

9

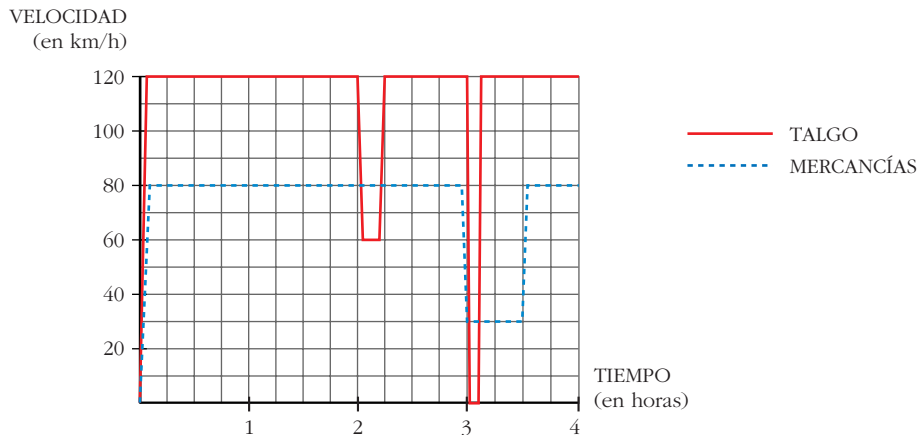
INICIACIÓN A LAS INTEGRALES

Página 208

1. Dos trenes

Un Talgo y un tren de mercancías salen de la misma estación, por la misma vía y en idéntica dirección, uno tras otro, casi simultáneamente.

Estas son las gráficas TIEMPO - VELOCIDAD de ambos movimientos.



Como podemos ver en la gráfica, el Talgo, a las dos horas, reduce su velocidad:

¿A qué puede deberse?

¿Por qué no aminora la marcha también el otro tren?

A las tres horas ambos trenes modifican su marcha: el Talgo para durante breves minutos, mientras que el de mercancías va muy despacio durante media hora.

Para hacernos una idea clara de estos movimientos, realicemos algunos cálculos:

a) El Talgo, durante 2 h, va a 120 km/h. ¿Cuántos kilómetros recorre a esa velocidad?

b) De 2 a $2\frac{1}{4}$, el Talgo disminuye su velocidad. ¿Cuántos kilómetros recorre a esa velocidad?

- c) El tren de mercancías aminora la marcha a las 3 h. ¿Qué distancia ha recorrido hasta ese momento?
- d) ¿Qué distancia recorre el tren de mercancías durante la media hora en que va a baja velocidad?
- e) ¿A qué distancia de la estación de salida está esta otra en la que para el Talgo?
- f) Observa que en todos los cálculos que has realizado hasta ahora se han obtenido áreas bajo las gráficas, roja o negra. Señala los recintos cuyas áreas has calculado y asigna a cada uno su área correspondiente.

a) $120 \cdot 2 = 240$ km.

b) A 60 km/h durante $\frac{1}{4}$ de hora, recorre $\frac{60}{4} = 15$ km.

c) Ha ido a 80 km/h durante 3 horas, luego ha recorrido $80 \cdot 3 = 240$ km.

d) Va a 30 km/h durante $\frac{1}{2}$ hora, luego recorre $30 \cdot \frac{1}{2} = 15$ km.

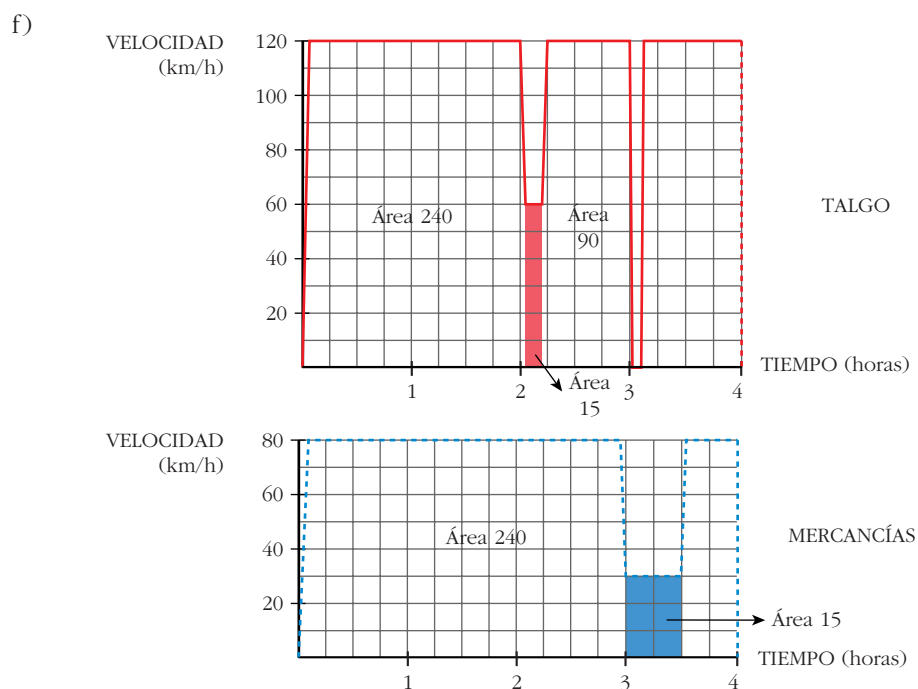
e) La parada la hace a las 3 horas; en este momento lleva recorrida una distancia de:

$$120 \cdot 2 = 240 \text{ km en las dos primeras horas}$$

$$60 \cdot \frac{1}{4} = 15 \text{ km el siguiente cuarto de hora}$$

$$120 \cdot \frac{3}{4} = 90 \text{ km los siguientes tres cuartos de hora}$$

$$\text{Total: } 240 + 15 + 90 = 345 \text{ km hasta llegar a la parada.}$$



Página 209

¿Cuál es la función cuya derivada es...?

La función cuya derivada es $2x$ es ... x^2

La función cuya derivada es $\cos x$ es ... $\sin x$

La función cuya derivada es $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ es ... \sqrt{x}

- | | | | | |
|-------------|----------------|------------------|------------------|--------------|
| a) $2x$ | b) x | c) $5x$ | d) $3x^2$ | e) x^2 |
| f) $5x^2$ | g) $4x^3$ | h) x^3 | i) $2x^3$ | j) 1 |
| k) 4 | l) $\sqrt{2}$ | m) $3x^2 + 4x^3$ | n) $5x^2 + 7x^3$ | ñ) $-\sin x$ |
| o) $\sin x$ | p) $5\sin x$ | q) $\cos x$ | r) e^x | s) $3e^x$ |
| t) e^{-x} | u) $2^x \ln 2$ | v) $2x$ | w) $5 \cdot 2x$ | |

- | | | | | |
|-------------|--------------------|-----------------|------------------------------|--------------|
| a) 2 | b) 1 | c) 5 | d) $6x$ | e) $2x$ |
| f) $10x$ | g) $12x^2$ | h) $3x^2$ | i) $6x^2$ | j) 0 |
| k) 0 | l) 0 | m) $6x + 12x^2$ | n) $10x + 21x^2$ | ñ) $-\cos x$ |
| o) $\cos x$ | p) $5\cos x$ | q) $-\sin x$ | r) e^x | s) $3e^x$ |
| t) e^{-x} | u) $2^x (\ln 2)^2$ | v) $2^x \ln 2$ | w) $5 \cdot 2^x \cdot \ln 2$ | |

