8 REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

Página 186

Descripción de una gráfica

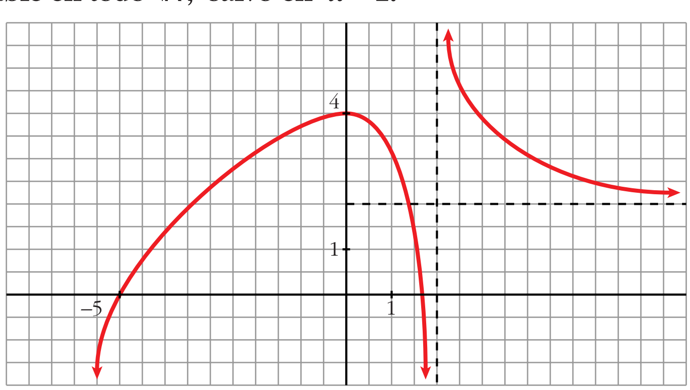
1. ■ Copia en tu cuaderno los datos encuadrados en rojo. A partir de ellos y sin mirar la gráfica que aparece al principio, representa esta función sobre unos ejes coordenados dibujados en papel cuadriculado.

(La solución está en el propio ejercicio).

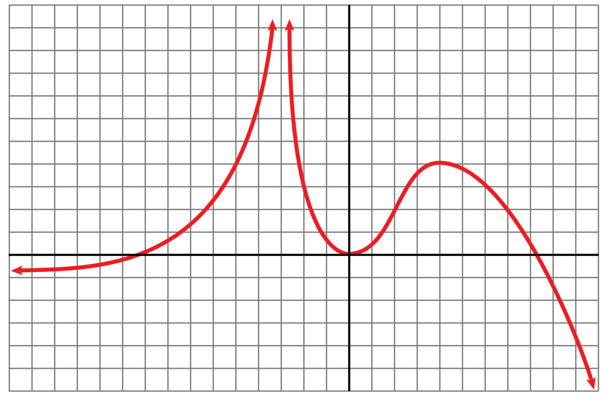
Página 187

2. Traza unos ejes coordenados sobre papel cuadriculado y representa una curva, lo más sencilla posible, que cumpla las siguientes condiciones:

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$
- $\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$
- $f(0) = 4$; $f'(0) = 0$
- $f(-5) = 0$; $f(1{,}75) = 0$
- f es derivable en todo $\mathbb{R}$, salvo en $x = 2$.



3. **Describe, con la menor cantidad de datos y de forma similar a la de los apartados anteriores, la siguiente función:**



- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = +\infty$
- $f(-9) = 0;\ f(0) = 0;\ f(8) = 0$
- $f'(0) = 0$
- $f(4) = 4;\ f'(4) = 0$

4. **Representa sobre unos ejes en papel cuadriculado una gráfica inventada por ti. Descríbela en papel aparte. Dale la descripción a tu compañera o compañero para que la represente.**

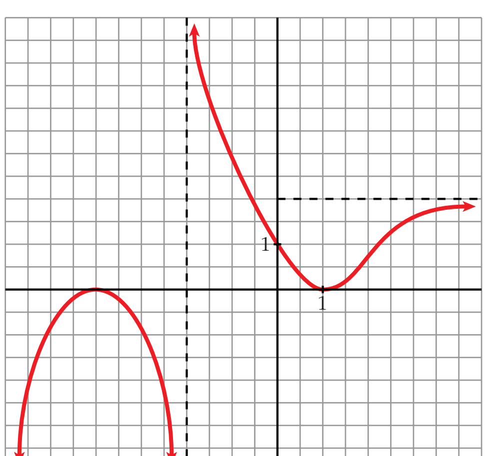
Representa tú la suya.

Comparad cada representación con la curva original. Discutid las diferencias que observéis.

¿Hay algún error en la representación?

¿Hay, acaso, error en la descripción?

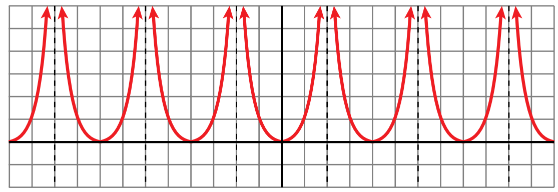
¿Es todo correcto?



Por ejemplo:

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty;\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$
- $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty;\quad \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$
- $f(-4) = 0;\ f'(-4) = 0$
- $f(1) = 0;\ f'(1) = 0$
- $f(0) = 1$

5. **Observa esta gráfica:**



- **Halla la ordenada para las siguientes abscisas:**

$$x = 0,\ \ x = 1,\ \ x = 3,\ \ x = -7,\ \ x = 12,$$
$$x = -400,\ \ x = 13,\ \ x = -199$$

- **¿En qué puntos no está definida esta función?**
- **¿Qué tramo de la función te bastaría conocer para hacerte una idea exacta de cómo es la gráfica?**
- **¿Te sugiere esta curva algún tipo de simetría o periodicidad?**

- $f(0) = 0;\ f(1) = 1;\ f(3) = 1;\ f(-7) = 1$

  $f(12) = 0;\ f(-400) = 0;\ f(13) = 1;\ f(-199) = 1$

  (En general, $f(4k) = 0;\ f(4k + 1) = f(4k - 1) = 1$ y no existe $f(x)$ en $x = 4k + 2$, con $k \in \mathbb{Z}$).

- La función no está definida en los puntos de la forma $x = 4k + 2$, con $k \in \mathbb{Z}$.

- Bastaría con conocer la función para $x \in [0, 2)$, si supiéramos que es par y que es periódica de periodo 4.

- Simetría $\rightarrow$ Es una función par (simétrica respecto al eje Y).

  Periodicidad $\rightarrow$ Es periódica de periodo 4.

Página 188

1. **Halla el dominio de estas funciones:**

a) $y = x^3 - 5x^2 + 7x + 3$ **b)** $y = \dfrac{3x^3 + 5}{x^2 - 5x + 4}$ **c)** $y = \dfrac{x^3 + 2x}{x^2 + 1}$

a) $D = \mathbb{R}$

b) $x^2 - 5x + 4 = 0 \ \rightarrow\ x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \dfrac{5 \pm 3}{2}$ $\begin{cases} x = 4 \\ x = 1 \end{cases}$

$D = \mathbb{R} - \{1, 4\}$

c) $x^2 + 1 \neq 0$ para todo $x \ \rightarrow\ D = \mathbb{R}$

2. **Halla el dominio de:**

a) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$ **b)** $y = ln(x^2 + 1)$ **c)** $y = ln(x^2 - 1)$ **d)** $y = \dfrac{e^x}{x^2}$

a) $x^2 - 2x \geq 0 \ \rightarrow\ D = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

b) $x^2 + 1 > 0$ para todo $x \rightarrow D = \mathbb{R}$

c) $x^2 - 1 > 0 \rightarrow D = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

d) $x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow D = \mathbb{R} - \{0\}$

Página 189

3. Halla las posibles simetrías y periodicidades, di dónde son continuas y dónde derivables:

a) $y = 3x^4 - 5x^2 - 1$ **b)** $y = \sqrt{x^2 - 2x}$ **c)** $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

d) $y = \dfrac{x^3 - 1}{x^2}$ **e)** $y = sen\ x + 1/2\ (sen\ 2x)$

a) $f(-x) = 3(-x)^4 - 5(-x)^2 - 1 = 3x^4 - 5x^2 - 1 = f(x)$

Es una función par: simétrica respecto al eje Y.

No es periódica.

Es continua y derivable en $\mathbb{R}$.

b) *Dominio* $= (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

$f(-x) = \sqrt{x^2 - 2x}$. No es par ni impar; no es simétrica respecto al eje Y ni respecto al centro de coordenadas.

No es periódica.

Es continua en su dominio.

Es derivable en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

c) *Dominio* $= \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$f(-x) = \dfrac{-x^3}{x^2 - 1} = -f(x)$. Es impar: simétrica respecto al origen de coordenadas.

No es periódica.

Es continua y derivable en su dominio.

d) *Dominio* $= \mathbb{R} - \{0\}$

$f(-x) = \dfrac{-x^3 - 1}{x^2}$. No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y ni respecto al origen de coordenadas.

No es periódica.

Es continua y derivable en su dominio.

e) *Dominio* $= \mathbb{R}$

$f(-x) = sen\ (-x) + \dfrac{1}{2}\big(sen\ (-2x)\big) = -sen\ x - \dfrac{1}{2}\big(sen\ (2x)\big) = -f(x)$

Es impar: simétrica respecto al origen de coordenadas.

Es periódica de periodo 2π.

Es continua y derivable en $\mathbb{R}$.

Página 190

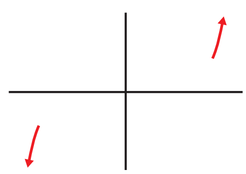
4. Halla las ramas infinitas de:

a) $y = 3x^5 - 20x^3$ **b)** $y = \dfrac{x^4}{x^2 - 1}$ **c)** $y = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$

d) $y = x^4 - 8x^2 + 7$ **e)** $y = \ln(x^2 + 1)$ **f)** $y = 2^{x-1}$

a) $y = 3x^5 - 20x^3$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



Ramas parabólicas

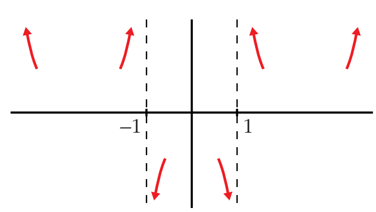
b) $y = \dfrac{x^4}{x^2 - 1}$

- *Dominio* $= \mathbb{R} - \{-1, 1\}$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

Ramas parabólicas

- $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty; \quad \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

Asíntotas verticales: $x = -1$; $x = 1$



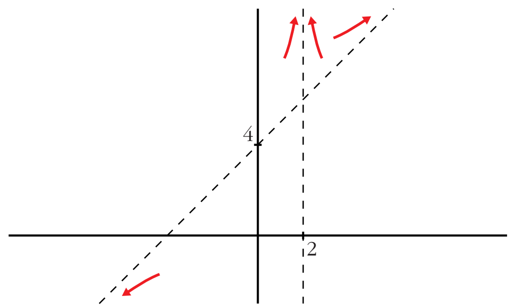
c) $y = \dfrac{x^3}{(x-2)^2} = \dfrac{x^3}{x^2 - 4x + 4} = x + 4 + \dfrac{12x - 16}{x^2 - 4x + 4}$

- *Dominio* $= \mathbb{R} - \{2\}$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$y = x + 4$ es una asíntota oblicua.

$$f(x) - (x + 4) = \frac{12x - 16}{x^2 - 4x + 4} \quad \to \quad \begin{cases} f(x) - (x + 4) > 0 & \text{si } \ x \to +\infty \\ f(x) - (x + 4) < 0 & \text{si } \ x \to -\infty \end{cases}$$

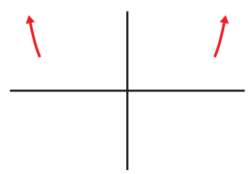
- $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\}$ $x = 2$ es asíntota vertical



d) $y = x^4 - 8x^2 + 7$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



Ramas parabólicas

e) $y = ln(x^2 + 1)$

- *Dominio* = $\mathbb{R}$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

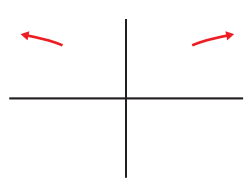
  $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{ln(x^2 + 1)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x}{x^2 + 1} = 0$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

  $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ln(x^2 + 1)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{x^2 + 1} = 0$

  } Ramas parabólicas

- No hay asíntotas verticales.



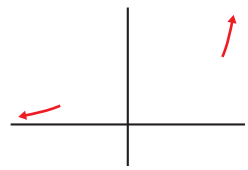
f) $y = 2^{x - 1} > 0$ para todo x.

- *Dominio* = $\mathbb{R}$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \quad \to \quad y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

- No hay asíntotas verticales.



Página 191

5. Halla los puntos singulares y los puntos de inflexión de:

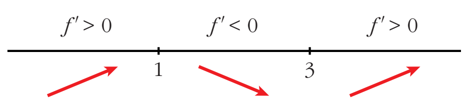
a) $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$ **b)** $y = ln(x^2 + 1)$

a) $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

- $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$
- $f'(x) = 0 \quad \to \quad 3(x^2 - 4x + 3) = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:

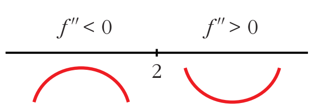


Hay un máximo en $(1, 9)$ y un mínimo en $(3, 5)$.

- $f''(x) = 6x - 12$

$f''(x) = 0 \quad \to \quad 6x - 12 = 0 \quad \to \quad x = 2$

Signo de $f''(x)$:



Hay un punto de inflexión en $(2, 7)$.

b) $y = ln(x^2 + 1)$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

- $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

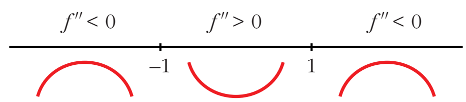
$f'(x) = 0 \quad \to \quad 2x = 0 \quad \to \quad x = 0$

$$\left.\begin{array}{l} f''(x) < 0 \ \text{ para } \ x < 0 \\ f''(x) > 0 \ \text{ para } \ x > 0 \end{array}\right\} \text{Hay un mínimo en } (0, 0).$$

- $f''(x) = \dfrac{2(x^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \dfrac{2x^2 + 2 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \dfrac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$

$$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; -2x^2 + 2 = 0 \;\rightarrow\; x^2 = 1 \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Signo de $f''(x)$:



Hay un punto de inflexión en $(-1, \ln 2)$ y otro en $(1, \ln 2)$.

6. Halla los puntos singulares de:

a) $y = 3x^5 - 20x^3$

b) $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$

c) $y = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$

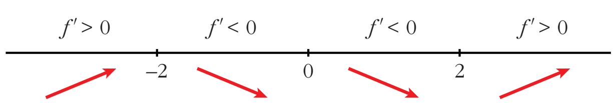
d) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$

a) $y = 3x^5 - 20x^3$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = 15x^4 - 60x^2$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 15x^2(x^2 - 4) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



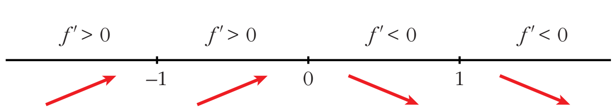
Hay un máximo en $(-2, 64)$, un mínimo en $(2, -64)$, y un punto de inflexión en $(0, 0)$.

b) $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}$$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -2x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

Signo de $f'(x)$:



Hay un máximo en $(0, 0)$.

c) $y = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{2\}$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-2)^2 - x^3 \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{3x^2(x-2) - 2x^3}{(x-2)^3} =$$

$$= \frac{3x^3 - 6x^2 - 2x^3}{(x-2)^3} = \frac{x^3 - 6x^2}{(x-2)^3}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad x^2(x-6) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:

$f' > 0$	0	$f' > 0$	2	$f' < 0$	6	$f' > 0$
↗		↗		↘		↗

Hay un punto de inflexión en $(0, 0)$ y un mínimo en $\left(6, \frac{27}{2}\right)$.

d) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$. *Dominio* $= (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x}} = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x}}$$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad x - 1 = 0 \quad \to \quad x = 1 \notin$ *Dominio.*

No hay puntos singulares.

Página 193

1. Representa estas funciones:

a) $\boldsymbol{y = x^4 - 8x^2 + 7}$ **b)** $\boldsymbol{y = 3x^4 + 4x^3 - 36x^2}$ **c)** $\boldsymbol{y = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x}$

a) $y = x^4 - 8x^2 + 7$

- **Simetrías:**

  $f(-x) = x^4 - 8x^2 + 7 = f(x)$. Es par: simétrica respecto al eje Y.

- **Ramas infinitas:**

  $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

- **Puntos singulares:**

  $f'(x) = 4x^3 - 16x$

  $$f'(x) = 0 \quad \to \quad 4x(x^2 - 4) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

  Puntos singulares: $(0, 7)$; $(-2, -9)$; $(2, -9)$

- **Cortes con los ejes:**

  — Con el eje Y $\to$ $x = 0$ $\to$ $y = 7$ $\to$ Punto $(0, 7)$

  — Con el eje X $\to$ $y = 0$ $\to$ $x^4 - 8x^2 + 7 = 0$

$$x^2 = \frac{8 \pm \sqrt{64-28}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{8 \pm 6}{2} \begin{cases} x^2 = 7 \ \to \ x = \pm\sqrt{7} \\ x^2 = 1 \ \to \ x = \pm 1 \end{cases}$$

Puntos: $\left(-\sqrt{7}, 0\right)$; $(-1, 0)$; $(1, 0)$; $\left(\sqrt{7}, 0\right)$

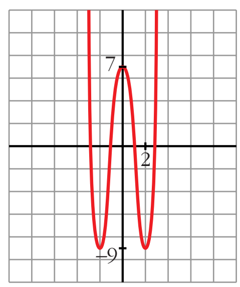
- **Puntos de inflexión:**

$f''(x) = 12x^2 - 16$

$f''(x) = 0 \ \to \ 12x^2 - 16 = 0 \ \to \ x^2 = \dfrac{4}{3} \ \to \ x = \pm\sqrt{\dfrac{4}{3}} = \pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

Puntos $\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}, \dfrac{-17}{9}\right)$ y $\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}, \dfrac{-17}{9}\right)$

- **Gráfica:**



b) $y = 3x^4 + 4x^3 - 36x^2$

- **Simetrías:**

$f(-x) = 3x^4 - 4x^3 - 36x^2$. No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y ni respecto al origen de coordenadas.

- **Ramas infinitas:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

- **Puntos singulares:**

$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 72x$

$$f'(x) = 0 \ \to \ 12x(x^2 + x - 6) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \dfrac{-1 \pm 5}{2} \begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases} \end{cases}$$

Puntos: $(0, 0)$; $(2, -64)$; $(-3, -189)$

- **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $Y \ \to \ x = 0 \ \to \ y = 0 \ \to$ Punto $(0, 0)$

— Con el eje $X \ \to \ y = 0 \ \to \ x^2(3x^2 + 4x - 36) = 0$

$$\begin{cases} x^2 = 0 \ \to \ x = 0 \\ x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16+432}}{6} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{448}}{6} \begin{cases} x \approx 2{,}86 \\ x \approx -4{,}19 \end{cases} \end{cases}$$

Puntos: $(0, 0)$; $(2{,}86; 0)$; $(-4{,}19; 0)$

• **Puntos de inflexión:**

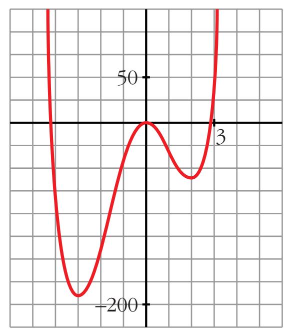
$f''(x) = 36x^2 + 24x - 72$

$f''(x) = 0 \quad \to \quad 12(3x^2 + 2x - 6) = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 72}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{76}}{6} \begin{cases} x \approx 1{,}12 \\ x \approx -1{,}79 \end{cases}$$

Puntos: $(1{,}12; -34{,}82)$ y $(-1{,}79; -107{,}22)$

• **Gráfica:**



c) $y = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x$

• **Simetrías:**

$f(-x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x$. No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y ni respecto al origen de coordenadas.

