^2 = I^{42} \cdot A^2 = I \cdot A^2 = A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

20 S **Comprueba que** $A^2 = 2A - I$**, siendo:** $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ **e** I **la matriz unidad de orden 3.**

Utiliza esa igualdad para calcular A^4**.**

$$\left.\begin{array}{l} A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} \\ 2A - I = \begin{pmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} \end{array}\right\} A^2 = 2A - I$$

Calculamos A^4:

$A^4 = (A^2)^2 = (2A - I)^2 = (2A - I)(2A - I) = 4A^2 - 2A - 2A + I^2 =$

$= 4(2A - I) - 4A + I = 8A - 4I - 4A + I = 4A - 3I =$

$$= 4\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -16 & 8 \\ 8 & -4 & 4 \\ -16 & 16 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix}$$

21 S **Determina** a **y** b **de forma que la matriz**

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}$ **verifique** $A^2 = A$**.**

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-a & -2-b \\ 2a+ab & -a+b^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \;\; \to \;\; \begin{pmatrix} 4-a & -2-b \\ 2a+ab & -a+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix} \;\; \to \;\; \begin{cases} 4-a=2 & \to \quad a=2 \\ -2-b=-1 & \to \quad b=-1 \\ 2a+ab=a & \to \quad 4-2=2 \\ -a+b^2=b & \to \quad -2+1=-1 \end{cases}$$

Por tanto, $a = 2$ y $b = -1$.

22 S **Calcula A^n y B^n siendo:** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

- $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2/7 & 2/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

  $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2/7 & 2/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3/7 & 3/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

  Así, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/7 & n/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Lo probamos por inducción:

  Acabamos de comprobar que para $n = 2$ (primer caso relevante), funciona.

  Suponemos que es cierto para $n - 1$:

  $A^n = A^{n-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & n-1/7 & n-1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n/7 & n/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

  $B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{pmatrix}$

  Por tanto, $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$. Lo probamos por inducción:

  Igual que en el caso anterior, para $n = 2$ se cumple.

  Suponemos que es cierto para $n - 1$:

  $B^n = B^{n-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$

23 S **Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, halla una matriz B tal que $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.**

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1}AB = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow B = A \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos A^{-1}: $|A| = -3$; $A^{-1} = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Por tanto:

$$B = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

24 S **Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, prueba que A^3 es la matriz nula.**

Demuestra después que la matriz $I + A + A^2$ es la matriz inversa de $I - A$.

Multiplica $I + A + A^2$ por $I - A$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Veamos que $I + A + A^2$ es la inversa de $I - A$:

$$(I + A + A^2)(I - A) = I - A + A - A^2 + A^2 - A^3 = I - A^3 = I - \mathbf{0} = I.$$

Como $(I + A + A^2) \cdot (I - A) = I$, entonces $I + A + A^2$ es la inversa de $I - A$.

25 **Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ comprueba que $(A + I)^2 = 0$ y expresa A^2 como combinación lineal de A e I.**

$$A + I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$(A + I)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Expresamos A^2 como combinación lineal de A e I:

$$(A + I)^2 = \mathbf{0} \rightarrow (A + I)(A + I) = A^2 + A + A + I = A^2 + 2A + I = \mathbf{0} \rightarrow$$

$$\rightarrow A^2 = -2A - I$$

26 **a) Comprueba que la inversa de A es A^{-1}:**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A^{-1}} = \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 & 0 \\ -3/5 & 6/5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Calcula la matriz X que verifica $XA = B$, siendo A la matriz anterior y $B = (1\ \ -2\ \ 3)$.

a) $A \cdot A^{-1} = I$

b) $XA = B \;\rightarrow\; X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} \;\rightarrow\; X = B \cdot A^{-1}$

Por tanto:

$$X = (1 \;\; -2 \;\; 3) \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 & 0 \\ -3/5 & 6/5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{5} & \frac{1}{5} & -2 \end{pmatrix}$$