Página 211

1. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int 7x^4$

b) $\int \frac{1}{x^2}$

c) $\int \sqrt{x}$

d) $\int \sqrt[3]{5x^2}$

e) $\int \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{5x^3}}{3x}$

f) $\int \frac{\sqrt{5x^3}}{\sqrt[3]{x}}$

a) $\int 7x^4 = 7 \frac{x^5}{5} + k = \frac{7x^5}{5} + k$

b) $\int \frac{1}{x^2} = \int x^{-2} = \frac{x^{-1}}{-1} + k = \frac{-1}{x} + k$

c) $\int \sqrt{x} = \int x^{1/2} = \frac{x^{3/2}}{3/2} + k = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + k$

d) $\int \sqrt[3]{5x^2} = \int \sqrt[3]{5} x^{2/3} = \sqrt[3]{5} \frac{x^{5/3}}{5/3} + k = \frac{3\sqrt[3]{5x^5}}{5} + k$

$$\begin{aligned}
 \text{e) } \int \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{5x^3}}{3x} &= \int \frac{x^{1/3}}{3x} + \int \frac{\sqrt{5}x^{3/2}}{3x} = \frac{1}{3} \int x^{-2/3} + \frac{\sqrt{5}}{3} \int x^{1/2} = \\
 &= \frac{1}{3} \frac{x^{1/3}}{1/3} + \frac{\sqrt{5}}{3} \frac{x^{3/2}}{3/2} + k = \sqrt[3]{x} + \frac{2\sqrt{5}x^{3/2}}{9} + k
 \end{aligned}$$

$$\text{f) } \int \frac{\sqrt{5x^3}}{\sqrt[3]{3x}} = \int \frac{\sqrt{5} \cdot x^{3/2}}{\sqrt[3]{3} \cdot x^{1/3}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{3}} \int x^{7/6} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{3}} \frac{x^{13/6}}{13/6} + k = \frac{6\sqrt{5}\sqrt[6]{x^{13}}}{13\sqrt[3]{3}} + k$$

2. Calcula:

$$\text{a) } \int \frac{x^4 - 5x^2 + 3x - 4}{x} \qquad \text{b) } \int (5 \cos x + 3^x)$$

$$\text{c) } \int \frac{7x^4 - 5x^2 + 3x - 4}{x^2} \qquad \text{d) } \int (10^x - 5^x)$$

$$\text{a) } \int \frac{x^4 - 5x^2 + 3x - 4}{x} = \int \left(x^3 - 5x + 3 - \frac{4}{x} \right) = \frac{x^4}{4} - \frac{5x^2}{2} + 3x - 4 \ln |x| + k$$

$$\text{b) } \int (5 \cos x + 3^x) = \int 5 \cos x + \int 3^x = 5 \operatorname{sen} x + \frac{3^x}{\ln 3} + k$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \int \frac{7x^4 - 5x^2 + 3x - 4}{x^2} &= \int \left(\frac{7x^4}{x^2} \right) - \int \left(\frac{5x^2}{x^2} \right) + \int \left(\frac{3x}{x^2} \right) - \int \left(\frac{4}{x^2} \right) = \\
 &= \int 7x^2 - \int 5 + \int \frac{3}{x} - \int \frac{4}{x^2} = \\
 &= \frac{7x^3}{3} - 5x + 3 \ln |x| + \frac{4}{x} + k
 \end{aligned}$$

$$\text{d) } \int (10^x - 5^x) = \int 10^x - \int 5^x = \frac{10^x}{\ln 10} - \frac{5^x}{\ln 5} + k$$

Página 213

3. Halla las primitivas de estas funciones:

$$\text{a) } f(x) = (x^3 - 5x + 3)^2 (3x^2 - 5) \qquad \text{b) } f(x) = (5x + 1)^3$$

$$\text{c) } f(x) = \frac{3x^2 - 3}{x^3 - 3x} \qquad \text{d) } f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 - 3x}$$

$$\text{e) } f(x) = \cos x \operatorname{sen}^3 x$$

$$\text{a) } \int (x^3 - 5x + 3)^2 (3x^2 - 5) = \frac{(x^3 - 5x + 3)^3}{3} + k$$

$$b) \int (5x + 1)^3 = \frac{1}{5} \cdot \frac{(5x + 1)^4}{4} + k = \frac{(5x + 1)^4}{20} + k$$

$$c) \int \frac{3x^2 - 3}{x^3 - 3x} = \ln |x^3 - 3x| + k$$

$$d) \int \frac{x^2 - 1}{x^3 - 3x} = \frac{1}{3} \ln |x^3 - 3x| + k$$

$$e) \int \cos x \operatorname{sen}^3 x = \frac{\operatorname{sen}^4 x}{4} + k$$

4. Busca las primitivas de:

$$a) f(x) = x 2^{x^2} \ln 2$$

$$b) f(x) = x 2^{x^2}$$

$$c) f(x) = 2^{3x-5}$$

$$d) f(x) = \operatorname{sen} 3x$$

$$e) f(x) = \operatorname{sen}(x^3 - 4x^2)(3x^2 - 8x)$$

$$f) f(x) = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

$$a) \int x 2^{x^2} \ln 2 = \frac{1}{2} \cdot 2^{x^2} + k = \frac{2^{x^2}}{2} + k$$

$$b) \int x 2^{x^2} = \frac{1}{2 \ln 2} \cdot 2^{x^2} + k = \frac{2^{x^2}}{2 \ln 2} + k$$

$$c) \int 2^{3x-5} = \frac{1}{3 \ln 2} \cdot 2^{3x-5} + k = \frac{2^{3x-5}}{3 \ln 2} + k$$

$$d) \int \operatorname{sen} 3x = -\frac{1}{3} \cos 3x + k$$

$$e) \int \operatorname{sen}(x^3 - 4x^2)(3x^2 - 8x) = -\cos(x^3 - 4x^2) + k$$

$$f) \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \ln |\operatorname{sen} x| + k$$

Página 217

1. Halla e interpreta estas integrales:

$$a) \int_0^{4\pi} \operatorname{sen} x$$

$$b) \int_{-2}^2 (x^2 - 4)$$

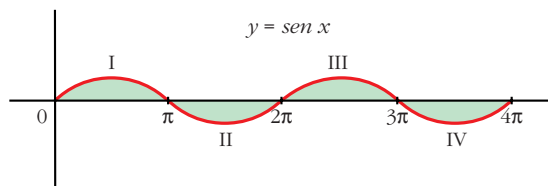
$$a) G(x) = \int \operatorname{sen} x = -\cos x$$

$$G(4\pi) = -1; G(0) = -1$$

$$G(4\pi) = -1; \quad G(0) = -1$$

$$\int_0^{4\pi} \text{sen } x = -1 - (-1) = -1 + 1 = 0$$

Interpretación geométrica:



La parte positiva y la parte negativa son iguales; por eso da de resultado 0:

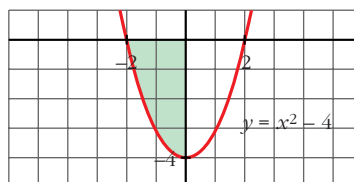
$$\text{Área de I} - \text{Área de II} + \text{Área de III} - \text{Área de IV} = 0$$

$$\text{b) } G(x) = \int (x^2 - 4) = \frac{x^3}{3} - 4x$$

$$G(2) = -\frac{16}{3}; \quad G(-2) = \frac{16}{3}$$

$$\int_{-2}^2 (x^2 - 4) = -\frac{16}{3} - \frac{16}{3} = -\frac{32}{3}$$

Interpretación geométrica:



Como queda por debajo del eje X , la integral es el área del recinto señalado con signo negativo, es decir:

$$-\text{Área del recinto} = -\frac{32}{3}$$

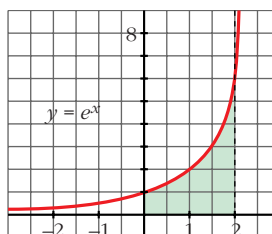
2. Halla la siguiente integral e interprétala geoméricamente: $\int_0^2 e^x$

$$G(x) = \int e^x = e^x$$

$$G(2) = e^2; \quad G(0) = 1$$

$$\int_0^2 e^x = e^2 - 1 \approx 6,39$$

Interpretación geométrica:



$$\text{Área del recinto} = e^2 - 1 \approx 6,39$$

Página 219

1. Halla el área comprendida entre la función $y = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$, el eje X y las rectas $x = 0$, $x = 5$.