• **Ramas infinitas:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

• **Puntos singulares:**

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 4x + 12$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad 4(x^3 - 3x^2 - x + 3) = 0 \quad \to \quad 4(x - 1)(x + 1)(x - 3) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right\} \text{Puntos } (1, 7); (-1, -9); (3, -9)$$

• **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $Y \to x = 0 \to y = 0 \to$ Punto $(0, 0)$

— Con el eje $X \to y = 0 \to x(x^3 - 4x^2 - 2x + 12) = 0$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x^3 - 4x^2 - 2x + 12 = 0 \to (x - 2)(x^2 - 2x - 6) = 0 \begin{cases} x = 2 \\ x \approx 3{,}65 \\ x \approx -1{,}65 \end{cases} \end{cases}$$

Puntos: $(0, 0)$; $(2, 0)$; $(3{,}65; 0)$; $(-1{,}65; 0)$

- **Puntos de inflexión:**

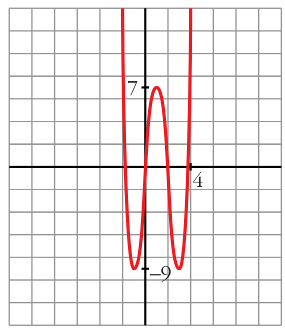
$f''(x) = 12x^2 - 24x - 4$

$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; 4(3x^2 - 6x - 1) = 0$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 12}}{6} = \frac{6 \pm \sqrt{48}}{6} \left\langle \begin{array}{l} x \approx 2{,}15 \\ x \approx -0{,}15 \end{array} \right.$$

Puntos: $(2{,}15; -1{,}83)$ y $(-0{,}15; -1{,}74)$

- **Gráfica:**



2. **Representa las siguientes funciones:**

a) $\boldsymbol{y = 3x^4 - 4x^3 - 16}$ **b)** $\boldsymbol{y = x^3 - 3x}$ **c)** $\boldsymbol{y = (1/4)x^4 - 2x^2}$

a) $y = 3x^4 - 4x^3 - 16$

- **Simetrías:**

$f(-x) = 3x^4 + 4x^3 - 16$. No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y ni respecto al origen de coordenadas.

- **Ramas infinitas:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

- **Puntos singulares:**

$f'(x) = 12x^3 - 12x^2$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 12x^2(x - 1) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array} \right.$

Puntos: $(0, -16)$; $(1, -17)$

- **Cortes con los ejes:**

— Con el eje Y $\rightarrow$ $x = 0$ $\rightarrow$ $y = -16$ $\rightarrow$ Punto $(0, -16)$

— Con el eje X $\rightarrow$ $y = 0$ $\rightarrow$ $3x^4 - 4x^3 - 16 = 0$ $\rightarrow$

$\begin{cases} x = 2 \\ 3x^3 + 2x^2 + 4x + 8 = 0 \end{cases}$ $\rightarrow$ tiene una sola raíz, que está entre –2 y –1; pues, si $g(x) = 3x^3 + 2x^2 + 4x + 8$, $g(-2) = -16 < 0$ y $g(-1) = 3 > 0$.

Puntos $(2, 0)$ y $(k, 0)$, con k entre –2 y –1.

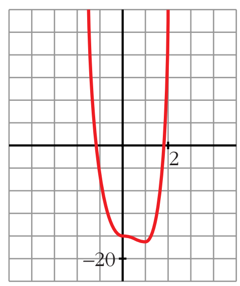
- **Puntos de inflexión:**

$f''(x) = 36x^2 - 24x$

$f''(x) = 0 \rightarrow 12x(3x - 2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \dfrac{2}{3} \end{cases}$

Puntos: $(0, -16)$ y $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{-448}{27}\right)$

- **Gráfica:**



b) $y = x^3 - 3x$

- **Simetrías:**

$f(-x) = -x^3 + 3x = -f(x)$. Es impar: simétrica respecto al origen de coordenadas.

- **Ramas infinitas:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

- **Puntos singulares:**

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$f'(x) = 0 \rightarrow 3(x^2 - 1) = 0 \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

Puntos: $(-1, 2)$; $(1, -2)$

- **Cortes con los ejes:**

— Con el eje Y $\rightarrow$ $x = 0$ $\rightarrow$ $y = 0$ $\rightarrow$ Punto $(0, 0)$

— Con el eje X $\rightarrow$ $y = 0$ $\rightarrow$ $x^3 - 3x = 0$ $\rightarrow$ $x(x^2 - 3) = 0$

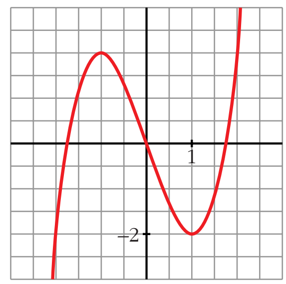
$\left.\begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{cases}\right\}$ Puntos: $(0, 0)$; $(-\sqrt{3}, 0)$; $(\sqrt{3}, 0)$

• **Puntos de inflexión:**

$f''(x) = 6x$

$f''(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 6x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 \quad \rightarrow \quad \text{Punto } (0, 0)$

• **Gráfica:**



c) $y = \dfrac{1}{4}x^4 - 2x^2$

• **Simetrías:**

$f(-x) = \dfrac{1}{4}x^4 - 2x^2 = f(x)$. Es par: simétrica respecto al eje Y.

• **Ramas infinitas:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

• **Puntos singulares:**

$f'(x) = x^3 - 4x$

$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x(x^2 - 4) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$

Puntos: (0, 0); (–2, –4); (2, –4)

• **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ Punto (0, 0)

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^2\left(\dfrac{1}{4}x^2 - 2\right) = 0$

$\begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 8 \begin{cases} x = -2\sqrt{2} \\ x = 2\sqrt{2} \end{cases} \end{cases}$

Puntos: $(0, 0)$; $\left(-2\sqrt{2}, 0\right)$; $\left(2\sqrt{2}, 0\right)$

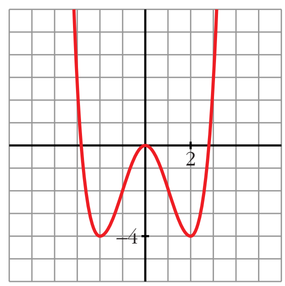
• **Puntos de inflexión:**

$f''(x) = 3x^2 - 4$

$$f''(x) = 0 \quad \to \quad 3x^2 - 4 = 0 \quad \begin{cases} x = -\sqrt{\dfrac{4}{3}} = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \\ x = \sqrt{\dfrac{4}{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Puntos: $\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}, -\dfrac{20}{9}\right)$; $\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}, -\dfrac{20}{9}\right)$

• **Gráfica:**



Página 195

1. Representa:

a) $y = \dfrac{x^3}{1 - x^2}$ **b)** $y = \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x}$

a) $y = \dfrac{x^3}{1 - x^2} = -x + \dfrac{x}{1 - x^2}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

• **Simetrías:**

$f(-x) = \dfrac{-x^3}{1 - x^2} = -f(x)$. Es impar: simétrica respecto al origen de coordenadas.

• **Asíntotas verticales:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \text{Asíntota vertical en } x = -1.$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \text{Asíntota vertical en } x = 1.$$

• **Asíntota oblicua:**

$\dfrac{x^3}{1 - x^2} = -x + \dfrac{x}{1 - x^2} \quad \to \quad y = -x$ es asíntota oblicua.

Posición de la curva respecto a la asíntota:

$f(x) - (-x) > 0$ si $x \to -\infty$ (curva por encima)

$f(x) - (-x) < 0$ si $x \to +\infty$ (curva por debajo)

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{3x^2(1-x^2) - x^3 \cdot (-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{3x^2 - 3x^4 + 2x^4}{(1-x^2)^2} = \frac{-x^4 + 3x^2}{(1-x^2)^2}$$

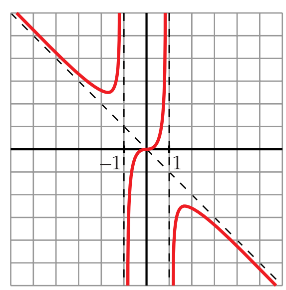
$$f'(x) = 0 \quad \to \quad x^2(-x^2+3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{cases}$$

Puntos: $(0, 0)$; $\left(-\sqrt{3}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left(\sqrt{3}, -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

- **Cortes con los ejes:**

Corta a los ejes en $(0, 0)$.

- **Gráfica:**



b) $y = \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x} = x - 2 - \dfrac{8}{x}$. *Dominio* $= \mathbb{R} - \{0\}$

- **Simetrías:**

$f(-x) = \dfrac{x^2 + 2x - 8}{-x}$. No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y ni respecto al origen.

- **Asíntotas verticales:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \text{Asíntota vertical en } x = 0.$$

- **Asíntota oblicua:**

$$\frac{x^2 - 2x - 8}{x} = x - 2 - \frac{8}{x} \quad \to \quad y = x - 2 \text{ es asíntota oblicua.}$$

Posición de la curva respecto a la asíntota:

$f(x) - (x - 2) > 0$ si $x \to -\infty$ (curva por encima)

$f(x) - (x - 2) < 0$ si $x \to +\infty$ (curva por debajo)

• **Puntos singulares:**

$f'(x) = 1 + \dfrac{8}{x^2} > 0$ para todo x del dominio.

La función es creciente en todo su dominio. No tiene puntos singulares.

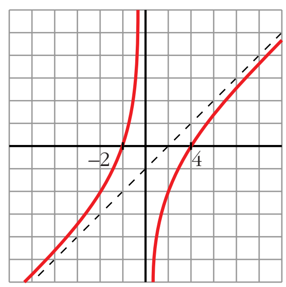
• **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \begin{cases} x = -2 \\ x = 4 \end{cases}$

Puntos: $(-2, 0)$ y $(4, 0)$

— No corta el eje Y, pues no está definida en $x = 0$.

• **Gráfica:**



2. **Representa:**

a) $y = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 4}$ **b)** $y = \dfrac{x^3 + 2x}{x^2 + 1}$

a) $y = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 4}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

• **Simetrías:**

$f(-x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 4} = f(x)$. Es par: simétrica respecto al eje Y.

• **Asíntotas verticales:**

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\}$ Asíntota vertical en $x = -2$.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\}$ Asíntota vertical en $x = 2$.

• **Asíntota horizontal:**

$\dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 4} = 1 - \dfrac{5}{x^2 - 4} \rightarrow y = 1$ es asíntota horizontal.

Posición de la curva respecto a la asíntota:

$f(x) - 1 < 0$ si $x \rightarrow -\infty$ (curva por debajo)

$f(x) - 1 < 0$ si $x \rightarrow +\infty$ (curva por debajo)

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 4) - 2x(x^2 - 9)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{2x(x^2 - 4 - x^2 + 9)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{10x}{(x^2 - 4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 10x = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; \text{Punto } \left(0, \frac{9}{4}\right)$$

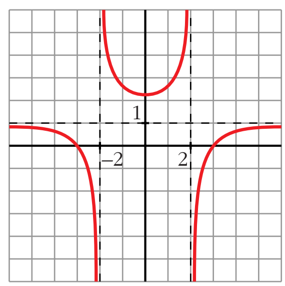
- **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $Y \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; y = \frac{9}{4} \;\rightarrow\;$ Punto $\left(0, \frac{9}{4}\right)$

— Con el eje $X \;\rightarrow\; y = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 9 = 0 \begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \end{cases}$

Puntos: $(-3, 0)$ y $(3, 0)$.

- **Gráfica:**



b) $y = \dfrac{x^3 + 2x}{x^2 + 1}$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

- **Simetrías:**

$f(-x) = \dfrac{-x^3 - 2x}{x^2 + 1} = -f(x)$. Es impar: simétrica respecto al origen de coordenadas.

- **No tiene asíntotas verticales.**

- **Asíntota oblicua:**

$\dfrac{x^3 + 2x}{x^2 + 1} = x + \dfrac{x}{x^2 + 1} \;\rightarrow\; y = x$ es asíntota oblicua.

Posición de la curva respecto a la asíntota:

$f(x) - x < 0$ si $x \rightarrow -\infty$ (curva por debajo)

$f(x) - x > 0$ si $x \rightarrow +\infty$ (curva por encima)

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 2)(x^2 + 1) - (x^3 + 2x) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{3x^4 + 3x^2 + 2x^2 + 2 - 2x^4 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} =$$

$$= \frac{x^4 + x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$$

$f'(x) = 0 \;\to\; x^4 + x^2 + 2 = 0 \;\to\; x^2 = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2} \;\to$ No tiene solución.

No hay puntos singulares.

- **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $Y \;\to\; x = 0 \;\to\; y = 0 \;\to$ Punto $(0, 0)$

— Con el eje $X \;\to\; y = 0 \;\to\; x^3 + 2x = 0 \;\to\; x(x^2 + 2) = 0 \;\to$

$\to\; x = 0 \;\to$ Punto $(0, 0)$

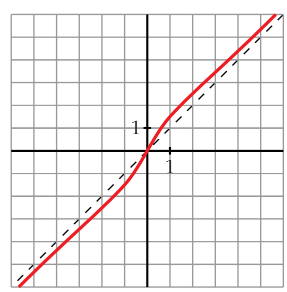
- **Puntos de inflexión:**

$$f''(x) = \frac{(4x^3 + 2x)(x^2+1)^2 - (x^4 + x^2 + 2)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4} =$$

$$= \frac{(4x^3 + 2x)(x^2+1) - 4x(x^4 + x^2 + 2)}{(x^2+1)^3} = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2+1)^3} = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{cases} \text{Puntos: } (0, 0);\ \left(-\sqrt{3}, -\frac{5\sqrt{3}}{4}\right);\ \left(\sqrt{3}, \frac{5\sqrt{3}}{4}\right)$$

- **Gráfica:**



Página 197

1. Representa:

a) $y = e^{1-x^2}$ **b)** $y = \dfrac{e^x}{x^2}$ **c)** $y = \ln(x^2 + 4)$

a) $y = e^{1-x^2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$

- **Simetría:**

$f(-x) = e^{1-x^2} = f(x)$. Es una función par: es simétrica respecto al eje Y.

- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal. Además, como $e^{1-x^2} > 0$ para todo x, la curva se sitúa por encima de la asíntota.

- **Puntos singulares:**

$f'(x) = -2x \cdot e^{1-x^2}$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -2x = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\;$ Punto $(0, e)$

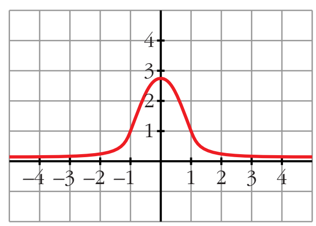
- **Puntos de inflexión:**

$f''(x) = -2e^{1-x^2} + (-2x) \cdot (-2x)e^{1-x^2} = (-2 + 4x^2)e^{1-x^2}$

$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; 4x^2 = 2 \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2}} \approx 0{,}7 \;\rightarrow\; f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{1/2} \approx 1{,}65$

Puntos de inflexión: $(-0{,}7;\ 1{,}65)$, $(0{,}7;\ 1{,}65)$

- **Gráfica:**



b) $y = \dfrac{e^x}{x^2}$

- **Dominio:** $D = \mathbb{R} - \{0\}$

- **No es simétrica.**

- **Asíntotas verticales:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \text{Asíntota vertical: } x = 0$$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$. Además $f(x) > 0$ para todo x del dominio.

$y = 0$ es una asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$

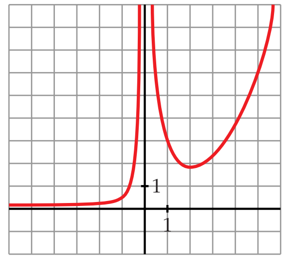
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty.$ Rama parabólica.

- **Puntos singulares:**

$f'(x) = \dfrac{e^x \cdot x^2 - e^x \cdot 2x}{x^4} = \dfrac{x \cdot e^x(x-2)}{x^4} = \dfrac{e^x(x-2)}{x^3}$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x = 2 \;\rightarrow\;$ Punto $\left(2, \dfrac{e^2}{4}\right)$

• **Gráfica:**



c) $y = ln\,(x^2 + 4)$

• **Dominio:**

Como $x^2 + 4 > 0$ para todo x, $D = \mathbb{R}$.

• **Simetrías:**

$f(-x) = ln\,(x^2 + 4) = f(x)$. Es par: simétrica respecto al eje Y.

• **No tiene asíntotas verticales.**

• **Ramas infinitas:**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{ln\,(x^2 + 4)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{2x}{x^2 + 4}}{1} = 0$$

Por tanto, no tiene asíntotas de ningún tipo.

Tiene ramas parabólicas.

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 4}$$

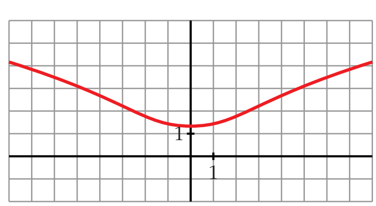
$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 2x = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\;$ Punto $(0, ln\,4)$

• **Puntos de inflexión:**

$$f''(x) = \frac{2(x^2 + 4) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 4)^2} = \frac{2x^2 + 8 - 4x^2}{(x^2 + 4)^2} = \frac{8 - 2x^2}{(x^2 + 4)^2}$$

$$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; 8 - 2x^2 = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = -2 \\ x = 2 \end{array} \right\} \text{Puntos: } (-2, ln\,8) \text{ y } (2, ln\,8)$$

• **Gráfica:**



2. Representa:

a) $y = \ln(x^2 - 1)$ **b)** $y = \sqrt{3}\ \text{sen}\ x + \cos x$

a) $y = \ln(x^2 - 1)$

- **Dominio:**

$x^2 - 1 > 0 \quad \rightarrow \quad D = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

- **Simetrías:**

$f(-x) = \ln(x^2 - 1) = f(x)$. Es par: simétrica respecto al eje Y.

- **Asíntotas verticales:**

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty; \quad \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$

$x = -1$ y $x = 1$ son asíntotas verticales.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x^2 - 1)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{2x}{x^2 - 1}}{1} = 0$$

Tiene ramas parabólicas.

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 2x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0$. No tiene puntos singulares, pues la función no está definida en $x = 0$.

- **Puntos de inflexión:**

$$f''(x) = \frac{2(x^2 - 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^2 - 2 - 4x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2x^2 - 2}{(x^2 - 1)^2}$$

No tiene puntos de inflexión.