27 **S** **Determina las matrices A y B que son solución del siguiente sistema matricial:**

$$\mathbf{3A - 2B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{5} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{5} & \mathbf{9} & \mathbf{0} \\ \mathbf{15} & \mathbf{-4} & \mathbf{4} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{2A + B} = \begin{pmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-6} & \mathbf{6} & \mathbf{7} \\ \mathbf{10} & \mathbf{-5} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$$

$$3A - 2B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 5 & 9 & 0 \\ 15 & -4 & 4 \end{pmatrix} \qquad 2A + B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 10 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

Multiplicando por 2 la 2ª ecuación y sumando, obtenemos:

$$7A = \begin{pmatrix} 14 & 7 & 0 \\ -7 & 21 & 14 \\ 35 & -14 & 0 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Despejamos B de la 2ª ecuación:

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 10 & -5 & -2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Solución: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

28 **S** **Estudia el rango de las siguientes matrices según el valor del parámetro k:**

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \boldsymbol{k} \end{pmatrix} \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{k} & \mathbf{2} \end{pmatrix} \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{6} & \mathbf{4} & \boldsymbol{k} \\ \mathbf{4} & \mathbf{12} & \mathbf{8} & \mathbf{-4} \end{pmatrix} \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{10} & \mathbf{3} & \boldsymbol{k} \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1ª \\ 2ª - 1ª \\ 3ª - 2 \cdot 1ª \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & k+2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$\rightarrow$ *ran* $(M) = 3$ para cualquier valor de k.

$$N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & k & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1ª \\ 2ª + 1ª \\ 2 \cdot 3ª - 1ª \end{array} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1+2k & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \; 1 + 2k = 0 \;\text{ si }\; k = -\frac{1}{2}$$

- *Si* $k = -\dfrac{1}{2}$, $\;ran\ (N) = 2$.
- *Si* $k \neq -\dfrac{1}{2}$, $\;ran\ (N) = 3$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & k \\ 4 & 12 & 8 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} 1^a \\ 3^a : 4 \\ 2^a \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & k \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 2 \cdot 1^a \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k+2 \end{pmatrix}$$

- *Si* $k = -2 \;\rightarrow\; ran\ (P) = 1$
- *Si* $k \neq -2 \;\rightarrow\; ran\ (P) = 2$

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & k \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} 1^a \\ 2^a + 1^a \\ 3^a + 2 \cdot 1^a \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 12 & 3 & k+4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 3 \cdot 2^a \end{smallmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix}$$

- *Si* $k = 2 \;\rightarrow\; ran\ (Q) = 2$
- *Si* $k \neq 2 \;\rightarrow\; ran\ (Q) = 3$

29 Halla el valor de k para que el rango de la matriz A sea 2.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 \\ -5 & 3 & -1 \\ 0 & k & 7 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 \\ -5 & 3 & -1 \\ 0 & k & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} 1^a \\ 2^a + 1^a \\ 3^a \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 \\ 0 & -2 & -7 \\ 0 & k & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 2^a \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 \\ 0 & -2 & -7 \\ 0 & k-2 & 0 \end{pmatrix}$$

Para que $ran\ (A) = 2$, ha de ser $k - 2 = 0$; es decir, $k = 2$.

30 Halla X e Y sabiendo que $5X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix}$ y $3X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$.

$$\left.\begin{array}{l} 5X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} \\[2ex] 3X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} -15X - 9Y = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 12 & -45 \end{pmatrix} \\[2ex] 15X + 10Y = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -10 & 45 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \text{ Sumando: } Y = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} - 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -6 & 9 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

31 **Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ halla dos números reales m y n tales que $A + mA + nI = 0$.**

$$A + mA + nI = \mathbf{0} \quad \to \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2+2m+n & 1+m \\ 2+2m & 3+3m+n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{cases} 2+2m+n=0 & \to \quad n = 0 \\ 1+\ \ m = 0 & \to \quad m = -1 \\ 2+2m = 0 & \to \quad m = -1 \\ 3+3m+n=0 & \to \quad n = 0 \end{cases}$$

Solución: $m = -1$; $n = 0$

32 **Determina, si es posible, un valor de k para que la matriz $(A - kI)^2$ sea la matriz nula, siendo:**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A - kI = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix}$$

$$(A-kI)^2 = \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^2-1 & 2k-2 & 4k-4 \\ 2k-2 & k^2-1 & 4k-4 \\ 2-2k & 2-2k & k^2-6k+5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \to \quad k = 1$$

33
S
Una compañía de muebles fabrica butacas, mecedoras y sillas, y cada una de ellas de tres modelos: E (económico), M (medio) y L (lujo). Cada mes produce 20 modelos E, 15 M y 10 L de butacas; 12 modelos E, 8 M y 5 L de mecedoras, y 18 modelos E, 20 M y 12 L de sillas. Representa esta información en una matriz y calcula la producción de un año.