- Puntos de corte con el eje X :

$$(x^2 - 1)(x^2 - 4) = 0 \rightarrow x_1 = -2, x_2 = -1, x_3 = 1, x_4 = 2$$

Solo nos sirven $x = 1$, $x = 2$ (están entre 0 y 5).

- Hay tres recintos: I [0, 1]; II [1, 2]; III [2, 5]

$$G(x) = \int (x^2 - 1)(x^2 - 4) = \int (x^4 - 5x^2 + 4) = \frac{x^5}{5} - \frac{5x^3}{3} + 4x$$

$$G(0) = 0; G(1) = \frac{38}{15}; G(2) = \frac{16}{15}; G(5) = \frac{1310}{3}$$

$$\text{Área del recinto I} = |G(1) - G(0)| = \frac{38}{15}$$

$$\text{Área del recinto II} = |G(2) - G(1)| = \left| -\frac{22}{15} \right| = \frac{22}{15}$$

$$\text{Área del recinto III} = |G(5) - G(2)| = \frac{2178}{5}$$

$$\text{Área total} = \frac{38}{15} + \frac{22}{15} + \frac{2178}{5} = \frac{2198}{5} = 439,6 \text{ u}^2$$

2. Halla el área comprendida entre la función $y = x^3 - x^2 - 2x$ y el eje X .

- Puntos de corte con el eje X :

$$x^3 - x^2 - 2x = 0 \rightarrow x(x^2 - x - 2) = 0 \rightarrow x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 2$$

- Hay dos recintos: I [-1, 0]; II [0, 2]

$$G(x) = \int (x^3 - x^2 - 2x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2$$

$$G(-1) = -\frac{5}{12}; G(0) = 0; G(2) = -\frac{8}{3}$$

$$\text{Área del recinto I} = |G(0) - G(-1)| = \frac{5}{12}$$

$$\text{Área del recinto II} = |G(2) - G(0)| = \frac{8}{3}$$

$$\text{Área total} = \frac{5}{12} + \frac{8}{3} = \frac{37}{12} \approx 3,08 \text{ u}^2$$

Página 220

1. Halla el área encerrada entre las gráficas de las funciones siguientes:

$$f(x) = x^3 - x^2 + 4, \quad g(x) = x^2 + 3x + 4$$

$$\bullet f(x) - g(x) = x^3 - x^2 + 4 - x^2 - 3x - 4 = x^3 - 2x^2 - 3x$$

$$\bullet x^3 - 2x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 2x - 3) = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 3$$

• Hay dos recintos: I $[-1, 0]$; II $[0, 3]$

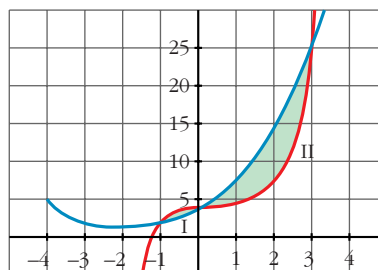
$$\bullet G(x) = \int (x^3 - 2x^2 - 3x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}$$

$$\bullet G(-1) = -\frac{7}{12}; \quad G(0) = 0; \quad G(3) = -\frac{45}{4}$$

$$\bullet \text{Recinto I: Área } [-1, 0] = |G(0) - G(-1)| = \frac{7}{12}$$

$$\text{Recinto II: Área } [0, 3] = |G(3) - G(0)| = \frac{45}{4}$$

$$\text{Área total: } \frac{7}{12} + \frac{45}{4} = \frac{71}{6} \approx 11,83 \text{ u}^2$$



Página 227

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

1 Halla una primitiva de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x + 1$

b) $f(x) = 2x - \sqrt{3}$

c) $f(x) = \frac{x}{2} + x^2$

d) $f(x) = -8x^3 + 3x^2$

e) $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$

f) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{3}{5x^4}$

g) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{x}{3}$

h) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x}}$

a) $\int (x + 1) = \frac{x^2}{2} + x$

b) $\int (2x - \sqrt{3}) = x^2 - \sqrt{3} x$

c) $\int \left(\frac{x}{2} + x^2 \right) = \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{3}$

$$d) \int (-8x^3 + 3x^2) = -2x^4 + x^3$$

$$e) \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) = \int (x^{-2} + x^{-3}) = \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}$$

$$f) \int \left(\sqrt{x} + \frac{3}{5x^4} \right) = \int \left(x^{1/2} + \frac{3}{5} x^{-4} \right) = \frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{3}{5} \cdot \frac{x^{-3}}{-3} = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} - \frac{1}{5x^3}$$

$$g) \int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{x}{3} \right) = \int \left(x^{-1/2} + \frac{1}{3} x \right) = \frac{x^{1/2}}{1/2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2}{2} = 2\sqrt{x} + \frac{x^2}{6}$$

$$h) \int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x}} = \int x^2 \cdot x^{-1/3} = \int x^{5/3} = \frac{x^{8/3}}{8/3} = \frac{3\sqrt[3]{x^8}}{8}$$

2 Calcula:

$$a) \int \sqrt{3x} \quad b) \int \sqrt[3]{5x^2} \quad c) \int \frac{x+x^2}{\sqrt{x}} \quad d) \int \frac{x^3-2}{x^2}$$

$$e) \int \frac{3}{x} \quad f) \int \frac{2}{x+1} \quad g) \int \frac{x-2}{x^2} \quad h) \int \frac{3-2x}{x}$$

$$a) \int \sqrt{3x} = \int \sqrt{3} x^{1/2} = \sqrt{3} \frac{x^{3/2}}{3/2} + k = \frac{2\sqrt{3}\sqrt{x^3}}{3} + k = \frac{2\sqrt{3x^3}}{3} + k$$

$$b) \int \sqrt[3]{5x^2} = \int \sqrt[3]{5} x^{2/3} = \sqrt[3]{5} \frac{x^{5/3}}{5/3} + k = \frac{3\sqrt[3]{5x^5}}{5} + k$$

$$c) \int \frac{x+x^2}{\sqrt{x}} = \int (x^{1/2} + x^{3/2}) = \frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^{5/2}}{5/2} + k = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + \frac{2\sqrt{x^5}}{5} + k$$

$$d) \int \frac{x^3-2}{x^2} = \int (x-2x^{-2}) = \frac{x^2}{2} - \frac{2x^{-1}}{-1} + k = \frac{x^2}{2} + \frac{2}{x} + k$$

$$e) \int \frac{2}{x} = 2 \ln |x| + k$$

$$f) \int \frac{2}{x+1} = 2 \ln |x+1| + k$$

$$g) \int \frac{x-2}{x^2} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right) = \ln |x| + \frac{2}{x} + k$$

$$h) \int \frac{3-2x}{x} = \int \left(\frac{3}{x} - 2 \right) = 3 \ln |x| - 2x + k$$