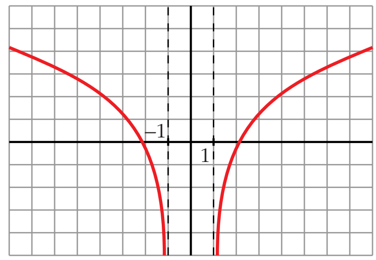
- **Puntos de corte con los ejes:**

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow \ln(x^2 - 1) = 0 \rightarrow x^2 - 1 = 1$

$x^2 = 2 \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{cases}$ Puntos: $(-\sqrt{2}, 0)$ y $(\sqrt{2}, 0)$

— No corta al eje Y, pues no existe $f(0)$.

• **Gráfica:**



b) $y = \sqrt{3}\ sen\ x + cos\ x$

• Está definida, y es *continua* y *derivable* en todo $\mathbb{R}$.

• Es *periódica* de periodo $2\pi \rightarrow$ solo la estudiamos en $[0, 2\pi]$.

• No existe $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) \rightarrow$ no tiene asíntotas ni ramas parabólicas.

• **Puntos de corte con los ejes:**

— Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow f(0) = 1 \rightarrow$ Punto $(0, 1)$

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow \sqrt{3}\ sen\ x + cos\ x = 0$

$$\sqrt{3}\ tg\ x + 1 = 0 \rightarrow tg\ x = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow x = \frac{5\pi}{6} \text{ o } x = \frac{11\pi}{6}$$

Puntos $\left(\frac{5\pi}{6}, 0\right)$; $\left(\frac{11\pi}{6}, 0\right)$

• **Puntos singulares:**

$f'(x) = \sqrt{3}\ cos\ x - sen\ x$

$f'(x) = 0 \rightarrow \sqrt{3}\ cos\ x - sen\ x = 0 \rightarrow \sqrt{3} - tg\ x = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow tg\ x = \sqrt{3} \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} \rightarrow \text{Punto } \left(\dfrac{\pi}{3}, 2\right) \\[2mm] x = \dfrac{4\pi}{3} \rightarrow \text{Punto } \left(\dfrac{4\pi}{3}, -2\right) \end{cases}$$

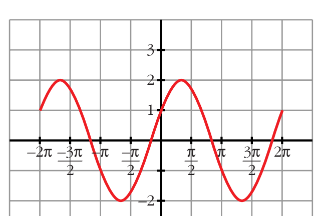
• **Puntos de inflexión:**

$f''(x) = -\sqrt{3}\ sen\ x - cos\ x = -f(x)$

$f''(x) = 0 \leftrightarrow f(x) = 0$

Los puntos de inflexión son los de corte con el eje X.

• **Gráfica:**



Página 204

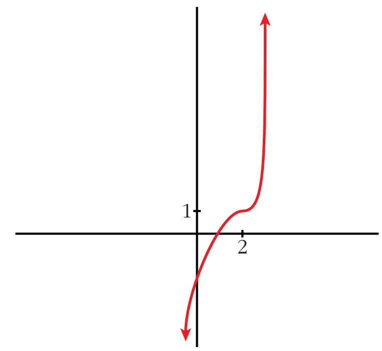
EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

1 **Representa una función continua y derivable en $\mathbb{R}$ tal que:**

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \quad f'(2) = 0$$

$f(2) = 1$, $f'(x) \geq 0$ **para cualquier** x.

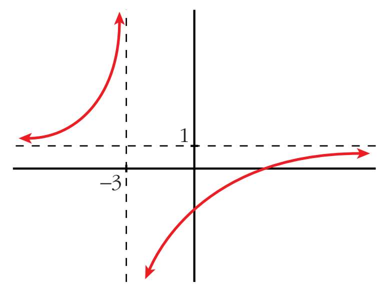


2 **Representa una función que no esté definida en $x = -3$ y tal que:**

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -3^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1 \begin{cases} \text{si } x \to +\infty, \ f(x) < 1 \\ \text{si } x \to -\infty, \ f(x) > 1 \end{cases}$$

No tiene puntos singulares y es creciente.



3 **De una función $y = f(x)$ tenemos esta información:**

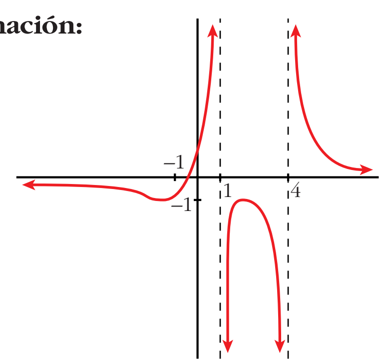
$D = \mathbb{R} - \{1, 4\}$; $\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to 4^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to 4^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

(si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$; si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$)

$f'(2) = 0$, $f(2) = -1$; $f'(-1) = 0$, $f(-1) = -1$

Represéntala.

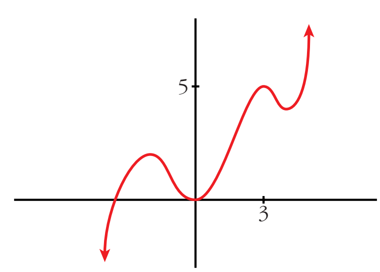


4
S **Dibuja la gráfica de una función de la que se conocen las siguientes propiedades:**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$f'(x) = 0$ si $x = -2$, $x = 0$, $x = 3$, $x = 4$

$f(-2) = 2$; $f(0) = 0$; $f(3) = 5$; $f(4) = 4$



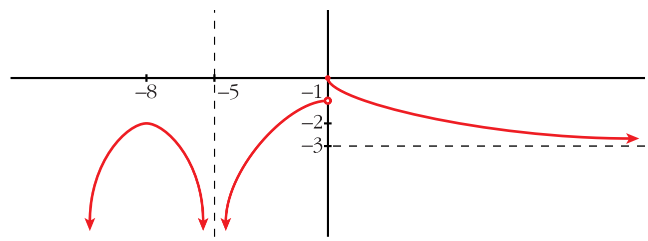
5 **S** **Dibuja la gráfica de una función que cumpla las siguientes propiedades:**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -3, \quad \lim_{x \to -5} f(x) = -\infty$$

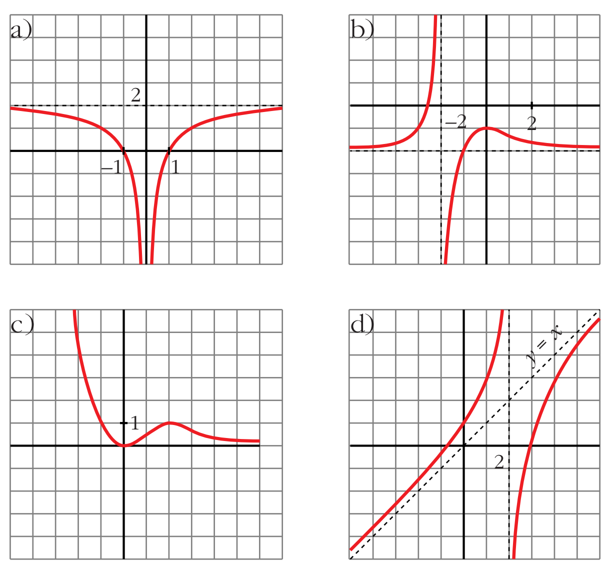
$f(-8) = -2$, $f(0) = 0$ es el único punto donde $f(x)$ se anula.

$f'(-8) = 0$ y la derivada no se anula en ningún otro punto. Además, $f'(x) < 0$ para todo x positivo.

La función es continua en toda la recta real, salvo en los puntos $x = -5$ y $x = 0$.



6 **Describe las siguientes funciones indicando sus asíntotas y ramas infinitas, sus puntos singulares y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.**



a) • Asíntota vertical: $x = 0$. Asíntotal horizontal: $y = 2$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < 2$; si $x \to +\infty$, $f(x) < 2$)

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$$

• $f(x)$ no tiene puntos singulares.

• Decrece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, +\infty)$.

b) • Asíntota vertical: $x = -2$. Asíntotal horizontal: $y = -2$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2$

(si $x \to -\infty$, $f(x) > -2$; si $x \to +\infty$, $f(x) > -2$)

$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$

• Puntos singulares: $f'(0) = 0$; $f(0) = -1$. Máximo en $(0, -1)$

• Creciente en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$ y decreciente en $(0, +\infty)$.

c) • Asíntota horizontal si $x \to +\infty$: $y = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

(si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

• Puntos singulares:

$f'(0) = 0$; $f(0) = 0$. Mínimo en $(0, 0)$

$f'(2) = 0$; $f(2) = 1$. Máximo en $(2, 1)$

• Decreciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y creciente en $(0, 2)$.

d) • Asíntota vertical: $x = 2$

Asíntota oblicua: $y = x$

(si $x \to -\infty$, $f(x) > x$; si $x \to +\infty$, $f(x) < x$)

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$

• Puntos singulares: no tiene.

• Creciente en $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

7 **S** **Se considera la función $f(x) = x^3 + 2x + 4$. ¿Tiene máximos y/o mínimos? ¿Tiene algún punto de inflexión? Haz una gráfica aproximada de esta función.**

$f(x) = x^3 + 2x + 4$

• $f'(x) = 3x^2 + 2$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 3x^2 = -2 \;\rightarrow\;$ no tiene solución.

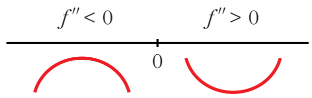
$f'(x) > 0$ para todo $x \;\rightarrow\; f(x)$ es creciente.

No tiene máximos ni mínimos.

• $f''(x) = 6x$

$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; 6x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

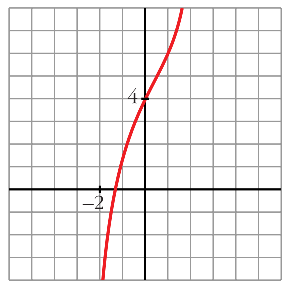
Signo de $f''(x)$:



Hay un punto de inflexión en $(0, 4)$.

- Además, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

- **Gráfica:**



8 **S** **Dada la función $y = x^3 - 3x + 1$, se pide:**

a) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento. Extremos relativos.

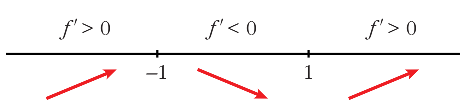
b) Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión.

c) Dibuja la gráfica a partir de los resultados anteriores.

a) $f'(x) = 3x^2 - 3$

$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

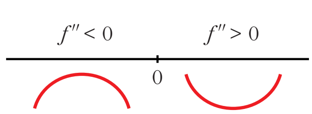
es decreciente en $(-1, 1)$

tiene un máximo en $(-1, 3)$ y un mínimo en $(1, -1)$

b) $f''(x) = 6x$

$f''(x) = 0 \rightarrow 6x = 0 \rightarrow x = 0$

Signo de $f''(x)$:

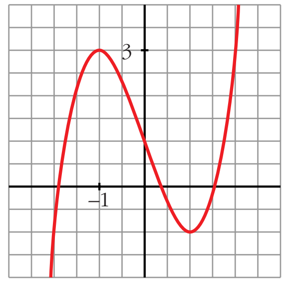


$f(x)$ es convexa en $(-\infty, 0)$

es cóncava en $(0, +\infty)$

tiene un punto de inflexión en $(0, 1)$

c)



9 **En las siguientes funciones, estudia su dominio, asíntotas y posición de la curva respecto de estas, y represéntalas a partir de los resultados obtenidos:**

a) $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ **b)** $y = \dfrac{-1}{x^2 + 1}$ **c)** $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

d) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$ **e)** $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$ **f)** $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

a) $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$
- **Asíntotas:**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

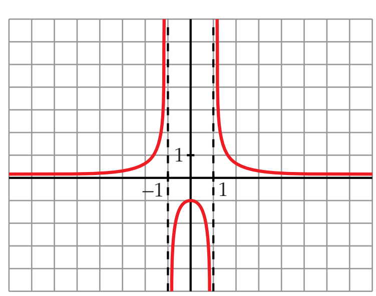
$y = 0$ es asíntota horizontal.

(si $x \to -\infty$, $f(x) > 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \quad x = -1 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 1 \text{ es asíntota vertical}$$

- **Gráfica:**



b) $y = \dfrac{-1}{x^2 + 1}$

• **Dominio:** $\mathbb{R}$

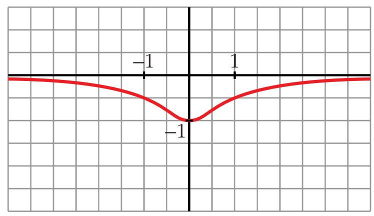
• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) < 0$)

• **Gráfica:**



c) $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

• **Asíntotas:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

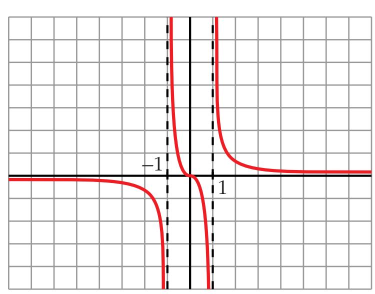
(si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

$y = 0$ es asíntota horizontal.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\}$ $x = -1$ es asíntota vertical

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\}$ $x = 1$ es asíntota vertical

• **Gráfica:**



d) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x} = x - \dfrac{1}{x}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{0\}$

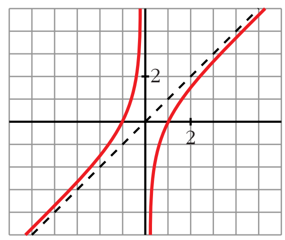
• **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \quad x = 0 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = x$ es asíntota oblicua.

(si $x \to -\infty$, $f(x) > x$; si $x \to +\infty$, $f(x) < x$)

• **Gráfica:**



e) $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$

• **Dominio:** $\mathbb{R}$

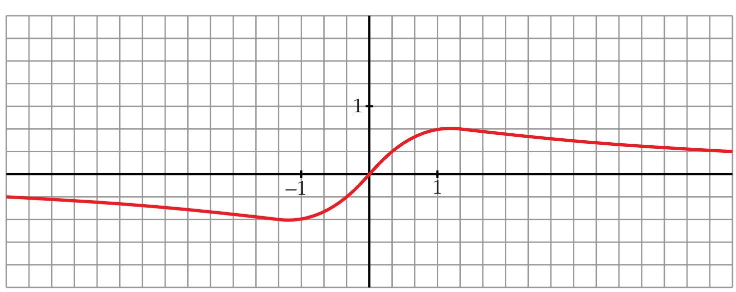
• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

• **Gráfica:**



f) $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

• **Dominio:**

$x^2 + x + 1 = 0 \quad \to \quad x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} \quad \to$ No tiene solución.

$D = \mathbb{R}$

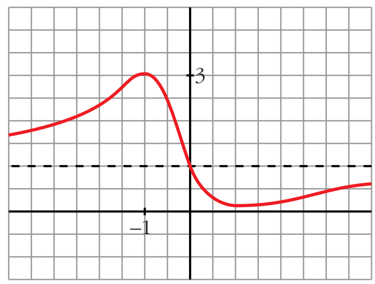
• **Asíntotas:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

(si $x \to -\infty$, $f(x) > 1$; si $x \to +\infty$, $f(x) < 1$)

$y = 1$ es asíntota horizontal.

• **Gráfica:**



Página 205

10 **Dibuja la gráfica de las siguientes funciones estudiando ramas infinitas, máximos y mínimos y puntos de inflexión:**

a) $\boldsymbol{y = x^3 - 3x + 1}$ **b)** $\boldsymbol{y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2}$

c) $\boldsymbol{y = x^3 - x^2}$ **d)** $\boldsymbol{y = x^3 - 3x}$

a) $y = x^3 - 3x + 1$

• **Ramas infinitas:**

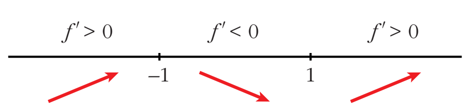
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

• **Máximos y mínimos:**

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$f'(x) = 0 \;\to\; 3(x^2 - 1) = 0 \;\to\; x^2 = 1 \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

Signo de $f'(x)$:



Máximo en $(-1, 3)$.

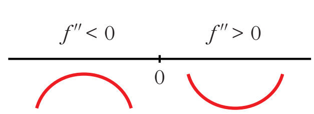
Mínimo en $(1, -1)$.

• **Puntos de inflexión:**

$f''(x) = 6x$

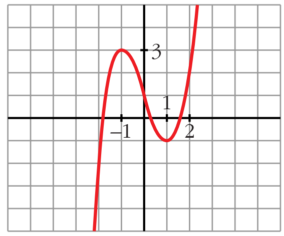
$f''(x) = 0 \;\to\; 6x = 0 \;\to\; x = 0$

Signo de $f''(x)$:



Punto de inflexión en $(0, 1)$.

- **Gráfica:**



b) $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$

- **Ramas infinitas:**

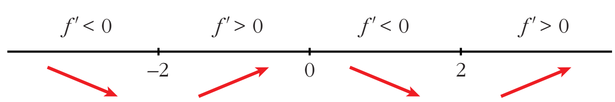
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

- **Máximos y mínimos:**

$f'(x) = x^3 - 4x$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x(x^2 - 4) = 0 \;\begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 4 = 0 \;\begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases} \end{cases}$

Signo de $f'(x)$:



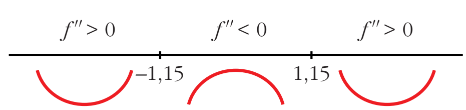
Máximo en $(0, 0)$. Mínimos en $(-2, -4)$ y en $(2, -4)$.

- **Puntos de inflexión:**

$f''(x) = 3x^2 - 4$

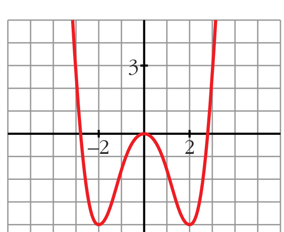
$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2 = \frac{4}{3} \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}} \approx \pm 1{,}15$

Signo de $f''(x)$:



Puntos de inflexión: $\left(-1{,}15;\, -\frac{20}{9}\right)$; $\left(1{,}15;\, -\frac{20}{9}\right)$

- **Gráfica:**



c) $y = x^3 - x^2$

- **Ramas infinitas:**

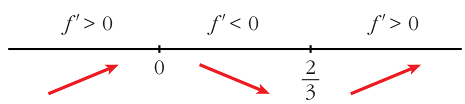
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

- **Máximos y mínimos:**

$f'(x) = 3x^2 - 2x$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad x(3x - 2) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2/3 \end{array} \right.$$

Signo de $f'(x)$:



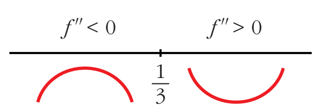
Máximo en $(0, 0)$ y mínimo en $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{-4}{27}\right)$.