Cada mes: $\begin{array}{l} \\ \text{BUTACAS} \\ \text{MECEDORAS} \\ \text{SILLAS} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{E} & \text{M} & \text{L} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 20 & 15 & 10 \\ 12 & 8 & 5 \\ 18 & 20 & 12 \end{pmatrix} \end{array}$

Cada año: $12 \cdot \begin{pmatrix} 20 & 15 & 10 \\ 12 & 8 & 5 \\ 18 & 20 & 12 \end{pmatrix} = \begin{array}{l} \\ \text{BUTACAS} \\ \text{MECEDORAS} \\ \text{SILLAS} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{E} & \text{M} & \text{L} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 240 & 180 & 120 \\ 144 & 96 & 60 \\ 216 & 240 & 144 \end{pmatrix} \end{array}$

Página 72

34 **S** **En un edificio hay tres tipos de viviendas: L3, L4 y L5. Las viviendas L3 tienen 4 ventanas pequeñas y 3 grandes; las L4 tienen 5 ventanas pequeñas y 4 grandes, y las L5, 6 pequeñas y 5 grandes. Cada ventana pequeña tiene 2 cristales y 4 bisagras, y las grandes, 4 cristales y 6 bisagras.**

a) Escribe una matriz que describa el número y tamaño de ventanas de cada vivienda y otra que exprese el número de cristales y bisagras de cada tipo de ventana.

b) Calcula la matriz que expresa el número de cristales y de bisagras de cada tipo de vivienda.

a) $\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} P & G \end{array} \\ \begin{array}{c} L3 \\ L4 \\ L5 \end{array} & \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$; $\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} C & B \end{array} \\ \begin{array}{c} P \\ G \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$

b) $\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} P & G \end{array} \\ \begin{array}{c} L3 \\ L4 \\ L5 \end{array} & \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} C & B \end{array} \\ \begin{array}{c} P \\ G \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} C & B \end{array} \\ \begin{array}{c} L3 \\ L4 \\ L5 \end{array} & \begin{pmatrix} 20 & 34 \\ 26 & 44 \\ 32 & 54 \end{pmatrix} \end{array}$

35 **S** **Un industrial fabrica dos tipos de bombillas: transparentes (T) y opacas (O). De cada tipo se hacen cuatro modelos: M_1, M_2, M_3 y M_4.**

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} T & O \end{array} \\ \begin{array}{c} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 300 & 200 \\ 400 & 250 \\ 250 & 180 \\ 500 & 300 \end{pmatrix} \end{array}$$

Esta tabla muestra la producción semanal de bombillas de cada tipo y modelo.

El porcentaje de bombillas defectuosas es el 2% en el modelo M_1, el 5% en el M_2, el 8% en el M_3 y el 10% en el M_4.

Calcula la matriz que expresa el número de bombillas transparentes y opacas, buenas y defectuosas, que se producen.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} D \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}02 & 0{,}05 & 0{,}08 & 0{,}1 \\ 0{,}98 & 0{,}95 & 0{,}92 & 0{,}9 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} T & O \end{array} \\ \begin{array}{c} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 300 & 200 \\ 400 & 250 \\ 250 & 180 \\ 500 & 300 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} T & O \end{array} \\ \begin{array}{c} D \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 96 & 60{,}9 \\ 1\,354 & 869{,}1 \end{pmatrix} \end{array} \approx \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} T & O \end{array} \\ \begin{array}{c} D \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 96 & 61 \\ 1\,354 & 869 \end{pmatrix} \end{array}$$

36 **Escribe en forma matricial y resuelve, si es posible, utilizando la matriz inversa:**

a) $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ x + \ \ y = 7 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + z = 510 \\ y = -234 \\ y + z = 257 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x - 2y = 1 \\ x + \ \ y = 7 \end{array}\right\}$ $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}}_{B}$