3 Resuelve:

a) $\int \operatorname{sen} 3x$

b) $\int \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$

c) $\int \frac{1}{\cos^2 5x}$

d) $\int (1 + \operatorname{tg}^2 3x)$

e) $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

f) $\int \left(1 - \operatorname{sen} \frac{x}{2} \right)$

g) $\int \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$

h) $\int \cos \frac{\pi}{2} x$

a) $\int \operatorname{sen} 3x = -\frac{1}{3} \int -3 \operatorname{sen} 3x = -\frac{1}{3} \cos 3x + k$

b) $\int \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = \operatorname{sen} \left(x + \frac{\pi}{2} \right) + k$

c) $\int \frac{1}{\cos^2 5x} = \frac{1}{5} \int 5 \cdot \frac{1}{\cos^2 5x} = \frac{1}{5} \operatorname{tg} 5x + k$

d) $\int (1 + \operatorname{tg}^2 3x) = \frac{1}{3} \int 3(1 + \operatorname{tg}^2 3x) = \frac{1}{3} \operatorname{tg} 3x + k$

e) $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \ln |\operatorname{sen} x| + k$

f) $\int \left(1 - \operatorname{sen} \frac{x}{2} \right) = x + 2 \cos \frac{x}{2} + k$

g) $\int \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + k$

h) $\int \cos \frac{\pi}{2} x = \frac{2}{\pi} \int \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} x = \frac{2}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} x + k$

4 Calcula:

a) $\int e^{x+3}$

b) $\int e^{2x-1}$

c) $\int 2^{x-7}$

d) $\int 3^{x/2}$

a) $\int e^{x+3} = e^{x+3} + k$

b) $\int e^{2x-1} = \frac{1}{2} \int 2 e^{2x-1} = \frac{1}{2} e^{2x-1} + k$

c) $\int 2^{x-7} = \frac{1}{\ln 2} \int \ln 2 \cdot 2^{x-7} = \frac{1}{\ln 2} \cdot 2^{x-7} + k = \frac{2^{x-7}}{\ln 2} + k$

$$d) \int 3^{x/2} = 2 \int \frac{1}{2} 3^{x/2} = \frac{2 \cdot 3^{x/2}}{\ln 3} + k$$

5 **Calcula:**

$$a) \int (x-3)^3$$

$$b) \int (2x+1)^5$$

$$c) \int \frac{1}{\sqrt{x+2}}$$

$$d) \int \sqrt{3x-5}$$

$$e) \int \sqrt[3]{\frac{x+3}{2}}$$

$$f) \int \frac{3}{2x-1}$$

$$g) \int \frac{2x}{x^2+2}$$

$$h) \int \frac{x}{3x^2-4}$$

$$a) \int (x-3)^3 = \frac{(x-3)^4}{4} + k$$

$$b) \int (2x+1)^5 = \frac{1}{2} \int 2(2x+1)^5 = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x+1)^6}{6} + k = \frac{(2x+1)^6}{12} + k$$

$$c) \int \frac{1}{\sqrt{x+2}} = 2 \int \frac{1}{2\sqrt{x+2}} = 2\sqrt{x+2} + k$$

$$d) \int \sqrt{3x-5} = \frac{1}{3} \int 3(3x-5)^{1/2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x-5)^{3/2}}{3/2} = \frac{2\sqrt{(3x-5)^3}}{9} + k$$

$$e) \int \sqrt[3]{\frac{x+3}{2}} = 2 \int \frac{1}{2} \left(\frac{x+3}{2}\right)^{1/3} = 2 \cdot \frac{[(x+3)/2]^{4/3}}{4/3} + k = \frac{3}{2} \left(\frac{x+3}{2}\right)^4 + k$$

$$f) \int \frac{3}{2x-1} = \frac{1}{2} \cdot 3 \int \frac{2}{2x-1} = \frac{3}{2} \ln |2x-1| + k$$

$$g) \int \frac{2x}{x^2+2} = \ln |x^2+2| + k$$

$$h) \int \frac{x}{3x^2-4} = \frac{1}{6} \int \frac{6x}{3x^2-4} = \frac{1}{6} \ln |3x^2-4| + k$$

6 **Calcula:**

$$a) \int x \sqrt{5x^2+1}$$

$$b) \int \frac{x^2}{\sqrt{x^3-3}}$$

$$c) \int \frac{2x+1}{x^2+x-3}$$

$$d) \int x e^{x^2}$$

$$e) \int \frac{5x}{3x^2+2}$$

$$f) \int \text{sen}^2 x \cos x$$

$$g) \int \frac{x^3}{x^4-4}$$

$$h) \int x \text{sen } x^2$$

$$a) \int x \sqrt{5x^2+1} = \frac{1}{10} \int 10x(5x^2+1)^{1/2} = \frac{1}{10} \cdot \frac{(5x^2+1)^{3/2}}{3/2} + k = \frac{\sqrt{(5x^2+1)^3}}{15} + k$$

$$b) \int \frac{x^2}{\sqrt{x^3-3}} = \frac{2}{3} \int \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-3}} = \frac{2}{3} \sqrt{x^3-3} + k$$

$$c) \int \frac{2x+1}{x^2+x-3} = \ln |x^2+x-3| + k$$

$$d) \int x e^{x^2} = \frac{1}{2} \int 2x e^{x^2} = \frac{1}{2} e^{x^2} + k$$

$$e) \int \frac{5x}{3x^2+2} = \frac{5}{6} \int \frac{6x}{3x^2+2} = \frac{5}{6} \ln |3x^2+2| + k$$

$$f) \int \operatorname{sen}^2 x \cos x = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + k$$

$$g) \int \frac{x^3}{x^4-4} = \frac{1}{4} \int \frac{4x^3}{x^4-4} = \frac{1}{4} \ln |x^4-4| + k$$

$$h) \int x \operatorname{sen} x^2 = -\frac{1}{2} \int -2x \operatorname{sen} x^2 = -\frac{1}{2} \cos x^2 + k$$

7 Calcula:

$$a) \int 3e^{5x}$$

$$b) \int x^2 \cdot 2^{-x^3+5}$$

$$c) \int \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$$

$$d) \int \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+2}}$$

$$e) \int \frac{\sqrt{x+5}}{x+5}$$

$$f) \int \frac{3x-2}{\sqrt{3x-2}}$$

$$a) \int 3e^{5x} = \frac{3}{5} \int 5e^{5x} = \frac{3}{5} e^{5x} + k$$

$$b) \int x^2 \cdot 2^{-x^3+5} = -\frac{1}{3} \int -3x^2 \cdot 2^{-x^3+5} = \frac{-2^{-x^3+5}}{3 \ln 2} + k$$

$$c) \int \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} = 2 \int \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} = 2 e^{\sqrt{x}} + k$$

$$d) \int \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+2}} = \frac{1}{2} \int \frac{2x-6}{\sqrt{x^2-6x+2}} = \sqrt{x^2-6x+2} + k$$

$$e) \int \frac{\sqrt{x+5}}{x+5} = \int \frac{1}{\sqrt{x+5}} = 2 \int \frac{1}{2\sqrt{x+5}} = 2\sqrt{x+5} + k$$

$$f) \int \frac{3x-2}{\sqrt{3x-2}} = \int \sqrt{3x-2} = \frac{1}{3} \int 3(3x-2)^{1/2} = \frac{1}{3} \frac{(3x-2)^{3/2}}{3/2} + k = \frac{2\sqrt{(3x-2)^3}}{9} + k$$