- **Puntos de inflexión:**

$f''(x) = 6x - 2$

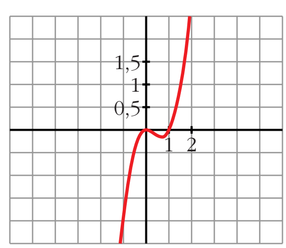
$$f''(x) = 0 \quad \to \quad 6x - 2 = 0 \quad \to \quad x = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Signo de $f''(x)$:



Punto de inflexión: $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{-2}{27}\right)$

- **Gráfica:**



d) $y = x^3 - 3x$

- **Ramas infinitas:**

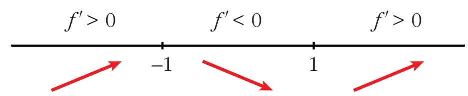
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

- **Máximos y mínimos:**

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad 3(x^2 - 1) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array} \right.$$

Signo de $f'(x)$:



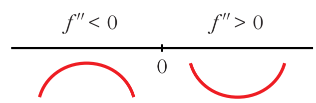
Máximo en $(-1, 2)$ y mínimo en $(1, -2)$.

- **Puntos de inflexión:**

$f''(x) = 6x$

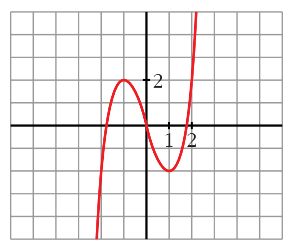
$f''(x) = 0 \rightarrow 6x = 0 \rightarrow x = 0$

Signo de $f''(x)$:



Punto de inflexión en $(0, 0)$.

- **Gráfica:**



11 **S** **Representa las siguientes funciones determinando previamente sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento y sus máximos y mínimos:**

a) $f(x) = -3x^2 + 6x$

b) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$

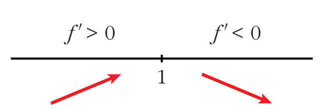
c) $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 60x - 32$

a) $f(x) = -3x^2 + 6x$

$f'(x) = -6x + 6$

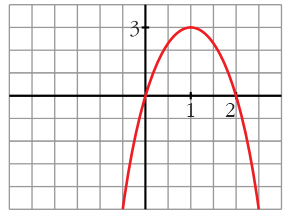
$f'(x) = 0 \rightarrow -6x + 6 = 0 \rightarrow x = 1$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 1)$; es decreciente en $(1, +\infty)$. Tiene un máximo en $(1, 3)$.

Gráfica:

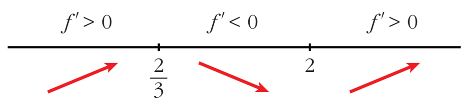


b) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$

$f'(x) = 3x^2 - 8x + 4$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x = \dfrac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{6} = \dfrac{8 \pm \sqrt{16}}{6} = \dfrac{8 \pm 4}{6} \begin{cases} x = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3} \\ x = 2 \end{cases}$

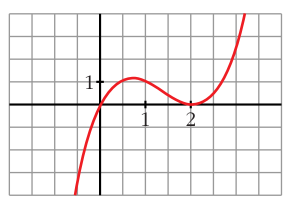
Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en $\left(-\infty, \dfrac{2}{3}\right) \cup (2, +\infty)$; es decreciente en $\left(\dfrac{2}{3}, 2\right)$.

Tiene un máximo en $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{32}{27}\right)$ y un mínimo en $(2, 0)$.

Gráfica:

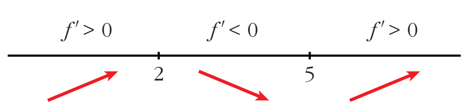


c) $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 60x - 32$

$f'(x) = 6x^2 - 42x + 60$

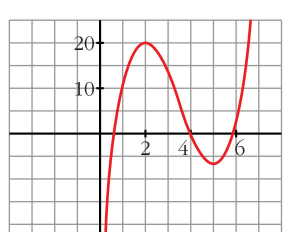
$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 6(x^2 - 7x + 10) = 0 \;\rightarrow\; x = \dfrac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} \begin{cases} x = 2 \\ x = 5 \end{cases}$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 2) \cup (5, +\infty)$; es decreciente en $(2, 5)$. Tiene un máximo en $(2, 20)$ y un mínimo en $(5, -7)$.

Gráfica:



12 **Estudia las ramas infinitas y los puntos singulares de las siguientes funciones. Con la información obtenida, represéntalas:**

a) $y = \dfrac{1}{x+1}$ **b)** $y = \dfrac{1}{4+x^2}$ **c)** $y = \dfrac{1}{4-x^2}$

d) $y = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ **e)** $y = \dfrac{x^2+1}{x}$ **f)** $y = \dfrac{x^2}{(x-3)^2}$

a) $y = \dfrac{1}{x+1}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-1\}$

- **Ramas infinitas:**

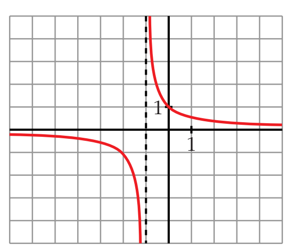
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y = 0 \text{ es asíntota horizontal.} \\ (f(x) > 0 \text{ si } x \to +\infty,\ f(x) < 0 \text{ si } x \to -\infty) \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

- **Puntos singulares:**

$f'(x) = \dfrac{-1}{(x+1)^2} < 0 \quad \to \quad f(x)$ es decreciente en su dominio. No tiene máximos ni mínimos.

- **Gráfica:**



b) $y = \dfrac{1}{4+x^2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$

- **Ramas infinitas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y = 0 \text{ es asíntota horizontal.} \\ (f(x) > 0 \to \text{ la curva está por encima de la asíntota).} \end{array}$$

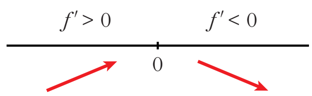
No tiene asíntotas verticales.

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{-2x}{(4 + x^2)^2}$$

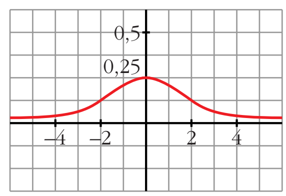
$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad -2x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0$$

Signo de $f'(x)$:



Máximo en $\left(0, \frac{1}{4}\right)$.

- **Gráfica:**



c) $y = \dfrac{1}{4 - x^2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

- **Ramas infinitas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = 0 \text{ es asíntota horizontal.} \\ (f(x) < 0 \text{ si } x \to +\infty \text{ y si } x \to -\infty) \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} x = -2 \text{ es asíntota vertical.}$$

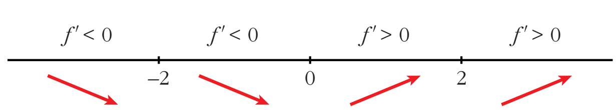
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} x = 2 \text{ es asíntota vertical.}$$

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x}{(4 - x^2)^2}$$

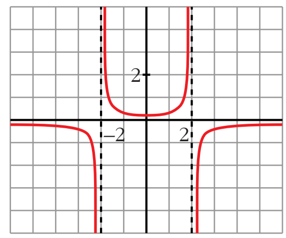
$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 2x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0$$

Signo de $f'(x)$:



Mínimo en $\left(0, \frac{1}{4}\right)$.

• **Gráfica:**



d) $y = \dfrac{1}{(x-2)^2}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{2\}$

• **Ramas infinitas:**

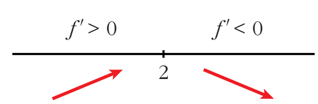
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y = 0 \text{ es asíntota horizontal.} \\ (f(x) > 0 \;\; \to \;\; \text{la curva está por encima de la asíntota).} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 2 \text{ es asíntota vertical.}$$

• **Puntos singulares:**

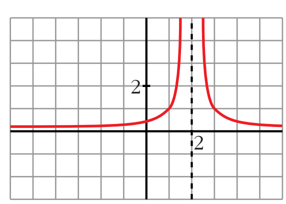
$f'(x) = \dfrac{-2}{(x-2)^3}$

$f'(x) \neq 0$. Signo de $f'(x)$:



No tiene puntos singulares.

• **Gráfica:**



e) $y = \dfrac{x^2+1}{x} = x + \dfrac{1}{x}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{0\}$

• **Ramas infinitas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 0 \text{ es asíntota vertical.}$$

$y = x$ es asíntota oblicua.

$(f(x) < x$ si $x \to -\infty$; $f(x) > x$ si $x \to +\infty)$

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

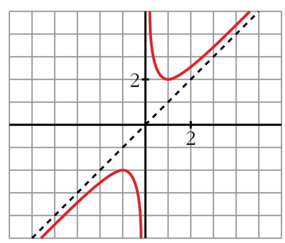
$$f'(x) = 0 \quad \to \quad x^2 - 1 = 0 \quad \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:

$f' > 0$	-1	$f' < 0$	0	$f' < 0$	1	$f' > 0$
$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Máximo en $(-1, -2)$ y mínimo en $(1, 2)$.

• **Gráfica:**



f) $y = \dfrac{x^2}{(x - 3)^2}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{3\}$

• **Ramas infinitas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y = 1 \text{ es asíntota horizontal.} \\ (f(x) < 1 \text{ si } x \to -\infty;\ f(x) > 1 \text{ si } x \to +\infty) \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 3 \text{ es asíntota vertical}$$

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x(x - 3)^2 - x^2 \cdot 2(x - 3)}{(x - 3)^4} = \frac{2x(x - 3 - x)}{(x - 3)^3} = \frac{-6x}{(x - 3)^3}$$

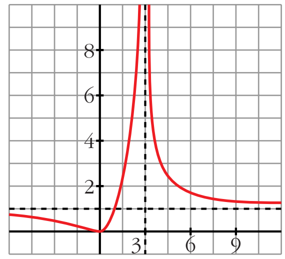
$$f'(x) = 0 \quad \to \quad -6x = 0 \quad \to \quad x = 0$$

Signo de $f'(x)$:

$f' < 0$	0	$f' > 0$	3	$f' < 0$
$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

Mínimo en $(0, 0)$.

• **Gráfica:**



13 **S** **En las siguientes funciones se pide: dominio de definición, cortes con los ejes, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, así como los posibles máximos o mínimos.**

Con la información obtenida, represéntalas:

a) $\boldsymbol{y = \dfrac{2x+2}{3x-3}}$ **b)** $\boldsymbol{y = \dfrac{x}{x-4}}$ **c)** $\boldsymbol{y = \dfrac{x}{(x-1)^2}}$

d) $\boldsymbol{y = \dfrac{1}{x^2-2x+2}}$ **e)** $\boldsymbol{y = \dfrac{(x+2)^2}{x^2+1}}$ **f)** $\boldsymbol{y = \dfrac{x^2+1}{3x}}$

a) $y = \dfrac{2x+2}{3x-3}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{1\}$

• **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = \dfrac{-2}{3} \rightarrow$ Punto $\left(0, \dfrac{-2}{3}\right)$

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow 2x + 2 = 0 \rightarrow x = -1 \rightarrow$ Punto $(-1, 0)$

• **Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento:**

$$f'(x) = \frac{2(3x-3) - (2x+2) \cdot 3}{(3x-3)^2} = \frac{6x - 6 - 6x - 6}{(3x-3)^2} = \frac{-12}{(3x-3)^2}$$

$f'(x) \neq 0$ para todo x

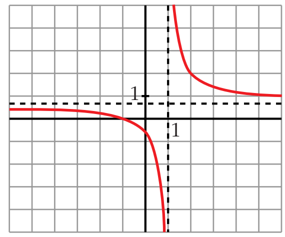
$f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente en todo su dominio.

• **Ramas infinitas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \dfrac{2}{3} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{2}{3} \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = \dfrac{2}{3} \text{ es asíntota horizontal.} \\ \left(f(x) < \dfrac{2}{3} \text{ si } x \to -\infty;\ f(x) > \dfrac{2}{3} \text{ si } x \to +\infty\right) \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

• **Gráfica:**



b) $y = \dfrac{x}{x-4}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{4\}$

• **Cortes con los ejes:**

— Con el eje Y $\to$ $x = 0$ $\to$ $y = 0$ $\to$ Punto $(0, 0)$

— Con el eje X $\to$ $y = 0$ $\to$ $x = 0$ $\to$ Punto $(0, 0)$

• **Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento:**

$$f'(x) = \frac{x-4-x}{(x-4)^2} = \frac{-4}{(x-4)^2}$$

$f'(x) \neq 0$ para todo x.

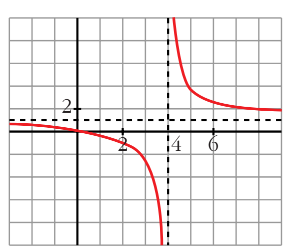
$f'(x) < 0$ $\to$ $f(x)$ es decreciente en todo su dominio. No tiene máximos ni mínimos.

• **Ramas infinitas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = 1 \text{ es asíntota horizontal.} \\ (f(x) < 1 \text{ si } x \to -\infty;\ f(x) > 1 \text{ si } x \to +\infty) \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} x = 4 \text{ es asíntota vertical.}$$

• **Gráfica:**



c) $y = \dfrac{x}{(x-1)^2}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{1\}$

• **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $Y \;\to\; x = 0 \;\to\; y = 0 \;\to\;$ Punto $(0, 0)$

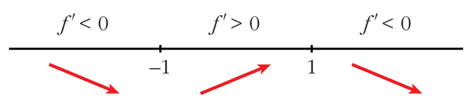
— Con el eje $X \;\to\; y = 0 \;\to\; x = 0 \;\to\;$ Punto $(0, 0)$

• **Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento:**

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2 - x \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{x-1-2x}{(x-1)^3} = \frac{-x-1}{(x-1)^3}$$

$f'(x) = 0 \;\to\; -x - 1 = 0 \;\to\; x = -1$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, crece en $(-1, 1)$.

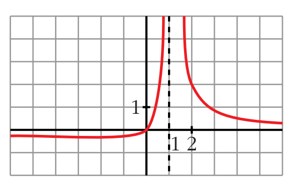
Tiene un mínimo en $\left(-1, \dfrac{-1}{4}\right)$.

• **Ramas infinitas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y = 0 \text{ es asíntota horizontal.} \\ (f(x) < 0 \text{ si } x \to -\infty;\ f(x) > 0 \text{ si } x \to +\infty) \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

• **Gráfica:**



d) $y = \dfrac{1}{x^2 - 2x + 2}$

• **Dominio:**

$x^2 - 2x + 2 = 0 \;\to\; x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2}$. No tiene solución. Por tanto:

Dominio: $\mathbb{R}$

• **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $Y \;\to\; x = 0 \;\to\; y = \dfrac{1}{2} \;\to\;$ Punto $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$

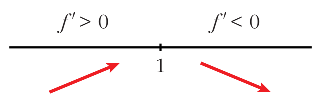
— Con el eje $X \;\to\; y = 0 \;\to\;$ Como $y \neq 0$, no corta al eje X.

• **Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento:**

$$f'(x) = \frac{-(2x-2)}{(x^2-2x+2)^2}$$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad 2x - 2 = 0 \quad \to \quad x = 1$

Signo de $f'(x)$:



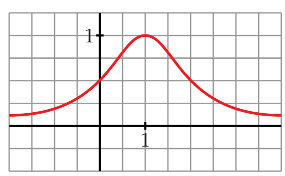
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 1)$, es decreciente en $(1, +\infty)$. Tiene un máximo en $(1, 1)$.

• **Ramas infinitas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = 0 \text{ es asíntota horizontal.} \\ (f(x) > 0 \;\to\; \text{la curva está por encima de la asíntota}). \end{array}$$

No tiene asíntotas verticales.

• **Gráfica:**



e) $y = \dfrac{(x+2)^2}{x^2+1}$

• **Dominio:** $\mathbb{R}$

• **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $Y \;\to\; x = 0 \;\to\; y = 4 \;\to\;$ Punto $(0, 4)$

— Con el eje $X \;\to\; y = 0 \;\to\; x = -2 \;\to\;$ Punto $(-2, 0)$

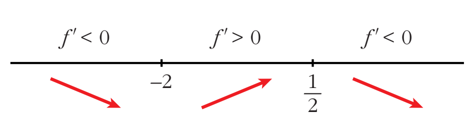
• **Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento:**

$$f'(x) = \frac{2(x+2)(x^2+1) - (x+2)^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{(x+2)[2x^2+2-2x(x+2)]}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{(x+2)(2x^2+2-2x^2-4x)}{(x^2+1)^2} = \frac{(x+2)(2-4x)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad (x+2)(2-4x) = 0 \quad \begin{cases} x = -2 \\ x = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -2) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$; es creciente en $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$.

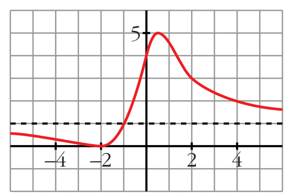
Tiene un mínimo en $(-2, 0)$ y un máximo en $\left(\frac{1}{2}, 5\right)$.

- **Ramas infinitas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y = 1 \text{ es asíntota horizontal.} \\ (f(x) < 1 \text{ si } x \to -\infty;\ f(x) > 1 \text{ si } x \to +\infty) \end{array}$$

No tiene asíntotas verticales.

- **Gráfica:**



f) $y = \dfrac{x^2 + 1}{3x} = \dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{3x}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{0\}$
- **Cortes con los ejes:**

— No corta al eje Y, pues $x = 0$ no está en el dominio.

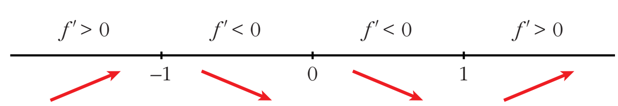
— No corta al eje X, pues $x^2 + 1 \neq 0$ para todo x.

- **Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento:**

$$f'(x) = \frac{2x \cdot 3x - (x^2 + 1) \cdot 3}{9x^2} = \frac{2x^2 - x^2 - 1}{3x^2} = \frac{x^2 - 1}{3x^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad x^2 - 1 = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array} \right.$$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$; es decreciente en $(-1, 0) \cup (0, 1)$.

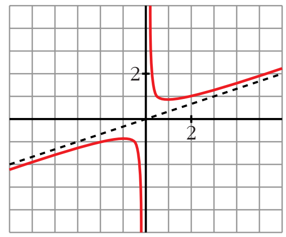
Tiene un máximo en $\left(-1, \frac{-2}{3}\right)$ y tiene un mínimo en $\left(1, \frac{2}{3}\right)$.

- **Ramas infinitas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 0 \text{ es asíntota vertical. } y = \frac{x}{3} \text{ es asíntota oblicua.}$$

$$\left(f(x) < \frac{x}{3} \quad \text{si} \quad x \to -\infty; \quad f(x) > \frac{x}{3} \quad \text{si} \quad x \to +\infty\right)$$

- **Gráfica:**



PARA RESOLVER

14 **S** **Representa las siguientes funciones estudiando previamente:**

— Dominio de definición, asíntotas y posición de la curva respecto de estas.

— Intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y extremos relativos.

a) $y = 2x + \dfrac{8}{x}$ **b)** $y = \dfrac{2x}{(x+1)^2}$

c) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$ **d)** $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

e) $y = \dfrac{4x - 12}{(x-2)^2}$ **f)** $y = \dfrac{x}{(x-2)^2}$

g) $y = \dfrac{(x-1)(x-3)}{x - 2}$ **h)** $y = \dfrac{x^2}{9 - x^2}$

i) $y = \dfrac{x^2 + 4}{x}$ **j)** $y = \dfrac{x^2}{(x-3)^2}$

k) $y = \dfrac{2x^3}{x^2 + 1}$ **l)** $y = \dfrac{x^4}{x^2 - 4}$

m) $y = \dfrac{x^3}{x + 2}$ **n)** $y = \dfrac{(x-2)^2}{x - 1}$

a) $y = 2x + \dfrac{8}{x}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{0\}$

- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 0 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = 2x$ es asíntota oblicua.

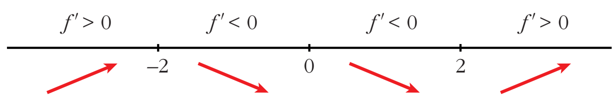
(si $x \to -\infty$, $f(x) < 2x$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 2x$)

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = 2 - \frac{8}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad \frac{2x^2 - 8}{x^2} = 0 \quad \to \quad x^2 = 4 \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signo de la derivada:



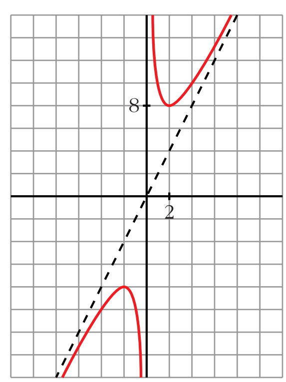
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

es decreciente en $(-2, 0) \cup (0, 2)$

tiene un máximo en $(-2, -8)$

tiene un mínimo en $(2, 8)$

- **Gráfica:**



b) $y = \dfrac{2x}{(x + 1)^2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-1\}$

- **Asíntotas:**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

$y = 0$ es asíntota horizontal.

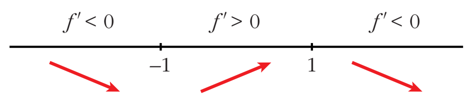
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \quad x = -1 \text{ es asíntota vertical}$$

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{2(x+1)^2 - 2x \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{(x+1)(2x+2-4x)}{(x+1)^4} = \frac{-2x+2}{(x+1)^3}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad -2x + 2 = 0 \quad \to \quad x = 1$$

Signo de $f'(x)$:

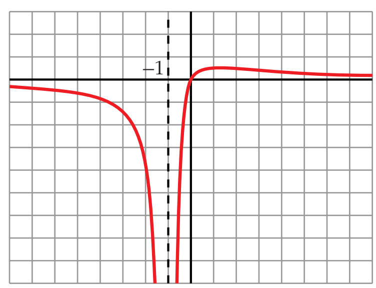


$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

es creciente en $(-1, 1)$

tiene un máximo en $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$

- **Gráfica:**



c) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4} = x + \dfrac{4x}{x^2 - 4}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$
- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = -2 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 2 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = x$ es asíntota oblicua.

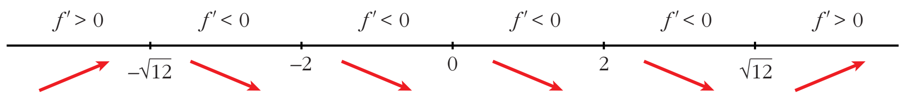
(si $x \to -\infty$, $f(x) < x$; si $x \to +\infty$, $f(x) > x$)

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-4) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{3x^4 - 12x^2 - 2x^4}{(x^2-4)^2} = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2-4)^2} = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad x^2(x^2 - 12) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{12} \\ x = \sqrt{12} \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



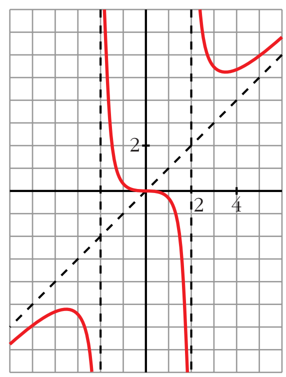
$f(x)$ es creciente en $\left(-\infty, -\sqrt{12}\right) \cup \left(\sqrt{12}, +\infty\right)$

es decreciente en $\left(-\sqrt{12}, -2\right) \cup (-2, 2) \cup \left(2, \sqrt{12}\right)$

tiene un máximo en $\left(-\sqrt{12}, -3\sqrt{3}\right)$

tiene un mínimo en $\left(\sqrt{12}, 3\sqrt{3}\right)$

- **Gráfica:**



d) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = x - 1 + \dfrac{1}{x - 1}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{1\}$

- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 1 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = x - 1$ es asíntota oblicua.

(si $x \to -\infty$, $f(x) < x - 1$; si $x \to +\infty$, $f(x) > x - 1$)

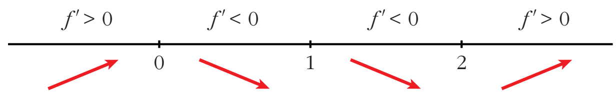
- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x + 1 - 1}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad x(x-2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



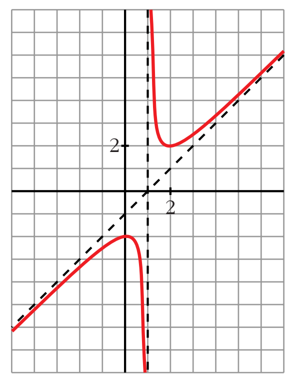
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

es decreciente en $(0, 1) \cup (1, 2)$

tiene un máximo en $(0, -2)$

tiene un mínimo en $(2, 2)$

- **Gráfica:**



e) $y = \dfrac{4x - 12}{(x-2)^2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{2\}$

- **Asíntotas:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

$y = 0$ es asíntota oblicua.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \quad x = 2 \text{ es asíntota vertical}$$

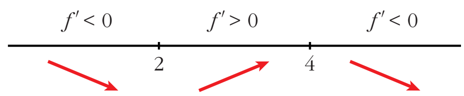
- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{4(x-2)^2 - (4x-12) \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{4(x-2) - 2(4x-12)}{(x-2)^3} =$$

$$= \frac{4x - 8 - 8x + 24}{(x-2)^3} = \frac{-4x + 16}{(x-2)^3}$$

$f'(x) = 0 \;\to\; -4x + 16 = 0 \;\to\; x = 4$

Signo de $f'(x)$:

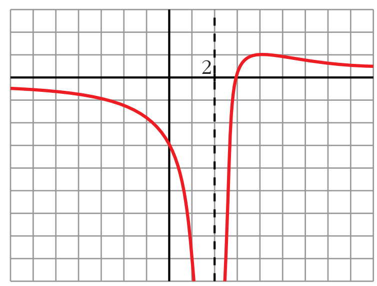


$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$

es creciente en $(2, 4)$

tiene un máximo en $(4, 1)$

- **Gráfica:**



f) $y = \dfrac{x}{(x-2)^2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{2\}$
- **Asíntotas:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

$y = 0$ es asíntota horizontal.

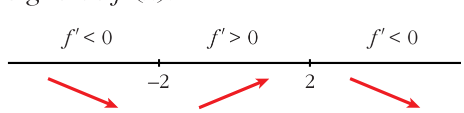
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 2 \text{ es asíntota vertical}$$

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{(x-2)^2 - x \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{x - 2 - 2x}{(x-2)^3} = \frac{-x-2}{(x-2)^3}$$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad -x - 2 = 0 \quad \to \quad x = -2$

Signo de $f'(x)$:

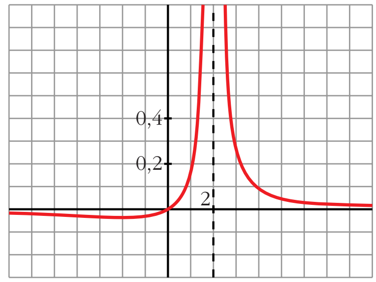


$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

es creciente en $(-2, 2)$

tiene un mínimo en $\left(-2, \dfrac{-1}{8}\right)$

• **Gráfica:**



g) $y = \dfrac{(x-1)(x-3)}{x-2} = \dfrac{x^2-4x+3}{x-2} = x - 2 - \dfrac{1}{x-2}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{2\}$

• **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \quad x = 2 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = x - 2$ es asíntota oblicua.

(si $x \to -\infty$, $f(x) > x - 2$; si $x \to +\infty$, $f(x) < x - 2$)

• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

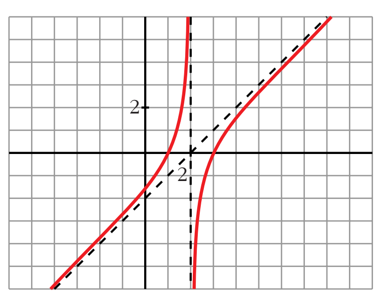
$f'(x) = 1 + \dfrac{1}{(x-2)^2}$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad (x-2)^2 + 1 = 0 \quad \to \quad$ no tiene solución

$f(x)$ no tiene extremos relativos.

$f'(x) > 0$ para todo $x \quad \to \quad f(x)$ es creciente en todo su dominio.

• **Gráfica:**



h) $y = \dfrac{x^2}{9 - x^2}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$

• **Asíntotas:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < -1$; si $x \to +\infty$, $f(x) < -1$)

$y = -1$ es asíntota horizontal.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = -3 \text{ es asíntota vertical}$$

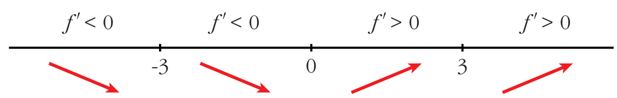
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \quad x = 3 \text{ es asíntota vertical}$$

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{2x(9 - x^2) - x^2 \cdot (-2x)}{(9 - x^2)^2} = \frac{18x - 2x^3 + 2x^3}{(9 - x^2)^2} = \frac{18x}{(9 - x^2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 18x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0$$

Signo de $f'(x)$:

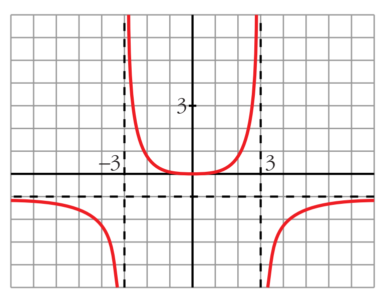


$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -3) \cup (-3, 0)$

es creciente en $(0, 3) \cup (3, +\infty)$

tiene un mínimo en $(0, 0)$

- **Gráfica:**



i) $y = \dfrac{x^2 + 4}{x} = x + \dfrac{4}{x}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{0\}$
- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 0 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = x$ es asíntota oblicua.

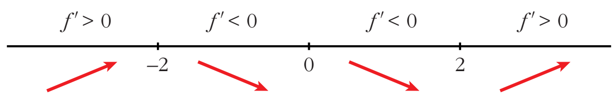
(si $x \to -\infty$, $f(x) < x$; si $x \to +\infty$, $f(x) > x$)

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$$

$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - 4 = 0 \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$

Signo de $f'(x)$:



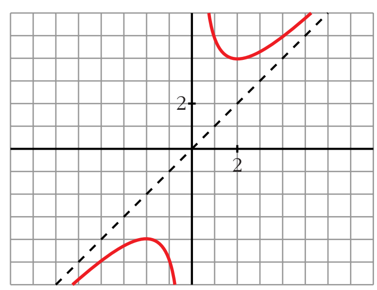
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

es decreciente en $(-2, 0) \cup (0, 2)$

tiene un máximo en $(-2, -4)$

tiene un mínimo en $(2, 4)$

• **Gráfica:**



j) $y = \dfrac{x^2}{(x-3)^2}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{3\}$

• **Asíntotas:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < 1$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > 1$)

$y = 1$ es asíntota horizontal.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 3 \text{ es asíntota vertical}$$

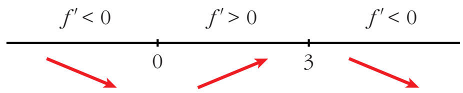
• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{2x(x-3)^2 - x^2 \cdot 2(x-3)}{(x-3)^4} = \frac{2x(x-3) - 2x^2}{(x-3)^3} =$$

$$= \frac{2x^2 - 6x - 2x^2}{(x-3)^3} = \frac{-6x}{(x-3)^3}$$

$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad -6x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0$

Signo de $f'(x)$:

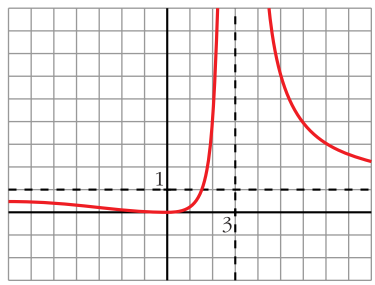


$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$

es creciente en $(0, 3)$

tiene un mínimo en $(0, 0)$

• **Gráfica:**



k) $y = \dfrac{2x^3}{x^2+1} = 2x - \dfrac{2x}{x^2+1}$

• **Dominio:** $\mathbb{R}$

• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$y = 2x$ es asíntota oblicua.

(Si $x \to -\infty$, $f(x) > 2x$; si $x \to +\infty$, $f(x) < 2x$).

• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{6x^2(x^2+1) - 2x^3 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{6x^4 + 6x^2 - 4x^4}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^4 + 6x^2}{(x^2+1)^2}$$

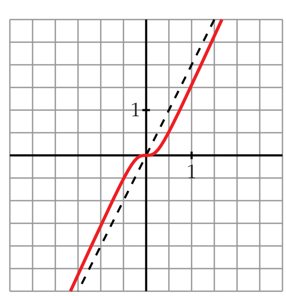
$f'(x) = 0 \;\to\; 2x^2(x^2+3) = 0 \;\to\; x = 0$

Signo de $f'(x)$:

$f'(x) > 0$ para todo $x \neq 0$

$f(x)$ es creciente en todo $\mathbb{R}$.

• **Gráfica:**



l) $y = \dfrac{x^4}{x^2 - 4}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$
- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \; x = -2 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \; x = 2 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty \end{array}\right\} \; \text{Ramas parabólicas}$$

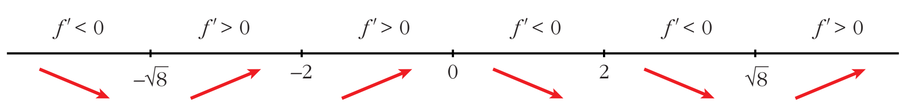
- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{4x^3(x^2 - 4) - x^4 \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{4x^5 - 16x^3 - 2x^5}{(x^2 - 4)^2} = \frac{2x^5 - 16x^3}{(x^2 - 4)^2} =$$

$$= \frac{2x^3(x^2 - 8)}{(x^2 - 4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\to\; 2x^3(x^2 - 8) = 0 \;\begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{8} \\ x = \sqrt{8} \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



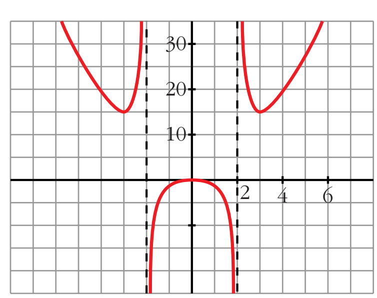
$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -\sqrt{8}) \cup (0, 2) \cup (2, \sqrt{8})$

es creciente en $(-\sqrt{8}, -2) \cup (-2, 0) \cup (\sqrt{8}, +\infty)$

tiene un mínimo en $(-\sqrt{8}, 16)$ y otro en $(\sqrt{8}, 16)$

tiene un máximo en $(0, 0)$

- **Gráfica:**



m) $y = \dfrac{x^3}{x+2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-2\}$

- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \ x = -2 \text{ es asíntota vertical}$$

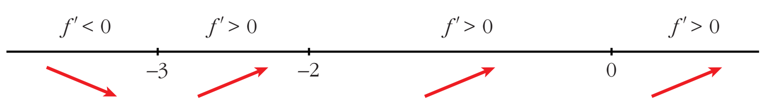
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty \end{array}\right\} \text{ Ramas parabólicas}$$

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{3x^2(x+2) - x^3}{(x+2)^2} = \frac{3x^3 + 6x^2 - x^3}{(x+2)^2} = \frac{2x^3 + 6x^2}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \ \rightarrow \ 2x^2(x+3) = 0 \ \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



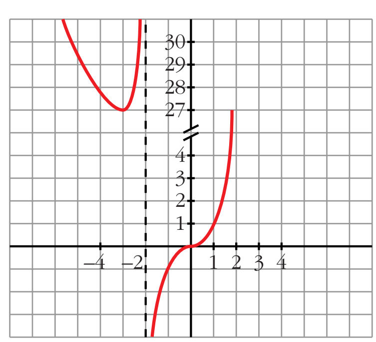
$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -3)$

es creciente en $(-3, -2) \cup (-2, +\infty)$

tiene un mínimo en $(-3, 27)$

tiene un punto de inflexión en $(0, 0)$

- **Gráfica:**



n) $y = \dfrac{(x-2)^2}{x-1} = x - 3 + \dfrac{1}{x-1}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{1\}$
- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \; x = 1 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = x - 3$ es asíntota oblicua.

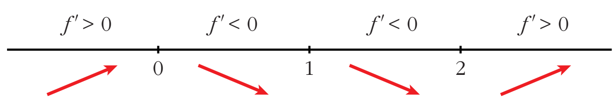
(Si $x \to -\infty$, $f(x) < x - 3$; si $x \to +\infty$, $f(x) > x - 3$).

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\to\; x(x-2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



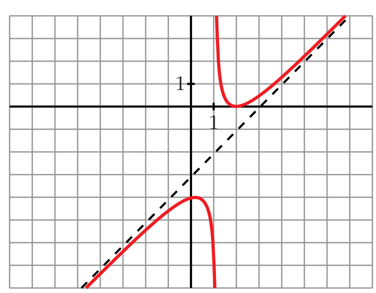
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

es decreciente en $(0, 1) \cup (1, 2)$

tiene un máximo en $(0, -4)$

tiene un mínimo en $(2, 0)$

- **Gráfica:**



15 **S** **a) Halla las asíntotas de la gráfica de la función definida para $x > 0$ por $f(x) = \dfrac{1 + x^2}{x}$.**

b) Halla las regiones de crecimiento y de decrecimiento de f indicando sus máximos y mínimos locales y globales, si los hay.

c) Esboza la gráfica de f.

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \;\to\; x = 0$ es asíntota vertical.

$f(x) = x + \dfrac{1}{x} \quad \to \quad y = x$ es asíntota oblicua.