Calculamos la inversa de A:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \boxed{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 1^a \end{array}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \boxed{\begin{array}{l} 1^a \cdot 3 + 2^a \cdot 2 \\ 2^a \end{array}} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \boxed{\begin{array}{l} 1^a : 3 \\ 2^a : 3 \end{array}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & 1/3 \end{array}\right) \to A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema:

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \to \textit{Solución: } x = 5, \ \ y = 2$$

b) $\left.\begin{array}{rcl} x \quad + z &=& 510 \\ y \qquad &=& -234 \\ y + z &=& 254 \end{array}\right\}$ $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 510 \\ -234 \\ 254 \end{pmatrix}}_{B}$

Calculamos la inversa de A:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \boxed{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \boxed{\begin{array}{l} 1^a - 3^a \\ 2^a \\ 3^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \to A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema:

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 510 \\ -234 \\ 254 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ -234 \\ 488 \end{pmatrix}$$

Solución: $x = 22, \ \ y = -234, \ \ z = 488$

37 **Escribe en la forma habitual los sistemas:**

a) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

a) $\left.\begin{array}{r} 3x - 2y = 2 \\ x + 5y = 0 \\ 7y = 1 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x + 5y - 3z = \ \ 1 \\ 2x + \ \ y + 5z = -1 \end{array}\right\}$

38 S **Dada** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$**, calcula, si es posible:**

a) Una matriz X **tal que** $XA = (1 \quad 0 \quad -1)$**.**

b) Una matriz Y **tal que** $YA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$**.**

Calculamos la inversa de A:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a + 6 \cdot 1^a \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 12 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 5 \cdot 2^a + 2 \cdot 3^a \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 & 2 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{matrix} 1^a + 2 \cdot 3^a \\ 2^a - 5 \cdot 3^a \\ 3^a \cdot (-1) \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 5 & 10 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & -12 & -24 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 & -2 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a : (-2) \\ 3^a \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 5 & 10 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 12 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 & -2 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{matrix} 1^a - 2^a \\ 2^a \\ 3^a \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 12 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 & -2 \end{array}\right). \text{ Por tanto, } A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

a) $X = (1 \quad 0 \quad -1) \cdot A^{-1} = (1 \quad 3 \quad 1)$

b) $Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -7 & -3 \\ 6 & 12 & 5 \end{pmatrix}$

39 S **Calcula los valores de** x **para que la matriz** $A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ **verifique la ecuación** $A^2 - 6A + 9I = 0$**.**

$$A^2 = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 6A + 9I = \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + 9 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - 6x + 9 & 0 \\ 0 & x^2 - 6x + 9 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \rightarrow (x-3)^2 = 0 \rightarrow x = 3$$

40 S **Resuelve la ecuación matricial $2A = AX + B$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.**

Calculamos la inversa de A:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \boxed{\begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} + 1^{a} \end{array}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolvemos la ecuación:

$$2A + AX + B = 0 \quad \to \quad AX = -B - 2A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

41 S **Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ halla el valor de x e y para que se cumpla la igualdad $A^2 - xA - yI = 0$.**

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - xA - yI = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -6 & -5 \end{pmatrix} - x\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - y\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - 2x - y & 9 - 3x \\ -6 + 2x & -5 - x - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{lll} -2 - 2x - y = 0 & \to & y = -2 - 2x = -8 \\ 9 - 3x = 0 & \to & x = 3 \\ -6 + 2x = 0 & \to & x = 3 \\ -5 - x - y = 0 & \to & y = -5 - x = -8 \end{array}\right\}$$