8 Resuelve las siguientes integrales:

a) $\int \frac{x^2 - 3x + 4}{x - 1}$

b) $\int \frac{x^2 + 5x - 7}{x + 3}$

c) $\int \frac{2x^2 - 3x + 1}{2x - 1}$

d) $\int \frac{x^2 + 3x - 1}{x^2 - 1}$

• **Divide y transforma la fracción así:** $\frac{\text{Dividendo}}{\text{divisor}} = \text{cociente} + \frac{\text{resto}}{\text{divisor}}$

a) $\int \frac{x^2 - 3x + 4}{x - 1} = \int \left(x - 2 + \frac{2}{x - 1} \right) = \frac{x^2}{2} - 2x + 2 \ln |x - 1| + k$

b) $\int \frac{x^2 + 5x - 7}{x + 3} = \int \left(x + 2 - \frac{13}{x + 3} \right) = \frac{x^2}{2} + 2x - 13 \ln |x + 3| + k$

c) $\int \frac{2x^2 - 3x + 1}{2x - 1} = \int (x - 1) = \frac{x^2}{2} - x + k$

d) $\int \frac{x^2 + 3x - 1}{x^2 - 1} = \int \left(1 + \frac{3x}{x^2 - 1} \right) = x + \frac{3}{2} \ln |x^2 - 1| + k$

9 Calcula:

a) $\int \frac{1}{x^2} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$

b) $\int \operatorname{sen} x \cos x$

c) $\int \sqrt{x} \sqrt{x}$

d) $\int \frac{1}{x^2 + 2x + 1}$

e) $\int (2x^2 + 1)^2$

f) $\int \frac{x}{\sqrt{3x^2 - 2}}$

g) $\int \frac{3x^2 + 2x - 1}{x - 2}$

h) $\int \frac{e^x}{1 + e^x}$

i) $\int \frac{2}{x} \ln x$

j) $\int \frac{1}{e^x} \cos e^{-x}$

a) $\int \frac{1}{x^2} \operatorname{sen} \frac{1}{x} = \cos \frac{1}{x} + k$

b) $\int \operatorname{sen} x \cos x = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + k$

c) $\int \sqrt{x} \sqrt{x} = \int x^{3/4} = \frac{x^{7/4}}{7/4} + k = \frac{4 \sqrt[4]{x^7}}{7} + k$

d) $\int \frac{1}{x^2 + 2x + 1} = \int \frac{1}{(x + 1)^2} = \frac{-1}{x + 1} + k$

e) $\int (2x^2 + 1)^2 = \int (4x^4 + 4x^2 + 1) = \frac{4x^5}{5} + \frac{4x^3}{3} + x + k$

$$f) \int \frac{x}{\sqrt{3x^2 - 2}} = \frac{1}{3} \int \frac{6x}{2\sqrt{3x^2 - 2}} = \frac{\sqrt{3x^2 - 2}}{3} + k$$

$$g) \int \frac{3x^2 + 2x - 1}{x - 2} = \int \left(3x + 8 + \frac{15}{x - 2} \right) = \frac{3x^2}{2} + 8x + 15 \ln |x - 2| + k$$

$$h) \int \frac{e^x}{1 + e^x} = \ln |1 + e^x| + k$$

$$i) \int \frac{2}{x} \ln x = \ln^2 x + k$$

$$j) \int \frac{1}{e^x} \cos e^{-x} = -\operatorname{sen} e^{-x} + k$$

Página 228

10 Resuelve las siguientes integrales:

$$a) \int_2^5 (-3x^2)$$

$$b) \int_{\frac{4}{3}}^6 (2x - 1)$$

$$c) \int_{-2}^2 (x^3 + x)$$

$$d) \int_1^4 \sqrt{3x}$$

$$e) \int_1^e \frac{1}{x}$$

$$f) \int_{-1}^3 e^{x-2}$$

$$g) \int_0^\pi (\operatorname{sen} x - \cos x)$$

$$h) \int_{-\pi}^\pi \operatorname{sen} 2x$$

$$a) G(x) = \int (-3x^2) = -x^3$$

$$G(5) = -125; \quad G(2) = -8$$

$$\int_2^5 (-3x^2) = G(5) - G(2) = -125 - (-8) = -117$$

$$b) G(x) = \int (2x - 1) = x^2 - x$$

$$G(6) = 30; \quad G(4) = 12$$

$$\int_4^6 (2x - 1) = G(6) - G(4) = 30 - 12 = 18$$

$$c) G(x) = \int (x^3 + x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}$$

$$G(2) = G(-2) = 6$$

$$\int_{-2}^2 (x^3 + x) = G(2) - G(-2) = 0$$

$$d) G(x) = \int \sqrt{3x} = \int \sqrt{3} x^{1/2} = \frac{\sqrt{3} x^{3/2}}{3/2} = \frac{2\sqrt{3}x^3}{3}$$

$$G(4) = \frac{16\sqrt{3}}{3}; \quad G(1) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\int_1^4 \sqrt{3x} = G(4) - G(1) = \frac{16\sqrt{3}}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{14\sqrt{3}}{3}$$

$$e) G(x) = \int \frac{1}{x} = \ln |x|$$

$$G(e) = 1; \quad G(1) = 0$$

$$\int_1^e \frac{1}{x} = G(e) - G(1) = 1$$

$$f) G(x) = \int e^{x-2} = e^{x-2}$$

$$G(3) = e; \quad G(-1) = e^{-3}$$

$$\int_{-1}^3 e^{x-2} = G(3) - G(-1) = e - e^{-3} = e - \frac{1}{e^3} = \frac{e^4 - 1}{e^3}$$

$$g) G(x) = \int (\sen x - \cos x) = -\cos x - \sen x$$

$$G(\pi) = 1; \quad G(0) = -1$$

$$\int_0^\pi (\sen x - \cos x) = G(\pi) - G(0) = 1 - (-1) = 2$$

$$h) G(x) = \int \sen 2x = -\frac{1}{2} \cos 2x$$

$$G(\pi) = -\frac{1}{2}; \quad G(-\pi) = -\frac{1}{2}$$

$$\int_{-\pi}^\pi \sen 2x = G(\pi) - G(-\pi) = 0$$

11 Halla, en cada caso, el área limitada por:

S

a) $f(x) = x^2 - 4$, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

b) $f(x) = 2x - x^2$, el eje X y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

c) $f(x) = x^2 - 2x - 3$ y el eje X .

d) $f(x) = 1 - x^2$, el eje X y las rectas $x = -2$ y $x = 2$.

e) $f(x) = e^x$, el eje X y las rectas $x = -1$ y $x = 3$.

f) $f(x) = x^2 + 1$, el eje X y las rectas $x = -1$ y $x = 3$.

a) • Puntos de corte con el eje X: $x^2 - 4 = 0 \rightarrow x_1 = -2, x_2 = 2$

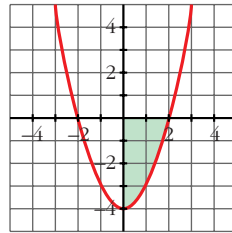
Solo nos sirve $x_2 = 2$.