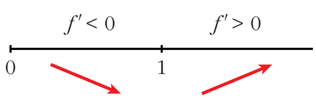
(Si $x \to +\infty$, $f(x) > x$)

b) $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad x^2 - 1 = 0 \begin{cases} x = -1 & \text{(no vale)} \\ x = 1 \end{cases}$

($x = -1$ no vale, pues $f(x)$ está definida solamente para $x > 0$)

Signo de $f'(x)$:



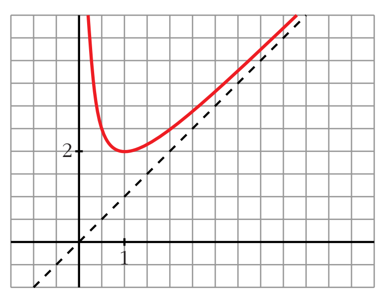
$f(x)$ es decreciente en $(0, 1)$

es creciente en $(1, +\infty)$

tiene un mínimo (local y global) en $(1, 2)$

no tiene un máximo

c)



16 **Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$, se pide:**

a) Dominio de definición, asíntotas y posición de la curva respecto a estas.

b) Máximos y mínimos relativos, e intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

c) Dibuja la gráfica de f.

a) • **Dominio:** $\mathbb{R}$

• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

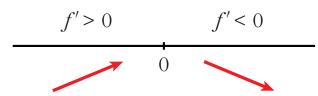
$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \end{array}\right\}$ $y = 0$ es asíntota horizontal.

($f(x) > 0 \quad \to \quad$ la curva está por encima de la asíntota).

b) $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$

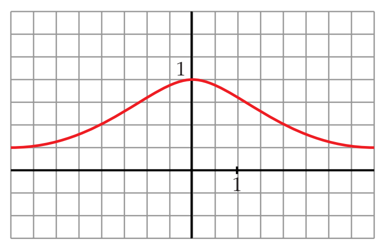
$f'(x) = 0 \quad \to \quad x = 0$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0)$; es decreciente en $(0, +\infty)$. Tiene un máximo en $(0, 1)$.

c)



Página 206

17 **S** **Representa gráficamente la función: $p(x) = x^4 + 4/3\, x^3 + 2x^2 - 2$**

¿Cuántas raíces reales tiene este polinomio $p(x)$?

$p(x) = x^4 + \dfrac{4}{3}x^3 + 2x^2 - 2$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} p(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} p(x) = +\infty$

- $p'(x) = 4x^3 + 4x^2 + 4x = 4x(x^2 + x + 1)$

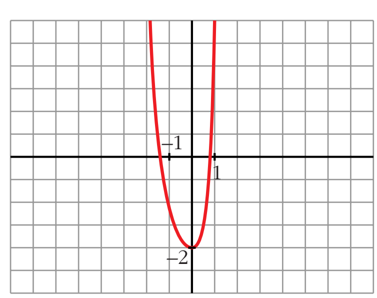
  $p'(x) = 0 \quad \to \quad x = 0 \quad \to$ Hay un punto singular en $(0, -2)$.

- $p''(x) = 12x^2 + 8x + 4 = 4(3x^2 + 2x + 1)$

  $p''(x) = 0 \quad \to \quad x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 - 12}}{6} \quad \to$ no tiene solución.

  $p(x)$ no tiene puntos de inflexión.

- **Gráfica:**



- $f(x)$ tiene dos raíces reales.

18 **Dadas las siguientes funciones, halla sus asíntotas, estudia el crecimiento y la existencia de máximos y mínimos. Dibuja su gráfica:**

a) $y = \dfrac{e^x}{x^2 + 3}$ **b)** $y = \dfrac{x^3}{4x^2 + 1}$

c) $y = x + \dfrac{4}{(x-1)^2}$ **d)** $y = \dfrac{x^3 + 8}{x^3 - 1}$

a) $y = \dfrac{e^x}{x^2 + 3}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \;\to\; y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$ $(f(x) > 0)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty \;\to\;$ Rama parabólica

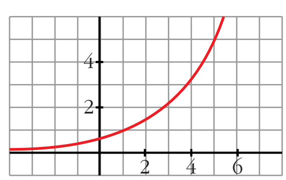
- **Crecimiento, máximos y mínimos:**

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2+3) - e^x 2x}{(x^2+3)^2} = \frac{e^x(x^2 - 2x + 3)}{(x^2+3)^2}$$

$f'(x) = 0 \;\to\; x^2 - 2x + 3 = 0 \;\to\; x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2}$. No tiene solución.

$f'(x) > 0$ para todo $x \;\to\; f(x)$ es creciente en todo $\mathbb{R}$. No tiene máximos ni mínimos.

- Corta al eje Y en $\left(0, \dfrac{1}{3}\right)$.
- **Gráfica:**



b) $y = \dfrac{x^3}{4x^2 + 1} = \dfrac{1}{4}x - \dfrac{(1/4)x}{4x^2 + 1}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$y = \dfrac{1}{4}x$ es asíntota oblicua.

(Si $x \to -\infty$, $f(x) > \dfrac{1}{4}x$; si $x \to +\infty$, $f(x) < \dfrac{1}{4}x$)

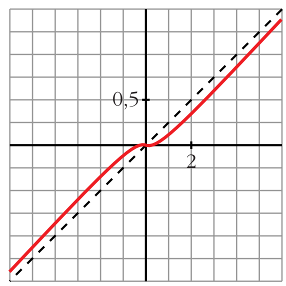
- **Crecimiento, máximos y mínimos:**

$$f'(x) = \frac{3x^2(4x^2+1) - x^3 \cdot 8x}{(4x^2+1)^2} = \frac{12x^4 + 3x^2 - 8x^4}{(4x^2+1)^2} = \frac{4x^4+3x^2}{(4x^2+1)^2}$$

$f'(x) = 0 \;\;\rightarrow\;\; x^2(4x^2+3) = 0 \;\;\rightarrow\;\; x = 0 \;\;\rightarrow\;\; (0, 0)$

$f'(x) > 0$ si $x \neq 0 \;\;\rightarrow\;\; f(x)$ es creciente (tiene un punto de inflexión en $(0, 0)$)

- **Gráfica:**



c) $y = x + \dfrac{4}{(x-1)^2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{1\}$
- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 1 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = x$ es asíntota oblicua.

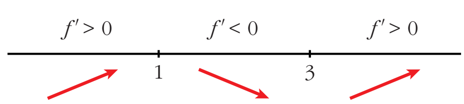
(Si $x \to -\infty$, $f(x) > x$; si $x \to +\infty$, $f(x) > x$).

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = 1 - \frac{8}{(x-1)^3} = \frac{(x-1)^3 - 8}{(x-1)^3}$$

$f'(x) = 0 \;\;\rightarrow\;\; (x-1)^3 = 8 \;\;\rightarrow\;\; x - 1 = 2 \;\;\rightarrow\;\; x = 3$

Signo de $f'(x)$:

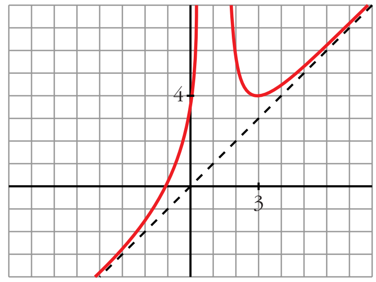


$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

es decreciente en $(1, 3)$

tiene un mínimo en $(3, 4)$

• **Gráfica:**



d) $y = \dfrac{x^3 + 8}{x^3 - 1}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{1\}$

• **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y = 1 \text{ es asíntota horizontal.} \\ (f(x) < 1 \text{ si } x \to -\infty;\ f(x) > 1 \text{ si } x \to +\infty) \end{array}$$

• **Crecimiento, máximos y mínimos:**

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^3 - 1) - (x^3 + 8) \cdot 3x^2}{(x^3 - 1)^2} = \frac{3x^2(x^3 - 1 - x^3 - 8)}{(x^3 - 1)^2} = \frac{-27x^2}{(x^3 - 1)^2}$$

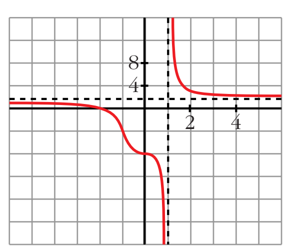
$f'(x) = 0 \quad \to \quad -27x^2 = 0 \quad \to \quad x = 0$

Signo de $f'(x)$:

$f'(x) < 0 \quad \to \quad f(x)$ es decreciente en su dominio.

(Tiene un punto de inflexión en $(0, -8)$).

• **Gráfica:**



19 **Estudia los máximos, mínimos y puntos de inflexión de las siguientes funciones y represéntalas gráficamente:**

a) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ **b)** $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ **c)** $y = sen\ x + cos\ x$ **para** $0 \le x \le 2\pi$

a) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = senh\, x$. Esta función se denomina seno hiperbólico de x.

- $f'(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

  $f'(x) = 0 \;\rightarrow\; e^x + e^{-x} = 0 \;\rightarrow\;$ no tiene solución $\rightarrow$

  $\rightarrow$ no hay máximos ni mínimos

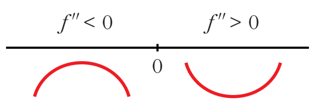
  $f'(x) > 0$ para todo $x \;\rightarrow\; f(x)$ es creciente

- $f''(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

  $f''(x) = 0 \;\rightarrow\; e^x - e^{-x} = 0 \;\rightarrow\; e^x - \dfrac{1}{e^x} = 0 \;\rightarrow\; e^{2x} - 1 = 0$

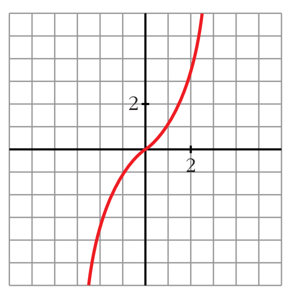
  $e^{2x} = 1 \;\rightarrow\; 2x = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; y = 0$

  Signo de $f''(x)$:



Hay un punto de inflexión en $(0, 0)$.

- **Gráfica:**

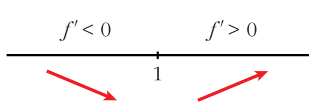


b) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = cosh\, x$. Esta función se denomina coseno hiperbólico de x.

- $f'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

  $f'(x) = 0 \;\rightarrow\; e^x - e^{-x} = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; y = 1$

  Signo de $f'(x)$:

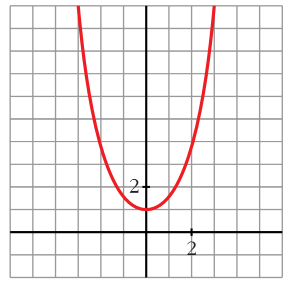


Hay un mínimo en $(0, 1)$.

- $f''(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

  $f''(x) = 0 \;\rightarrow\;$ no tiene solución $\;\rightarrow\;$ no hay puntos de inflexión

• **Gráfica:**

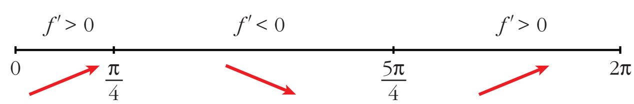


c) $y = sen\ x + cos\ x$ para $0 \le x \le 2\pi$

• $f'(x) = cos\ x - sen\ x$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; cos\ x = sen\ x \;\rightarrow\; tg\ x = 1 \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} \\ x = \dfrac{5\pi}{4} \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:

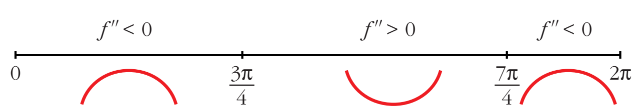


Hay un máximo en $\left(\dfrac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$ y un mínimo en $\left(\dfrac{5\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)$.

• $f''(x) = -sen\ x - cos\ x$

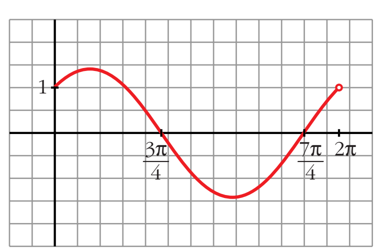
$$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; sen\ x = -cos\ x \;\rightarrow\; tg\ x = -1 \begin{cases} x = \dfrac{3\pi}{4} \\ x = \dfrac{7\pi}{4} \end{cases}$$

Signo de $f''(x)$:



Hay un punto de inflexión en $\left(\dfrac{3\pi}{4}, 0\right)$ y otro en $\left(\dfrac{7\pi}{4}, 0\right)$.

• **Gráfica:**



20 **Representa las siguientes funciones:**

a) $y = \dfrac{x}{e^x}$ b) $y = \dfrac{\ln x}{x}$ c) $y = x \ln x$

d) $y = (x - 1)e^x$ e) $y = xe^{x+1}$ f) $y = x^2 e^{-x}$

g) $y = \dfrac{x^2}{\ln x}$ h) $y = \ln(x^2 - 1)$

a) $y = \dfrac{x}{e^x}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \quad \to \quad \text{Rama parabólica}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

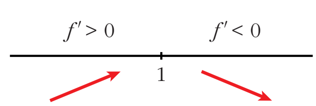
$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ $(f(x) > 0)$.

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(1 - x)}{e^{2x}} = \frac{1 - x}{e^x}$$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad 1 - x = 0 \quad \to \quad x = 1$

Signo de $f'(x)$

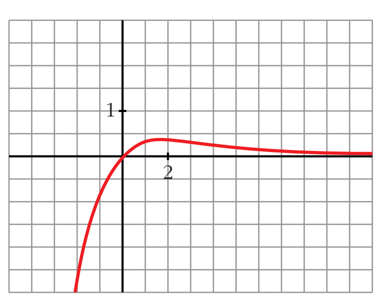


$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 1)$

es decreciente en $(1, +\infty)$

tiene un máximo en $\left(1, \dfrac{1}{e}\right)$

- Corta a los ejes en el punto $(0, 0)$.
- **Gráfica:**



b) $y = \dfrac{\ln x}{x}$

- **Dominio:** $(0, +\infty)$

- **Asíntotas:**

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \quad \to \quad x = 0 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1/x}{x} = 0$$

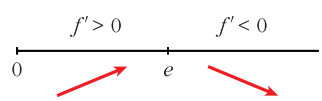
$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ $(f(x) > 0)$.

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{(1/x) \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad \ln x = 1 \quad \to \quad x = e$$

Signo de $f'(x)$:



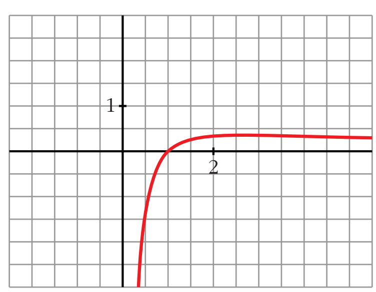
$f(x)$ es creciente en $(0, e)$

es decreciente en $(e, +\infty)$

tiene un máximo en $\left(e, \dfrac{1}{e}\right)$

- Corta al eje X en $(1, 0)$.

- **Gráfica:**



c) $y = x \ln x$

- **Dominio:** $(0, +\infty)$

- **Asíntotas:**

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0$$

No tiene asíntotas verticales.

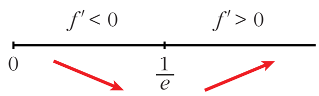
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \quad \to \quad \text{Rama parabólica}$$

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad \ln x = -1 \quad \to \quad x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Signo de $f'(x)$:



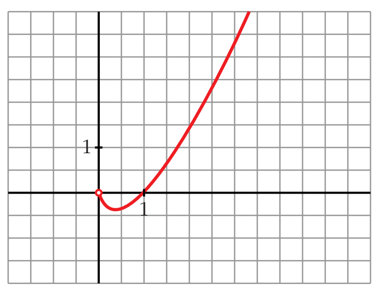
$f(x)$ es decreciente en $\left(0, \frac{1}{e}\right)$

es creciente en $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$

tiene un mínimo en $\left(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}\right)$

• Corta al eje X en $(1, 0)$.

• **Gráfica:**



d) $y = (x - 1)e^x$

• **Dominio:** $\mathbb{R}$

• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (-x - 1)e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x - 1}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{e^x} = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$ $(f(x) < 0)$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \quad \to \quad \text{Rama parabólica}$$

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = e^x + (x - 1)e^x = e^x(1 + x - 1) = xe^x$$

$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0$

Signo de $f'(x)$:

$$\begin{array}{ccc} f' < 0 & & f' > 0 \\ \hline \searrow & 0 & \nearrow \end{array}$$

$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0)$

es creciente en $(0, +\infty)$

tiene un mínimo en $(0, -1)$

- Corta al eje X en $(1, 0)$.
- **Gráfica:**

e) $y = xe^{x+1}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \quad \rightarrow \quad y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$.

$(f(x) < 0$ si $x \to -\infty)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty \quad \rightarrow$ Rama parabólica

- **Puntos singulares:**

$f'(x) = e^{x+1} + xe^{x+1} = (1 + x)e^{x+1}$

$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x = -1$

Signo de $f'(x)$:

$$\begin{array}{ccc} f' < 0 & & f' > 0 \\ \hline \searrow & -1 & \nearrow \end{array}$$

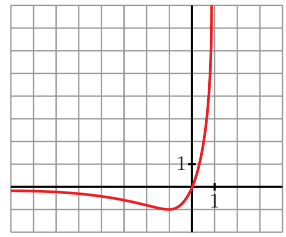
$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -1)$

es creciente en $(-1, +\infty)$

tiene un mínimo en $(-1, -1)$.

- Corta a los ejes en el punto $(0, 0)$.

- **Gráfica:**



f) $y = x^2 e^{-x}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$

- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty \quad \to \quad \text{Rama parabólica}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

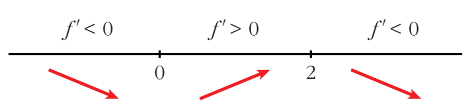
$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ $(f(x) > 0)$.

- **Puntos singulares:** $y = \dfrac{x^2}{e^x}$

$$f'(x) = \frac{2xe^x - x^2 e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x (2x - x^2)}{e^{2x}} = \frac{2x - x^2}{e^x}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad 2x - x^2 = 0 \quad \to \quad x(2 - x) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



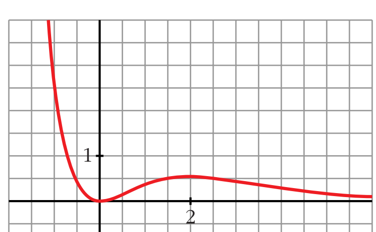
$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

es creciente en $(0, 2)$

tiene un mínimo en $(0, 0)$

tiene un máximo en $\left(2, \dfrac{4}{e^2}\right)$

- **Gráfica:**



g) $y = \dfrac{x^2}{ln\, x}$

- **Dominio:**

$ln\, x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 1$. Además, ha de ser $x > 0$.

Dominio: $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

- **Asíntotas:**

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

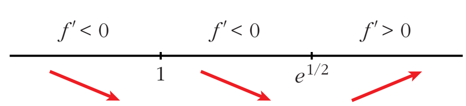
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \quad \rightarrow \quad \text{Rama parabólica}$$

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x\, ln\, x - x^2 \cdot \dfrac{1}{x}}{(ln\, x)^2} = \frac{2x\, ln\, x - x}{(ln\, x)^2} = \frac{x(2ln\, x - 1)}{(ln\, x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x(2ln\, x - 1) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \quad \text{(no vale)} \\ ln\, x = \dfrac{1}{2} \quad \rightarrow \quad x = e^{1/2} \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:

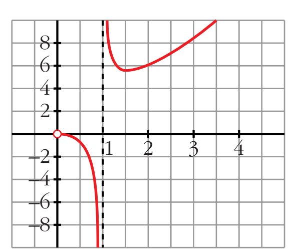


$f(x)$ es decreciente en $(0, 1) \cup (1, e^{1/2})$

es creciente en $(e^{1/2}, +\infty)$

tiene un mínimo en $(e^{1/2}, 2e)$.