Solución: $x = 3$, $y = -8$

42 S **Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/10 & 1 & 0 \\ 1/10 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:**

a) Calcula $A + A^2$

b) Resuelve el sistema $A^5 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/10 & 1 & 0 \\ 1/10 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/10 & 1 & 0 \\ 1/10 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/10 & 1 & 0 \\ 2/10 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A + A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/10 & 1 & 0 \\ 1/10 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/10 & 1 & 0 \\ 2/10 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3/10 & 2 & 0 \\ 3/10 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/10 & 1 & 0 \\ 2/10 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/10 & 1 & 0 \\ 1/10 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/10 & 1 & 0 \\ 3/10 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^5 = A^2 \cdot A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/10 & 1 & 0 \\ 2/10 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/10 & 1 & 0 \\ 3/10 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa de A^5:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{1^a \\ 2^a \cdot 2 - 1^a \\ 3^a \cdot 2 - 1^a}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{\substack{1^a \\ 2^a : 2 \\ 3^a : 2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1 \end{array}\right) \to (A^5)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -5 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Solución: $x = 20$, $y = -5$, $z = -9$

43 S **Sean las matrices** $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2}\boldsymbol{x} & \mathbf{-1} \\ \boldsymbol{-x} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} \boldsymbol{z} \\ \mathbf{2}\boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{-z} \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1/3} \end{pmatrix}$

a) Sabiendo que $A \cdot B + C = 3D$, plantea un sistema de ecuaciones para determinar x, y, z.

b) Encuentra, si es posible, una solución.

a) $A \cdot B + C = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2x & -1 \\ -x & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ 2x - y \\ -x + y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z \\ 2x - y + 2z \\ -x + y - z \end{pmatrix}$

$$3D = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Igualamos:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 3 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ -x + y - z = 1 \end{array}\right\} \text{ En forma matricial: } \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{M} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{N}$$

b) Intentamos resolver el sistema en forma matricial. Para ello, calculamos la inversa de M:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a + 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a + (3/2) \cdot 3^a \\ 3^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 & 1 & 3/2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Luego, la matriz M no tiene inversa.

Como $ran\ (M) = 2$ y se nos anula la segunda ecuación, tomamos las otras dos para resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 3 \\ -x + y - z = 1 \end{array}\right\} (1^a + 2^a) \to \begin{array}{l} 2y = 4 \to y = 2 \\ x = 3 - y - z = 1 - z \end{array}$$

Solución: $(1 - \lambda, 2, \lambda)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

44 S **Calcula una matriz X que conmuta con la matriz A, esto es, $A \cdot X = X \cdot A$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, y calcula $A^2 + 2A^{-1} \cdot X$.**

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \left.\left\{\begin{array}{l} A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} \\ X \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} \end{array}\right.\right\} \text{han de ser iguales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} a + c = a \\ b + d = a + b \\ d = c + d \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} c = 0 \\ d = a \\ c = 0 \end{array}\right\} \quad X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \text{ con } a, b \in \mathbb{R}$$

$$A^2 + 2A^{-1} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} a & b-a \\ 0 & a \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+2a & 2+2b-2a \\ 0 & 1+2a \end{pmatrix}$$

(Observamos que la matriz que hemos obtenido también es de las que conmutan con A).

45 S **Sean A y B las matrices dadas por:**

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Encuentra las condiciones que deben cumplir los coeficientes a, b, c para que se verifique $A \cdot B = B \cdot A$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a + 2c & 5b + 2c & 0 \\ 2a + 5c & 2b + 5c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a + 2b & 2a + 5b & 0 \\ 7c & 7c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para que $A \cdot B = B \cdot A$, debe cumplirse que:

$$\left.\begin{array}{l} 5a + 2c = 5a + 2b \\ 5b + 2c = 2a + 5b \\ 2a + 5c = 7c \\ 2b + 5c = 7c \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} c = b \\ c = a \\ 7c = 7c \\ 7c = 7c \end{array}\right\} \quad a = b = c$$

46 S **Dada la matriz: $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ prueba que se verifica $A^3 + I = 0$ y utiliza esta igualdad para obtener A^{10}.**

☞ ***Haz $A^{10} = (A^3)^3 \cdot A$ y ten en cuenta que $A^3 = -I$.***

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}; \quad A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad A^3 + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos A^{10} (teniendo en cuenta que $A^3 + I = 0 \;\rightarrow\; A^3 = -I$):

$$A^{10} = (A^3)^3 \cdot A = (-I)^3 \cdot A = -I \cdot A = -A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Página 73

47 S **Una matriz cuadrada se llama *ortogonal* cuando su inversa coincide con su traspuesta.**

Calcula x e y para que esta matriz A sea ortogonal: $A = \begin{pmatrix} 3/5 & x & 0 \\ y & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