• Hay un recinto: $[0, 2]$

$$\bullet G(x) = \int (x^2 - 4) = \frac{x^3}{3} - 4x$$

$$\bullet G(2) = -\frac{16}{3}; G(0) = 0$$

$$\bullet \text{Área} = |G(2) - G(0)| = \frac{16}{3} u^2$$



b) • Puntos de corte con el eje X: $2x^2 - x^2 = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2$

• Hay dos recintos: I $[-1, 0]$; II $[0, 1]$

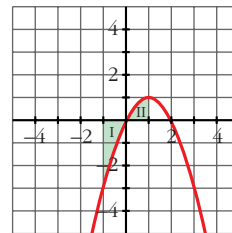
$$\bullet G(x) = \int (2x - x^2) = x^2 - \frac{x^3}{3}$$

$$\bullet G(-1) = \frac{4}{3}; G(0) = 0; G(1) = \frac{2}{3}$$

$$\bullet \text{Área del recinto I} = |G(0) - G(-1)| = \frac{4}{3}$$

$$\text{Área del recinto II} = |G(1) - G(0)| = \frac{2}{3}$$

$$\text{Área total} = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = \frac{6}{3} = 2 u^2$$



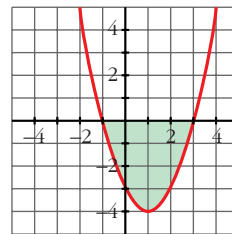
c) • Puntos de corte con el eje X: $x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow x_1 = -1, x_2 = 3$

• Hay un recinto: $[-1, 3]$

$$\bullet G(x) = \int (x^2 - 2x - 3) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$$

$$\bullet G(-1) = \frac{5}{3}; G(3) = -9$$

$$\bullet \text{Área} = |G(3) - G(-1)| = \left| -9 - \frac{5}{3} \right| = \frac{32}{3} u^2$$



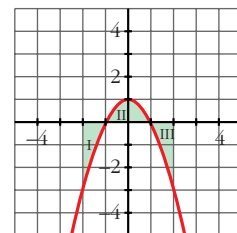
d) • Puntos de corte con el eje X:

$$1 - x^2 = 0 \rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1$$

• Hay tres recintos: I $[-2, -1]$; II $[-1, 1]$; III $[1, 2]$

$$\bullet G(x) = \int (1 - x^2) = x - \frac{x^3}{3}$$

$$\bullet G(-2) = \frac{2}{3}; G(-1) = -\frac{2}{3}; G(1) = \frac{2}{3}; G(2) = -\frac{2}{3}$$



- Área del recinto I = $|G(-1) - G(-2)| = \left| -\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \right| = \frac{4}{3}$

Área del recinto II = $|G(1) - G(-1)| = \left| \frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right) \right| = \frac{4}{3}$

Área del recinto III = $|G(2) - G(1)| = \frac{4}{3}$

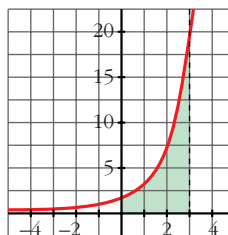
Área total = $3 \cdot \frac{4}{3} = 4 \text{ u}^2$

e) • No corta al eje X .

- $G(x) = \int e^x = e^x$

- $G(-1) = e^{-1}$; $G(3) = e^3$

- Área = $|G(3) - G(-1)| = e^3 - e^{-1} = e^3 - \frac{1}{e} = \frac{e^4 - 1}{e} \approx 19,7 \text{ u}^2$

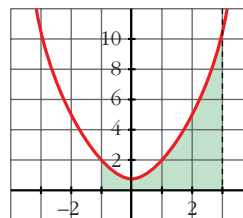


f) • No corta al eje X .

- $G(x) = \int (x^2 + 1) = \frac{x^3}{3} + x$

- $G(-1) = -\frac{4}{3}$; $G(3) = 12$

- Área = $|G(3) - G(-1)| = \frac{40}{3} \text{ u}^2$



12 Halla las integrales de las siguientes funciones en los intervalos que se indican:

a) $f(x) = 3x^2 - 6x$ en $[0, 2]$

b) $f(x) = 2 \cos x$ en $[0, \pi/2]$

c) $f(x) = (x + 1)(x^2 - 2)$ en $[-1, 2]$

d) $f(x) = \text{sen } \frac{x}{4}$ en $[0, \pi]$

a) • $G(x) = \int (3x^2 - 6x) = x^3 - 3x^2$

- $G(0) = 0$; $G(2) = -4$

- $\int_0^2 (3x^2 - 6x) = G(2) - G(0) = -4$

b) • $G(x) = \int 2 \cos x = 2 \text{ sen } x$

- $G(0) = 0$; $G\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$

- $\int_0^{\pi/2} 2 \cos x = G\left(\frac{\pi}{2}\right) - G(0) = 2$

c) • $G(x) = \int (x + 1)(x^2 - 2) = \int (x^3 + x^2 - 2x - 2) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 - 2x$

$$\bullet G(-1) = \frac{11}{12}; \quad G(2) = -\frac{4}{3}$$

$$\bullet \int_{-1}^2 (x+1)(x^2-2) = G(2) - G(-1) = -\frac{4}{3} - \frac{11}{12} = -\frac{9}{4}$$

$$d) \bullet G(x) = \int \operatorname{sen} \frac{x}{4} = -4 \cos \frac{x}{4}$$

$$\bullet G(0) = -4; \quad G(\pi) = -\frac{4\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2}$$

$$\bullet \int_0^{\pi} \operatorname{sen} \frac{x}{4} = G(\pi) - G(0) = -2\sqrt{2} + 4$$

PARA RESOLVER

13 **S** **Calcula el área comprendida entre las curvas:**

a) $y = x^2; \quad y = x$

c) $y = x^2; \quad y = x^3$

e) $y = 2x^2 + 5x - 3; \quad y = 3x + 1$

b) $y = x^2; \quad y = 1$

d) $y = x^2; \quad y = -x^2 + 2x$

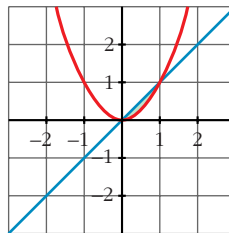
f) $y = 4 - x^2; \quad y = 8 - 2x^2; \quad x = -2; \quad x = 2$

a) $\bullet x^2 - x = 0 \rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = 1$

$$\bullet G(x) = \int (x^2 - x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$$

$$\bullet G(0) = 0; \quad G(1) = -\frac{1}{6}$$

$$\bullet \text{Área} = |G(1) - G(0)| = \frac{1}{6} u^2$$

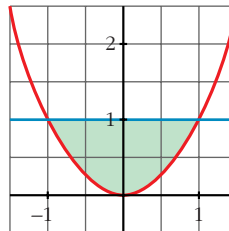


b) $\bullet x^2 - 1 = 0 \rightarrow x_1 = -1, \quad x_2 = 1$

$$\bullet G(x) = \int (x^2 - 1) = \frac{x^3}{3} - x$$

$$\bullet G(-1) = \frac{2}{3}; \quad G(1) = -\frac{2}{3}$$

$$\bullet \text{Área} = |G(1) - G(-1)| = \frac{4}{3} u^2$$

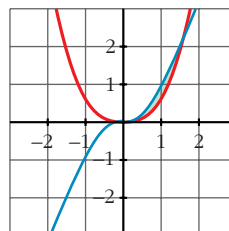


c) $\bullet x^2 - x^3 = 0 \rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = 1$

$$\bullet G(x) = \int (x^2 - x^3) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$

$$\bullet G(0) = 0; \quad G(1) = \frac{1}{12}$$

$$\bullet \text{Área} = |G(1) - G(0)| = \frac{1}{12} u^2$$

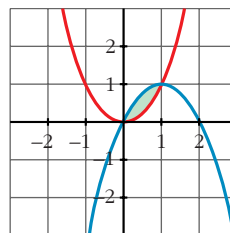


d) • $x^2 - (-x^2 + 2x) = 2x^2 - 2x = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1$