- **Gráfica:**



h) $y = ln(x^2 - 1)$

- **Dominio:** $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

- **Asíntotas:**

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty \quad \to \quad x = -1 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty \quad \to \quad x = 1 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \end{array}\right\} \text{Ramas parabólicas}$$

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad 2x = 0 \quad \to \quad x = 0$

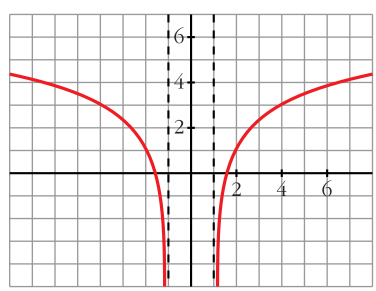
No hay puntos singulares ($x = 0$ no pertenece al dominio).

- **Puntos de corte con el eje *X*:**

$$ln(x^2 - 1) = 0 \quad \to \quad x^2 - 1 = 1 \quad \to \quad x^2 = 2 \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{cases}$$

Puntos: $\left(-\sqrt{2}, 0\right)$ y $\left(\sqrt{2}, 0\right)$

- **Gráfica:**



21 **Estudia y representa las siguientes funciones:**

a) $\boldsymbol{y = \sqrt{4 - x^2}}$ **b)** $\boldsymbol{y = \sqrt{x^2 - 4}}$ **c)** $\boldsymbol{y = \sqrt[3]{x^2}}$ **d)** $\boldsymbol{y = \sqrt[3]{1 - x^2}}$

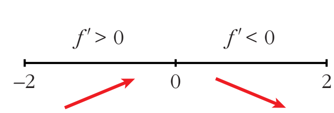
a) $y = \sqrt{4 - x^2}$

- **Dominio:** $[-2, 2]$
- **Asíntotas:** No tiene.
- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

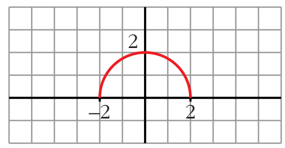
$f'(x) = 0 \quad \to \quad x = 0$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en el intervalo $(-2, 0)$ y decreciente en el intervalo $(0, 2)$. Tiene un máximo en $(0, 2)$.

- Corta al eje X en $(-2, 0)$ y en $(2, 0)$.
- **Gráfica:**



b) $y = \sqrt{x^2 - 4}$

- **Dominio:** $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$
- **Simetría:**

$f(-x) = f(x) \;\to\;$ Es par $\;\to\;$ Simétrica respecto al eje Y.

- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2 - 4} - x\right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 - 4} - x\right)\left(\sqrt{x^2 - 4} + x\right)}{\sqrt{x^2 - 4} + x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 4 - x^2}{\sqrt{x^2 - 4} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-4}{\sqrt{x^2 - 4} + x} = 0$$

$y = x$ es asíntota oblícua cuando $x \to +\infty$. $(f(x) < x)$

Por simetría (pues $f(x)$ es par), deducimos que:

$y = -x$ es asíntota oblícua cuando $x \to -\infty$.

$(f(x) < -x)$

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

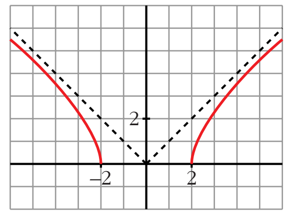
$f'(x) = 0 \;\to\; x = 0$ (que no está en el dominio)

No tiene puntos singulares.

$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -2)$ y es creciente en $(2, +\infty)$.

• Pasa por $(-2, 0)$ y $(2, 0)$.

• **Gráfica:**



c) $y = \sqrt[3]{x^2} = x^{2/3}$

• **Dominio:** $\mathbb{R}$

• **Simetría:**

$f(-x) = \sqrt[3]{x^2} = f(x)$. Es par: simétrica respecto al eje Y.

• No tiene asíntotas.

• **Ramas infinitas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \end{array}\right\} \text{ Ramas parabólicas}$$

• **Puntos singulares:**

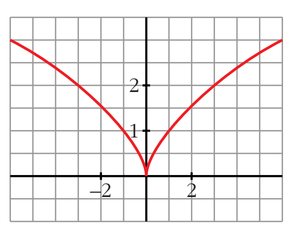
$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

No existe $f'(0)$ $\to$ $f(x)$ no es derivable en $x = 0$.

$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, +\infty)$.

• Pasa por $(0, 0)$.

• **Gráfica:**



d) $y = \sqrt[3]{1 - x^2}$

• **Dominio:** $\mathbb{R}$

• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

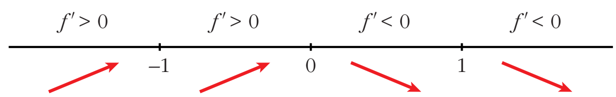
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \end{array}\right\} \text{ Ramas parabólicas}$$

- **Puntos singulares:**

$f'(x) = \dfrac{-2x}{3\sqrt[3]{(1 - x^2)^2}} \quad \to \quad f(x)$ no es derivable en $x = -1$ ni en $x = 1$.

$f'(x) = 0 \quad \to \quad -2x = 0 \quad \to \quad x = 0$

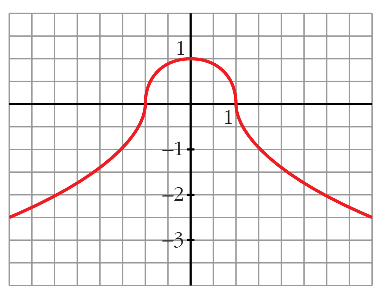
Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0)$, es decreciente en $(0, +\infty)$; tiene un máximo en $(0, 1)$.

- Corta al eje X en $(-1, 0)$ y en $(1, 0)$.

- **Gráfica:**

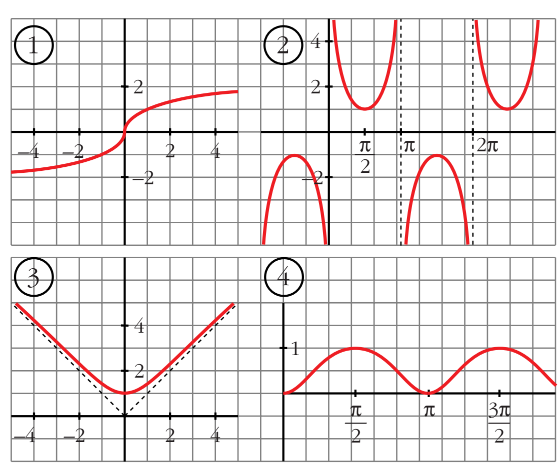


22 **Estudia el dominio de definición, las asíntotas y los extremos de cada una de las siguientes funciones y, con esa información, trata de encontrar su gráfica entre las que están representadas a continuación:**

a) $y = \dfrac{1}{sen\ x}$

b) $y = x\,e^x$

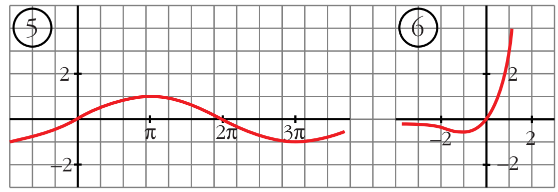
c) $y = sen\ \dfrac{x}{2}$



d) $y = \sqrt[3]{x}$

e) $y = \sqrt{x^2 + 1}$

f) $y = sen^2\, x$



a) $y = \dfrac{1}{sen\, x}$

- **Dominio:**

  $sen\, x = 0 \quad \to \quad x = 0 + \pi k; \quad k \in \mathbb{Z}$

  $D = \mathbb{R} - \{\pi k\}, \quad k \in \mathbb{Z}$

- **Asíntotas:**

  $x = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$ son asíntotas verticales.

  No hay más asíntotas.

- **Extremos:**

  $f'(x) = \dfrac{-\cos x}{sen^2\, x}$

  $f'(x) = 0 \quad \to \quad \cos x = 0 \quad \begin{cases} x = \pi/2 + 2\pi k \\ x = 3\pi/2 + 2\pi k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$

  Signo de $f'(x)$ en $(0, 2\pi)$:

	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
		$f' < 0$		$f' > 0$		$f' > 0$		$f' < 0$	
		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

  $f(x)$ es periódica de periodo 2π.

  $f(x)$ es decreciente en $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$

  es creciente en $\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right)$

  tiene un mínimo en $\left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$

  tiene un máximo en $\left(\dfrac{3\pi}{2}, -1\right)$

- **Gráfica** $\to$ 2

b) $y = xe^x$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$

- **Asíntotas:**

  No tiene asíntotas verticales.

  $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} -xe^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{e^x} = 0$$

  $y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$ $(f(x) < 0)$.

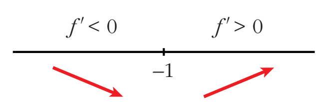
  $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \quad \to \quad \text{Rama parabólica}$$

- **Extremos:**

  $f'(x) = e^x + xe^x = e^x(1 + x)$

  $f'(x) = 0 \quad \to \quad 1 + x = 0 \quad \to \quad x = -1$

  Signo de $f'(x)$:



  $f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -1)$

  es creciente en $(-1, +\infty)$

  tiene un mínimo en $\left(-1, \frac{-1}{e}\right)$

- **Gráfica** $\to$ 6

c) $y = sen\ \frac{x}{2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$

- **Asíntotas:** No tiene.

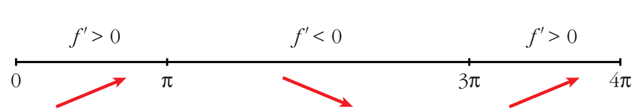
- **Extremos:**

  $f'(x) = \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}$

  $f'(x) = 0 \quad \to \quad \cos \frac{x}{2} = 0 \quad \to \quad \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad \to \quad x = \pi + 2\pi k$

  $f(x)$ es periódica de periodo 4π.

  Signo de $f'(x)$:



  $f(x)$ es creciente en $(0, \pi) \cup (3\pi, 4\pi)$

  es decreciente en $(\pi, 3\pi)$

  tiene un máximo en $(\pi, 1)$

  tiene un mínimo en $(3\pi, -1)$

• **Gráfica** $\rightarrow$ 5

d) $y = \sqrt[3]{x}$

• **Dominio:** $\mathbb{R}$

• **Asíntotas:** No tiene.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \end{array}\right\} \text{ Ramas parabólicas}$$

• **Extremos:**

$f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \rightarrow f(x)$ no es derivable en $x = 0$

$f'(x) > 0$ para todo $x \neq 0$.

$f(x)$ es creciente.

• **Gráfica** $\rightarrow$ 1

e) $y = \sqrt{x^2 + 1}$

• **Dominio:** $\mathbb{R}$

• **Simetría:**

$f(-x) = f(x) \rightarrow f(x)$ es par: simétrica respecto al eje Y.

• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} [\sqrt{x^2 + 1} - x] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0$$

$y = x$ es asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$ $(f(x) > x)$.

Por simetría:

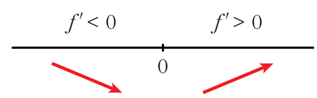
$y = -x$ es asíntota oblicua cuando $x \to -\infty$ $(f(x) > -x)$.

- **Extremos:**

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad x = 0$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0)$

es creciente en $(0, +\infty)$

tiene un mínimo en $(0, 1)$

- **Gráfica** $\to$ 3

f) $y = sen^2\, x$

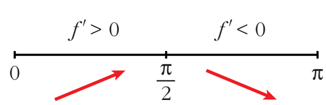
- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Asíntotas:** No tiene.
- **Extremos:**

$f'(x) = 2sen\, x\, cos\, x = sen\, 2x$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad sen\, 2x = 0 \quad \to \quad 2x = 0 + \pi k \quad \to \quad x = \dfrac{\pi}{2}\, k, \quad k \in \mathbb{Z}$

$f(x)$ es periódica de periodo π.

Signo de $f'(x)$ en $(0, \pi)$:



$f(x)$ es creciente en $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

es decreciente en $\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$

tiene un máximo en $\left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$

tiene un mínimo en $(0, 0)$ y otro en $(\pi, 0)$

- **Gráfica** $\to$ 4

23 **S** **La recta $y = 2x + 6$ es una asíntota oblicua de la función $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x-k}$. Halla el valor de k y representa la función.**

- **Hallamos k:**

Si $y = 2x + 6$ es asíntota oblicua, tenemos que:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2; \quad \lim_{x \to +\infty} [f(x) - 2x] = 6$$

Por tanto:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2+1}{x^2-kx} = 2$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{2x^2+1}{x-k} - 2x\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2+1-2x^2+2kx}{x-k} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2kx+1}{x-k} = 2k = 6 \;\rightarrow\; k = 3$$

Luego: $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x-3}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{3\}$

- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \; x = 3 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = 2x + 6$ es asíntota oblicua.

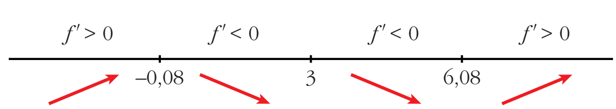
(Si $x \to -\infty$, $f(x) < 2x + 6$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 2x + 6$)

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{4x(x-3) - (2x^2+1)}{(x-3)^2} = \frac{4x^2 - 12x - 2x^2 - 1}{(x-3)^2} = \frac{2x^2 - 12x - 1}{(x-3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 2x^2 - 12x - 1 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{12 \pm \sqrt{144+8}}{4} \;\begin{cases} x = 6{,}08 \\ x = -0{,}08 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



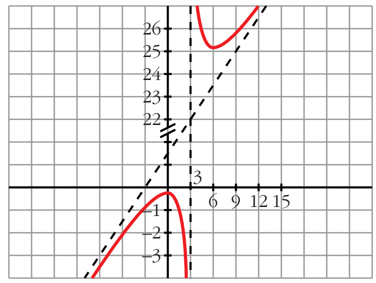
$f(x)$ es creciente en $(-\infty; -0{,}08) \cup (6{,}08; +\infty)$

es decreciente en $(-0{,}08; 3) \cup (3; 6{,}08)$

tiene un máximo en $(-0{,}08; -0{,}33)$

tiene un mínimo en $(6{,}08; 24{,}32)$

• **Gráfica:**



24 **S** **Una partícula se mueve a lo largo de la gráfica de la curva $y = \dfrac{2x}{1 - x^2}$ para $x > 1$.**

En el punto $P\left(2, -\dfrac{4}{3}\right)$ la deja y se desplaza a lo largo de la recta tangente a dicha curva.

a) Halla la ecuación de la tangente.

b) Si se desplaza de derecha a izquierda, halla el punto en el que la partícula encuentra a la asíntota vertical más próxima al punto P.

c) Si el desplazamiento es de izquierda a derecha, halla el punto en el que la partícula encuentra el eje OX.

a) $f'(x) = \dfrac{2(1 - x^2) - 2x(-2x)}{(1 - x^2)^2} = \dfrac{2 - 2x^2 + 4x^2}{(1 - x^2)^2} = \dfrac{2x^2 + 2}{(1 - x^2)^2}$

$f'(2) = \dfrac{10}{9}$

La ecuación de la recta tangente en P es:

$y = -\dfrac{4}{3} + \dfrac{10}{9}(x - 2) \;\rightarrow\; y = \dfrac{10}{9}x - \dfrac{32}{9}$

b) La asíntota vertical más próxima a P es $x = 1$. Tenemos que hallar el punto de intersección de $x = 1$ con la recta tangente anterior:

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{10}{9}x - \dfrac{32}{9} \\ x = 1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y = \dfrac{-22}{9} \\ x = 1 \end{array}\right\} \text{ El punto es } \left(1, \dfrac{-22}{9}\right)$$

c) Tenemos que hallar el punto en el que la recta anterior corta al eje OX:

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{10}{9}x - \dfrac{32}{9} \\ y = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \dfrac{10}{9}x = \dfrac{32}{9} \;\rightarrow\; x = \dfrac{32}{10} = \dfrac{16}{5} \\ y = 0 \end{array}\right\} \text{ El punto es } \left(\dfrac{16}{5}, 0\right)$$

25 Dada la función $f(x) = x^2\,|x-3|$ halla:

S

a) Los puntos en los que f no es derivable.

b) Calcula sus máximos y mínimos.

c) Represéntala gráficamente.

a) $f(x) = \left\{\begin{array}{ll} -x^2(-x+3) & \text{si } x < 3 \\ x^2(x-3) & \text{si } x \geq 3 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{ll} -x^3+3x^2 & \text{si } x < 3 \\ x^3-3x^2 & \text{si } x \geq 3 \end{array}\right.$

– **Si $x \pm 3$, tenemos que:** $f(x)$ es derivable. Su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} -3x^2+6x & \text{si } x < 3 \\ 3x^2-6x & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} f'(3^-) = -9 \\ f'(3^+) = 9 \end{array}\right\} \begin{array}{l} f'(3^-) \neq f'(3^+) \\ f(x) \text{ no es derivable en } x = 3 \ \big(\text{Punto } (3, 0)\big). \end{array}$$

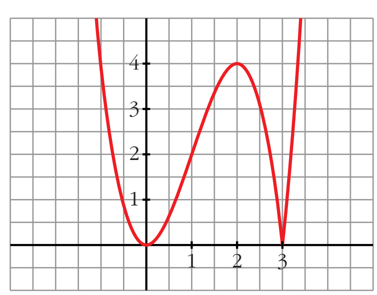
b) $f'(x) = 0 \ \rightarrow \left\{\begin{array}{l} -3x^2+6x = 0 \ \text{ si } x < 3 \\ 3x(-x+2) = 0 \begin{array}{l} x = 0 \ \rightarrow \ (0, 0) \\ x = 2 \ \rightarrow \ (2, 4) \end{array} \\ 3x^2-6x = 0 \ \text{ si } x > 3 \ \rightarrow \ \text{ninguno} \end{array}\right.$

Como $f(x) \geq 0$ para todo x, tenemos que:

$f(x)$ tiene un mínimo en $(0, 0)$ y otro en $(3, 0)$, y tiene un máximo en $(2, 4)$.

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Uniendo todo lo anterior, llegamos a la gráfica:



Página 207

26 **Halla los puntos de corte, los máximos y mínimos, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los puntos de inflexión de las siguientes funciones definidas en el intervalo $[0, 2\pi]$.**

Utilizando la información obtenida, represéntalas gráficamente:

a) $y = 1 - 2 \cos x$ **b)** $y = 1 + 2 \text{ sen } x$

c) $y = \text{sen } x - \cos x$ **d)** $y = (\text{sen } x)^2$

a) $y = 1 - 2\cos x$

- **Dominio:** $[0, 2\pi]$ (nos la definen en este intervalo).