☞ ***Haz $A \cdot A^t = I$.***

Si $A^{-1} = A^t$, ha de ser $A \cdot A^t = I$; entonces:

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 3/5 & x & 0 \\ y & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/5 & y & 0 \\ x & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/25 + x^2 & 3/5y - 3/5x & 0 \\ 3/5y - 3/5x & y^2 + 9/25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{9}{25} + x^2 = 1 \\ \dfrac{3}{5}y - \dfrac{3}{5}x = 0 \\ y^2 + \dfrac{9}{25} = 1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x^2 = \dfrac{16}{25} \\ y = x \\ y^2 = \dfrac{16}{25} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{4}{5} \\ y = x \end{array}\right\}$$

Hay dos soluciones: $x_1 = \frac{4}{5};\ y_1 = \frac{4}{5}$ $\qquad x_2 = -\frac{4}{5};\ y_2 = -\frac{4}{5}$

48 S **Resuelve la ecuación matricial:** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 22 & 14 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1/2 & -2 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 22 & 14 \end{pmatrix} \quad \to \quad X = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 22 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1/2 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1/2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}$

CUESTIONES TEÓRICAS

49 **Justifica por qué no es cierta la igualdad: $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$ cuando A y B son dos matrices cualesquiera.**

$(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - AB + BA - B^2$

Para que la igualdad fuera cierta, tendría que ser $AB = BA$; y, en general, no es cierto para dos matrices cualesquiera.

50 S **Sea A una matriz de dimensión 2×3:**

a) ¿Existe una matriz B tal que $A \cdot B$ sea una matriz de una sola fila?

b) ¿Y para $B \cdot A$?

Pon un ejemplo para cada caso, siendo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) No; $A \cdot B$ tendrá 2 filas necesariamente. Por ejemplo, tomando $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, tenemos que: $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) Sí; si tomamos una matriz de dimensión 1×2 (ha de tener dos columnas para poder multiplicar $B \cdot A$), el resultado tendrá una sola fila. Por ejemplo:

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = (1 \quad 2)$, entonces $B \cdot A = (5 \quad 2 \quad 0)$

51 S **Sean A y B dos matrices cuadradas de igual tamaño. Si A y B son simétricas, ¿lo es también su producto $A \cdot B$?**

Si la respuesta es afirmativa, justifícala, y si es negativa, pon un contraejemplo.

Si A y B son dos matrices cuadradas de igual tamaño, simétricas, su producto, $A \cdot B$, no tiene por qué ser una matriz simétrica. Por ejemplo:

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ $A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ no es simétrica.

52 **Sean $A = (a_{ij})_{m,n}$, $B = (b_{ij})_{n,p}$, $C = (c_{ij})_{q,r}$. ¿Qué condiciones deben cumplir p, q y r para que se puedan efectuar las siguientes operaciones?**

a) $A \cdot C \cdot B$ **b) $A \cdot (B + C)$**

a) $n = q = r$ b) $n = q$; $p = r$

53 S **Una matriz de 3 filas y 3 columnas tiene rango 3.**

a) ¿Cómo puede variar el rango si quitamos una columna?

b) Si suprimimos una fila y una columna, ¿podemos asegurar que el rango de la matriz resultante será 2?

a) Tendrá rango dos.

b) No. Podría ser dos o uno. Por ejemplo:

Si en $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ suprimimos la primera fila y la tercera columna,

queda $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, que tiene rango 1 ($A$ tenía rango 3).

54 S **¿Es posible añadir una fila a la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 7 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ de forma que la nueva matriz tenga rango 4?**

Razona la respuesta.

Calculemos el rango de la matriz dada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 7 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2 \cdot 1^a \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 3 \cdot 2^a \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tiene rango 2; luego, añadiendo una fila, la matriz resultante no podrá tener rango 4 (tendría rango 2 ó 3).