• $G(x) = \int (2x^2 - 2x) = \frac{2x^3}{3} - x^2$

• $G(0) = 0; G(1) = -\frac{1}{3}$

• Área = $|G(1) - G(0)| = \frac{1}{3} u^2$

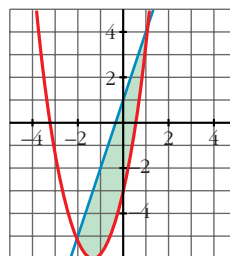


e) • $2x^2 + 5x - 3 - (3x + 1) = 2x^2 + 2x - 4 = 0 \rightarrow x_1 = -2, x_2 = 1$

• $G(x) = \int (2x^2 + 2x - 4) = \frac{2x^3}{3} + x^2 - 4x$

• $G(-2) = \frac{20}{3}; G(1) = -\frac{7}{3}$

• Área = $|G(1) - G(-2)| = \left| -\frac{7}{3} - \frac{20}{3} \right| = \frac{27}{3} = 9 u^2$

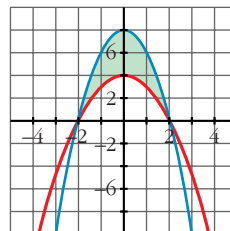


f) • $4 - x^2 - (8 - 2x^2) = x^2 - 4 = 0 \rightarrow x_1 = -2, x_2 = 2$

• $G(x) = \int (x^2 - 4) = \frac{x^3}{3} - 4x$

• $G(-2) = \frac{16}{3}; G(2) = -\frac{16}{3}$

• Área = $|G(2) - G(-2)| = \frac{32}{3} u^2$



14 **S** **Calcula el área de los recintos limitados por:**

a) La función $f(x) = x^2 - 2x + 1$ y los ejes de coordenadas.

b) La curva $y = x^3$, la recta $x = 2$ y el eje X.

c) La función $y = \text{sen } x$, el eje de abscisas y las rectas $x = \frac{\pi}{4}$ y $x = -\frac{\pi}{4}$.

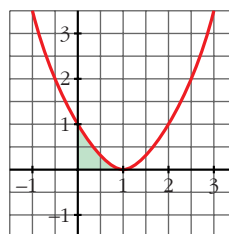
d) La función $y = \text{cos } x$ y el eje OX entre $x = 0$ y $x = \pi$.

a) • $f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 = 0 \rightarrow x = 1$

• $G(x) = \int (x - 1)^2 = \frac{(x - 1)^3}{3}$

• $G(0) = -\frac{1}{3}; G(1) = 0$

• Área = $|G(1) - G(0)| = \frac{1}{3} u^2$

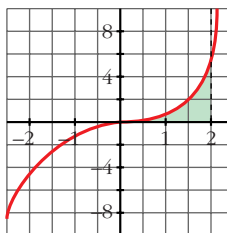


b) • $x^3 = 0 \rightarrow x = 0$

• $G(x) = \int x^3 = \frac{x^4}{4}$

• $G(0) = 0; G(2) = 4$

• Área = $|G(2) - G(0)| = 4 \text{ u}^2$



c) • $\text{sen } x = 0 \rightarrow x = 0$ (entre $-\frac{\pi}{4}$ y $\frac{\pi}{4}$)

• Hay dos recintos: I $[-\frac{\pi}{4}, 0]$; II $[0, \frac{\pi}{4}]$

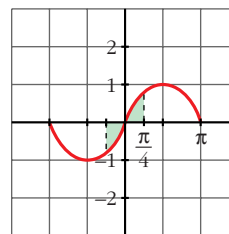
• $G(x) = \int \text{sen } x = -\cos x$

• $G(\frac{\pi}{4}) = G(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}; G(0) = -1$

• Área recinto I = $|G(0) - G(-\frac{\pi}{4})| = |-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}| = 0,29$

Área recinto II = $|G(\frac{\pi}{4}) - G(0)| = |1 - \frac{\sqrt{2}}{2}| = 0,29$

Área total = $2 \cdot 0,29 \approx 0,58 \text{ u}^2$



d) • $\cos x = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ (entre 0 y π)

• Hay dos recintos: I $[0, \frac{\pi}{2}]$; II $[\frac{\pi}{2}, \pi]$

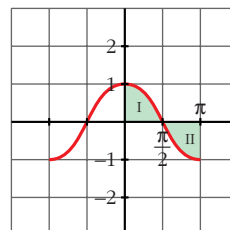
• $G(x) = \int \cos x = \text{sen } x$

• $G(0) = 0; G(\frac{\pi}{2}) = 1; G(\pi) = 0$

• Área recinto I = $|G(\frac{\pi}{2}) - G(0)| = 1$

Área recinto II = $|G(\pi) - G(\frac{\pi}{2})| = 1$

Área total = $1 + 1 = 2 \text{ u}^2$



15 **Calcula el área comprendida entre las curvas:**

S

a) $y = x^2$ e $y = 3 - 2x$

b) $y = 4 - x^2$ e $y = 3x^2$

c) $y = x$ e $y = x^2 - 2$

d) $y = 4 - x^2$ e $y = x^2 - 4$

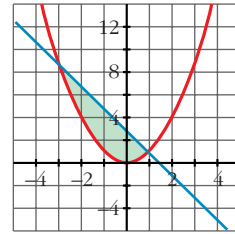
e) $y = (x + 2)^2(x - 3)$ y el eje de abscisas.

a) $x^2 - (3 - 2x) = x^2 + 2x - 3 = 0 \rightarrow x_1 = -3, x_2 = 1$

- $G(x) = \int (x^2 + 2x - 3) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x$

- $G(-3) = 9; G(1) = -\frac{5}{3}$

- Área = $|G(1) - G(-3)| = \frac{32}{3} u^2$

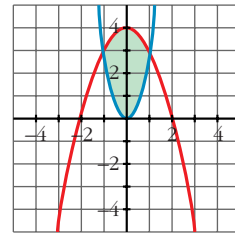


b) $4 - x^2 - 3x^2 = 4 - 4x^2 = 0 \rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1$

- $G(x) = \int (4 - 4x^2) = 4x - \frac{4x^3}{3}$

- $G(-1) = -\frac{8}{3}; G(1) = \frac{8}{3}$

- Área = $|G(1) - G(-1)| = \frac{16}{3} u^2$

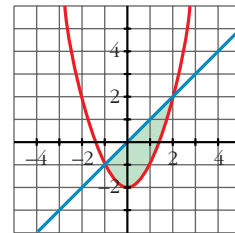


c) $x - (x^2 - 2) = x - x^2 + 2 = -x^2 + x + 2 = 0 \rightarrow x_1 = -1, x_2 = 2$

- $G(x) = \int (-x^2 + x + 2) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x$