- **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = -1 \rightarrow$ Punto $(0, -1)$

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow 1 - 2\cos x = 0 \rightarrow \cos x = \dfrac{1}{2} \rightarrow$

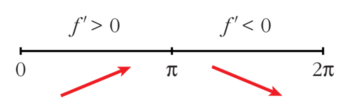
$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} \\ x = \dfrac{5\pi}{3} \end{array}\right\} \text{ Puntos } \left(\frac{\pi}{3}, 0\right) \text{ y } \left(\frac{5\pi}{3}, 0\right)$$

- **Máximos, mínimos, crecimiento y decrecimiento:**

$f'(x) = 2\,sen\,x$

$$f'(x) = 0 \rightarrow sen\,x = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pi \\ x = 2\pi \end{array}\right.$$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en el intervalo $(0, \pi)$ y es decreciente en el intervalo $(\pi, 2\pi)$.

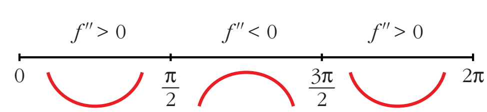
Tiene un máximo en $(\pi, 3)$, un mínimo en $(0, -1)$ y otro mínimo en $(2\pi, -1)$.

- **Puntos de inflexión:**

$f''(x) = 2\cos x$

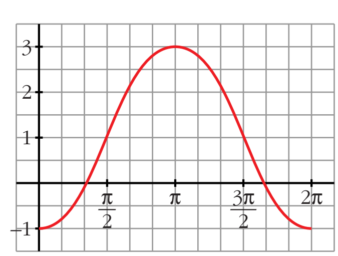
$$f''(x) = 0 \rightarrow \cos x = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{3\pi}{2} \end{array}\right.$$

Signo de $f''(x)$:



Puntos de inflexión: $\left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$ y $\left(\dfrac{3\pi}{2}, 1\right)$

- **Gráfica:**



b) $y = 1 + 2sen\ x$

- **Dominio:** $[0,\ 2\pi]$ (está solo definida en este intervalo).
- **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $Y \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; y = 1 \;\rightarrow\;$ Punto $(0,\ 1)$

— Con el eje $X \;\rightarrow\; y = 0 \;\rightarrow\; 1 + 2sen\ x = 0 \;\rightarrow\; sen\ x = -\dfrac{1}{2} \;\rightarrow$

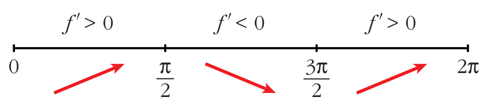
$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{7\pi}{6} \\[2ex] x = \dfrac{11\pi}{6} \end{array}\right\} \text{Puntos } \left(\frac{7\pi}{6},\ 0\right) \text{ y } \left(\frac{11\pi}{6},\ 0\right)$$

- **Máximos, mínimos, crecimiento y decrecimiento:**

$f'(x) = 2cos\ x$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; cos\ x = 0 \;\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} \\[2ex] x = \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3\pi}{2},\ 2\pi\right)$; es decreciente en $\left(\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

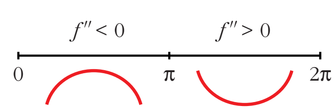
Tiene un máximo en $\left(\dfrac{\pi}{2},\ 3\right)$ y un mínimo en $\left(\dfrac{3\pi}{2},\ -1\right)$.

- **Puntos de inflexión:**

$f''(x) = -2sen\ x$

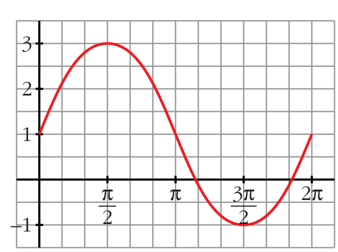
$$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; sen\ x = 0 \;\begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \\ x = 2\pi \end{cases}$$

Signo de $f''(x)$:



Puntos de inflexión en $(0,\ 1)$, $(\pi,\ 1)$ y en $(2\pi,\ 1)$.

- **Gráfica:**



c) $y = sen\, x - cos\, x$

- **Dominio:** $[0, 2\pi]$ (nos la definen en este intervalo).
- **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = -1 \rightarrow$ Punto $(0, -1)$

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow sen\, x - cos\, x = 0$

$$tg\, x = 1 \left\langle \begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} \\ x = \dfrac{5\pi}{4} \end{array} \right\} \text{ Puntos } \left(\frac{\pi}{4}, 0\right) \text{ y } \left(\frac{5\pi}{4}, 0\right)$$

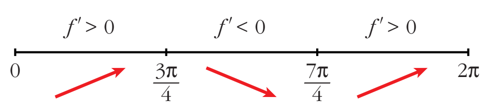
- **Máximos, mínimos, crecimiento y decrecimiento:**

$f'(x) = cos\, x + sen\, x$

$f'(x) = 0 \rightarrow cos\, x + sen\, x = 0 \rightarrow 1 + tg\, x = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow tg\, x = -1 \left\langle \begin{array}{l} x = \dfrac{3\pi}{4} \\ x = \dfrac{7\pi}{4} \end{array} \right.$$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en $\left(0, \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right)$; es decreciente en $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$.

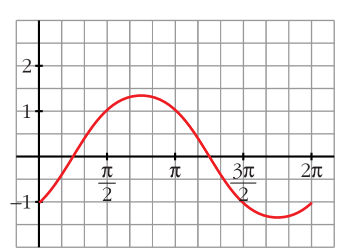
Tiene un máximo en $\left(\frac{3\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$ y un mínimo en $\left(\frac{7\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)$.

- **Puntos de inflexión:**

$f''(x) = -sen\, x + cos\, x = -(sen\, x - cos\, x) = -f(x)$

Los puntos de inflexión son los puntos de corte con el eje X.

- **Gráfica:**



d) $y = (sen\, x)^2$

- **Dominio:** $[0, 2\pi]$ (nos la definen en este intervalo).

- **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ Punto $(0, 0)$

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow sen\ x = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pi \\ x = 2\pi \end{array} \right.$

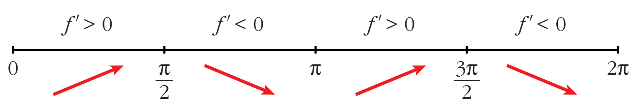
Puntos $(0, 0)$, $(\pi, 0)$ y $(2\pi, 0)$.

- **Máximos, mínimos, crecimiento y decrecimiento:**

$f'(x) = 2sen\ x\ cos\ x$

$$f'(x) = 0 \rightarrow sen\ x\ cos\ x = 0 \left\langle \begin{array}{l} sen\ x = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pi \\ x = 2\pi \end{array} \right. \\ cos\ x = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = \pi/2 \\ x = 3\pi/2 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$; es decreciente en $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$.

Tiene un máximo en $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$, otro en $\left(\frac{3\pi}{2}, 1\right)$, y tiene un mínimo en $(0, 0)$,

otro en $(\pi, 0)$ y otro en $(2\pi, 0)$.

- **Puntos de inflexión:**

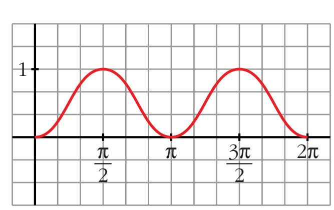
$f''(x) = 2[cos^2\ x - sen^2\ x]$

$f''(x) = 0 \rightarrow cos^2\ x - sen^2\ x = 0 \rightarrow 1 - tg^2\ x = 0 \rightarrow$

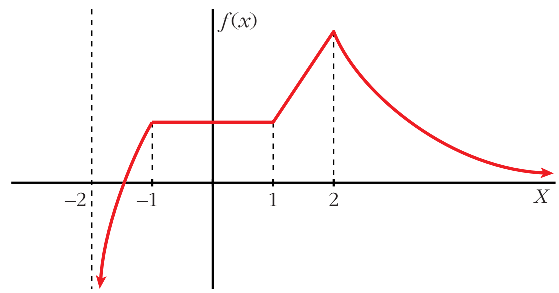
$$\rightarrow tg^2\ x = 1 \left\langle \begin{array}{l} tg\ x = -1 \left\langle \begin{array}{l} x = 3\pi/4 \\ x = 7\pi/4 \end{array} \right. \\ tg\ x = 1 \left\langle \begin{array}{l} x = \pi/4 \\ x = 5\pi/4 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Puntos de inflexión: $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{5\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$ y $\left(\frac{7\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

- **Gráfica:**



27 **S** **Dada la gráfica de la función $f(x)$, determina:**



a) Dominio de la función.

b) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

c) Intervalos donde la derivada es positiva.

d) Puntos donde no es derivable.

e) Ecuaciones de las asíntotas.

a) $(-2, +\infty)$

b) Es creciente en $(-2, -1) \cup (1, 2)$ y es decreciente en $(2, +\infty)$.

c) $f'(x) > 0$ en $(-2, -1) \cup (1, 2)$.

d) No es derivable en $x = -1$, ni en $x = 1$, ni en $x = 2$.

e) Asíntota vertical: $x = -2$

Asíntota horizontal: $y = 0$

28 **S** **Dada la función $f(x) = \dfrac{bx}{x^2 + 1}$ con $b \neq 0$, se pide:**

a) Determina las asíntotas de la función para cualquier valor del parámetro b.

b) Determina el valor del parámetro b para que la función tenga un máximo en el punto (1, 3).

a) • Dominio: $\mathbb{R}$

• No tiene asíntotas verticales.

• $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \rightarrow y = 0$ es asíntota horizontal.

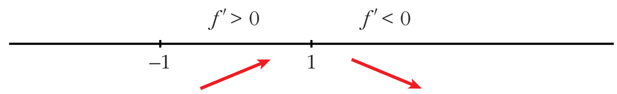
b) $f(1) = 3 \rightarrow \dfrac{b}{2} = 3 \rightarrow b = 6 \rightarrow f(x) = \dfrac{6x}{x^2 + 1}$

Comprobemos que, en efecto, hay un máximo para $x = 1$:

$$f'(x) = \frac{6(x^2 + 1) - 6x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{6x^2 + 6 - 12x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{6 - 6x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 6 - 6x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = 1 \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

Signo de $f'(x)$:



Como $f' > 0$ a la izquierda de $x = 1$, y $f' < 0$ a su derecha, en $x = 1$ hay un máximo.

29 **Comprueba que la función $f(x) = \dfrac{|x|}{x+1}$ tiene dos asíntotas horizontales distintas.**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{x+1} & \text{si } x < 0 \\[2mm] \dfrac{x}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Por tanto:

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x}{x+1} = -1 \quad \rightarrow \quad y = -1$ es asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1 \quad \rightarrow \quad y = 1$ es asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$

30 **Dada la función $f(x) = ax + b + \dfrac{8}{x}$, calcula a y b para que la gráfica de f pase por el punto (–2, –6) y tenga, en ese punto, tangente horizontal. Para ese valor de a y b, representa la función.**

$f(x) = ax + b + \dfrac{8}{x}$; $f'(x) = a - \dfrac{8}{x^2}$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \text{ Pasa por } (-2, -6) \ \rightarrow \ -2a + b - 4 = -6 \\ \bullet \text{ Tangente horizontal } \rightarrow \ f'(-2) = 0 \ \rightarrow \ a - 2 = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} -2a + b = -2 \\ a = 2 \end{array}\right\} \ a = 2; \ b = 2$$

Para estos valores, queda: $f(x) = 2x + 2 + \dfrac{8}{x}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{0\}$

- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 0 \text{ es asíntota vertical}$$

$f(x) = 2x + 2 + \frac{8}{x} \quad \rightarrow \quad y = 2x + 2$ es asíntota oblicua

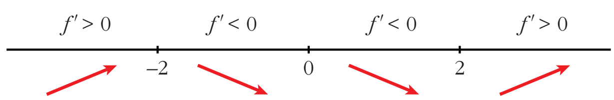
(Si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < 2x + 2$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > 2x + 2$)

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = 2 - \frac{8}{x^2} = \frac{2x^2 - 8}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 2x^2 - 8 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = 4 \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



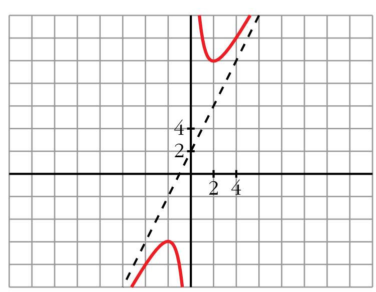
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

es decreciente en $(-2, 0) \cup (0, 2)$

tiene un máximo en $(-2, -6)$

tiene un mínimo en $(2, 10)$

• **Gráfica:**



31 **Estudia y representa $y = 1 - tg\ x$ indicando su dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y extremos, si los hubiere.**

$y = 1 - tg\ x$

• Como es una función periódica de periodo π, basta con estudiarla en el intervalo $[0, \pi]$.

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$

• **Asíntotas:**

En el intervalo $[0, \pi]$ tiene una asíntota vertical en $x = \frac{\pi}{2}$:

$$\lim_{x \to (\pi/2)^-} f(x) = -\infty; \qquad \lim_{x \to (\pi/2)^+} f(x) = +\infty$$

(De la misma forma, hay asíntotas verticales en $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$).

- **Intervalos de crecimiento y extremos:**

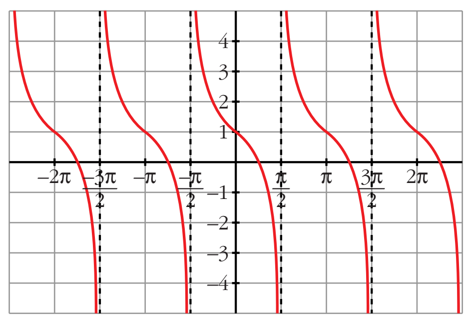
  $f'(x) = -(1 + tg^2\, x) < 0 \quad \to \quad f(x)$ es decreciente.

  No tiene máximos ni mínimos.

- Corta al eje X, en el intervalo $[0, \pi]$, en los puntos:

  $1 - tg\, x = 0 \quad \to \quad tg\, x = 1 \quad \to \quad x = \frac{\pi}{4}$

- **Gráfica:**



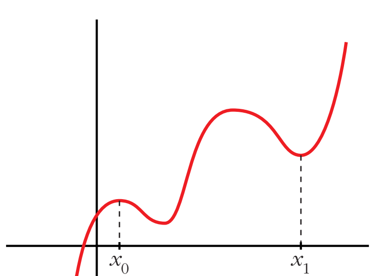
CUESTIONES TEÓRICAS

32 **¿Qué podemos decir del grado de una función polinómica que tiene dos máximos y dos mínimos relativos? En esa función, ¿puede estar uno de los mínimos más alto que el máximo?**

- Si tiene dos máximos y dos mínimos relativos, y es polinómica, su derivada tiene, al menos, cuatro raíces; es decir, $f'(x)$ será, al menos, de grado 4.

  Por tanto, $f(x)$ será, al menos, de grado 5.

- Sí, podría haber un mínimo más alto que un máximo. Por ejemplo:



El mínimo de x_1 está más alto que el máximo de x_0.

33 **¿Cuántos puntos de inflexión puede tener como máximo una función polinómica de cuarto grado?**

Si $f(x)$ es un polinomio de cuarto grado, $f'(x)$ será un polinomio de tercer grado y $f''(x)$ será un polinomio de segundo grado.

Así, $f'(x)$ tendrá, a lo sumo, dos raíces.

Por tanto, $f(x)$ tendrá, como máximo, dos puntos de inflexión.

34 **La función $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1}$ no está definida en $x = 1$ ni en $x = -1$; sin embargo, tiene solo una asíntota vertical. Justifica esta información.**

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-1} = \frac{x+1}{(x+1)(x-1)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 1 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{2}$$

En $x = -1$ hay una discontinuidad evitable, no hay una asíntota.

35 **¿Cuántas asíntotas verticales puede tener una función? ¿Y horizontales?**

- Asíntotas verticales puede tener infinitas. (Como ejemplo, podemos considerar la función $y = \dfrac{1}{sen\ x}$, cuya gráfica está representada en el ejercicio **22**, es la gráfica 2).
- Asíntotas horizontales puede tener, como máximo, dos: una cuando $x \to -\infty$ y otra cuando $x \to +\infty$.

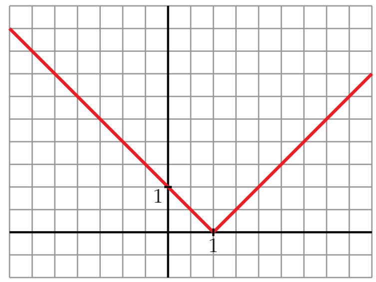
36
S **Da un ejemplo de una función que tenga un mínimo en $x = 1$ y que no sea derivable en ese punto. Represéntala.**

$$y = |x-1| = \begin{cases} -x+1 & \text{si } x < 1 \\ x-1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 0 \\ f(x) > 0 \text{ para } x \neq 1 \end{array}\right\} \to \text{ Hay un mínimo en } x = 1, \text{ en } (1, 0).$$

$f(x)$ no es derivable en $x = 1$, pues $f'(1^-) = -1 \neq f'(1^+) = 1$.

La gráfica es:



37 **S** **Da un ejemplo de una función que sea derivable en $x = 1$ con $f'(1) = 0$ y que no tenga máximo ni mínimo en ese punto.**

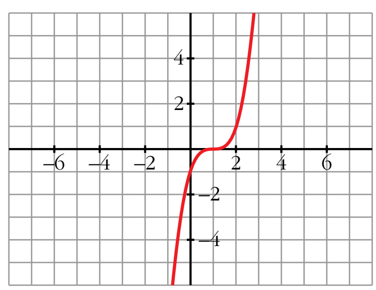
Por ejemplo, $y = (x - 1)^3$.

$f'(x) = 3(x - 1)^2 \;\rightarrow\; f'(1) = 0$

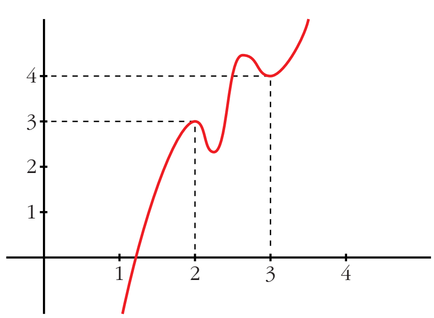
$f'(x) > 0$ para $x \neq 1 \;\rightarrow\; f(x)$ es creciente

En $x = 1$ hay un punto de inflexión.

La gráfica es:



38 **S** **Si es posible, dibuja una función continua en el intervalo [0, 4] que tenga, al menos, un máximo relativo en el punto (2, 3) y un mínimo relativo en el punto (3, 4). Si la función fuera polinómica, ¿cuál habría de ser, como mínimo, su grado?**



$f(x)$ debe tener, al menos, dos máximos y dos mínimos en [0, 4], si es derivable.

Si $f(x)$ fuera un polinomio, tendría, como mínimo, grado 5 (pues $f'(x)$ se anularía, al menos, en cuatro puntos).