55 **¿Qué condición debe cumplir una matriz A de dimensión 3×3 para que se verifique que $A + A^t = 2A$?**

$A + A^t = 2A \quad \rightarrow \quad A^t = 2A - A = A \quad \rightarrow \quad A = A^t$

Luego, la condición es que la matriz coincida con su traspuesta. Es decir, A debe ser de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$$

56 **a) Si A es una matriz regular de orden n y existe una matriz B tal que $AB + BA = 0$, probar que $BA^{-1} + A^{-1}B = 0$.**

b) Si $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, halla una matriz $B \neq 0$ tal que $AB + BA = 0$.

a) Multiplicamos por A^{-1} por la izquierda en la igualdad:

$AB + BA = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad A^{-1}AB + A^{-1}BA = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad B + A^{-1}BA = \mathbf{0}$

Ahora multiplicamos la igualdad obtenida por A^{-1} por la derecha:

$BA^{-1} + A^{-1}BAA^{-1} = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad BA^{-1} + A^{-1}B = \mathbf{0}$

b) Si $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, entonces:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a - 2c & -3b - 2d \\ 4a + 3c & 4b + 3d \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a + 4b & -2a + 3b \\ -3c + 4d & -2c + 3d \end{pmatrix}$$

Así:

$$AB + BA = \begin{pmatrix} -6a + 4b - 2c & -2a - 2d \\ 4a + 4d & 4b - 2c + 6d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} -6a + 4b - 2c = 0 \\ -2a - 2d = 0 \\ 4a + 4d = 0 \\ 4b - 2c + 6d = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3a - 2b + c = 0 \\ \left.\begin{array}{l} a + d = 0 \\ a + d = 0 \end{array}\right\} d = -a \\ 2b - c + 3d = 0 \quad \rightarrow \quad 3a - 2b + c = 0 \quad \rightarrow \\ \qquad \rightarrow \quad c = -3a + 2b \end{array}$$

Por tanto: $B = \begin{pmatrix} a & b \\ -3a + 2b & -a \end{pmatrix}$, a y $b \neq 0$

Por ejemplo, con $a = 1$ y $b = 1$, queda $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

57 S **Demuestra que si una matriz verifica $A^2 = 0$ (0 es la matriz nula), entonces A no puede tener inversa.**

Supongamos que se verifica que $A^2 = \mathbf{0}$, pero que A sí tiene inversa, que existe A^{-1}.

Multiplicando la igualdad $A^2 = \mathbf{0}$ por $(A^{-1})^2$, quedaría:

$(A^{-1})^2 \cdot A^2 = \mathbf{0} \rightarrow (A^{-1} \cdot A)^2 = 0 \rightarrow I = \mathbf{0}$; lo cual es absurdo.

Por tanto, deducimos que no existe A^{-1}.

PARA PROFUNDIZAR

58 **Sean A y B dos matrices cuadradas del mismo orden. De la igualdad $A \cdot B = A \cdot C$ no puede deducirse, en general, que $B = C$.**

a) Prueba esta afirmación buscando dos matrices B y C distintas tales que $A \cdot B = A \cdot C$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) ¿Qué condición debe cumplir la matriz A para que de $A \cdot B = A \cdot C$ se pueda deducir que $B = C$?

a) Por ejemplo, si $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces:

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = A \cdot C$, pero $B \neq C$.

b) Debe existir A^{-1}.

59 **Estudia el rango de las siguientes matrices según los valores de a:**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & a \\ a & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & a \\ a & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 1^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & a+2 \\ a-1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- *Si* $a = 1$, *ran* $(M) = 2$
- *Si* $a = -2$, *ran* $(M) = 2$
- *Si* $a \neq 1$ *y* $a \neq -2$, *ran* $(M) = 3$

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 1^a \end{array} \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- *Si* $a = 0$, *ran* $(A) = 2$
- *Si* $a \neq 0$, *ran* $(A) = 3$

60 S **Se dice que una matriz es *antisimétrica* cuando su traspuesta es igual a su opuesta. Obtén la forma general de una matriz de orden 2 que sea antisimétrica.**

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, entonces $A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ y $-A = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$.

Para que $A^t = -A$, ha de ser:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{array}{r} a = -a \\ c = -b \\ b = -c \\ d = -d \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = 0 \\ c = -b \\ \\ d = 0 \end{array}$$

Por tanto, una matriz *antisimétrica de orden 2* es de la forma: $\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$