- $G(-1) = -\frac{7}{6}; G(2) = \frac{10}{3}$

- Área = $|G(2) - G(-1)| = \frac{9}{2} u^2$

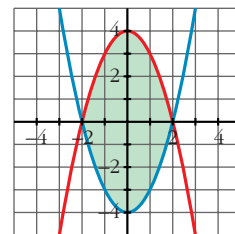


d) $4 - x^2 - (x^2 - 4) = -2x^2 + 8 = 0 \rightarrow x_1 = -2, x_2 = 2$

- $G(x) = \int (-2x^2 + 8) = -\frac{2x^3}{3} + 8x$

- $G(-2) = -\frac{32}{3}; G(2) = \frac{32}{3}$

- Área = $|G(2) - G(-2)| = \frac{64}{3} u^2$

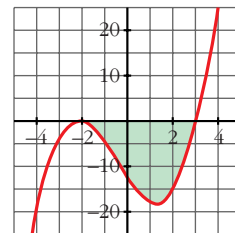


e) $(x + 2)^2 (x - 3) = 0 \rightarrow x_1 = -2, x_2 = 3$

- $G(x) = \int (x + 2)^2 (x - 3) = \int (x^3 + x^2 - 8x - 12) =$
 $= \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 4x^2 - 12x$

- $G(-2) = \frac{28}{3}; G(3) = -\frac{171}{4}$

- Área = $|G(3) - G(-2)| = \frac{625}{12} \approx 52,1 u^2$



16 Halla el área comprendida entre la curva $y = -x^2 + 4x + 5$ y la recta $y = 5$.

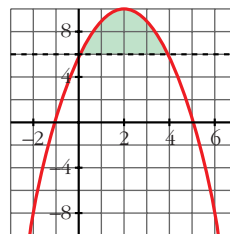
S

$$-x^2 + 4x + 5 - 5 = -x^2 + 4x = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 4$$

$$\bullet G(x) = \int (-x^2 + 4x) = -\frac{x^3}{3} + 2x^2$$

$$\bullet G(0) = 0; G(4) = \frac{32}{3}$$

$$\bullet \text{Área} = |G(4) - G(0)| = \frac{32}{3} u^2$$



17 Calcula el área limitada por las siguientes curvas:

S

a) $y = x^3 + x^2$; $y = x^3 + 1$; $x = -1$; $x = 1$

b) $y = x^2$; $y = 1 - x^2$; $y = 2$

c) $y = x(x-1)(x-2)$; $y = 0$

d) $y = x^2 - 2x$; $y = x$

e) $y = x^3 - 2x$; $y = -x^2$

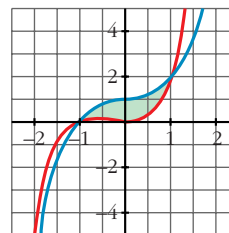
f) $y = 2x - x^3$; $y = x^2$

a) $x^3 + x^2 - (x^3 + 1) = x^2 - 1 = 0 \rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1$

$$\bullet G(x) = \int (x^2 - 1) = \frac{x^3}{3} - x$$

$$\bullet G(-1) = \frac{2}{3}; G(1) = -\frac{2}{3}$$

$$\bullet \text{Área} = |G(1) - G(-1)| = \frac{4}{3} u^2$$



b) $x^2 = 1 - x^2 \rightarrow 2x^2 - 1 = 0 \rightarrow x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$x^2 = 2 \rightarrow x_3 = -\sqrt{2}, x_4 = \sqrt{2}$$

• Tenemos tres recintos:

$$I \left[-\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right]; II \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right]; III \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2} \right]$$

• Para el I y el III hay que considerar:

$$G_1(x) = \int (2 - x^2) = x - \frac{x^3}{3}$$

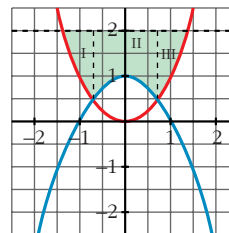
$$G_1(-\sqrt{2}) = -\frac{4\sqrt{2}}{3}; G_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{11\sqrt{2}}{12}; G_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{11\sqrt{2}}{12}; G_1(\sqrt{2}) = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{Área del recinto I} = \left| G_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - G_1(-\sqrt{2}) \right| = \frac{5\sqrt{2}}{12}$$

$$\text{Área del recinto III} = \left| G_1(\sqrt{2}) - G_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right| = \frac{5\sqrt{2}}{12}$$

• Para el II hay que considerar:

$$G_2(x) = \int (2 - 1 + x^2) = \int (1 + x^2) = x + \frac{x^3}{3}$$



$$G_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{7\sqrt{2}}{12}; \quad G_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{7\sqrt{2}}{12}$$

$$\text{Área del recinto II} = \left| G_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - G_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right| = \frac{7\sqrt{2}}{6}$$

$$\bullet \text{Área total} = \frac{5\sqrt{2}}{12} + \frac{7\sqrt{2}}{6} + \frac{5\sqrt{2}}{12} = \frac{12\sqrt{2}}{6} = 2\sqrt{2} \text{ u}^2$$

c) $x(x-1)(x-2) = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$

- Hay dos recintos: I [0, 1]; II [1, 2]

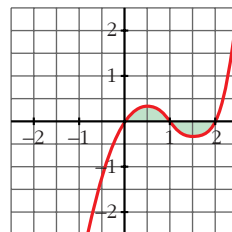
$$\bullet G(x) = \int x(x-1)(x-2) = \int (x^3 - 3x^2 + 2x) = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2$$

$$\bullet G(0) = 0; \quad G(1) = \frac{1}{4}; \quad G(2) = 0$$

$$\bullet \text{Área del recinto I} = |G(1) - G(0)| = \frac{1}{4}$$

$$\text{Área del recinto II} = |G(2) - G(1)| = \frac{1}{4}$$

$$\text{Área total} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \text{ u}^2$$

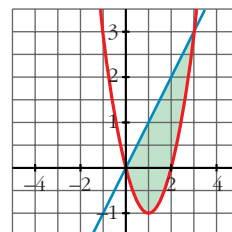


d) $x^2 - 2x - x = x^2 - 3x = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3$

$$\bullet G(x) = \int (x^2 - 3x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}$$

$$\bullet G(0) = 0; \quad G(3) = -\frac{9}{2}$$

$$\bullet \text{Área} = |G(3) - G(0)| = \frac{9}{2} \text{ u}^2$$



e) $x^3 - 2x - (-x^2) = x^3 + x^2 - 2x = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 1$$

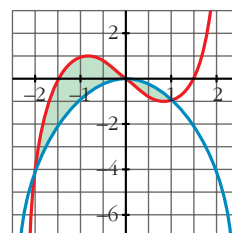
- Hay dos recintos: I [-2, 0]; II [0, 1]

$$\bullet G(x) = \int (x^3 + x^2 - 2x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2$$

$$\bullet G(-2) = -\frac{8}{3}; \quad G(0) = 0; \quad G(1) = -\frac{5}{12}$$

$$\bullet \text{Área del recinto I} = |G(0) - G(-2)| = \frac{8}{3}$$

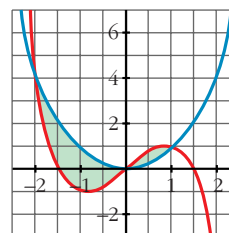
$$\text{Área del recinto II} = |G(1) - G(0)| = \frac{5}{12}$$



$$\text{Área total} = \frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12} u^2$$

f) Por simetría respecto al anterior, el área es la misma:

$$\text{Área total} = \frac{37}{12} u^2$$



- 18** Un depósito se vacía de forma variable según la función $v(t) = 5 - 0,1t$ (t en min, v en l/min). Calcula lo que se ha vaciado el depósito entre los minutos 100 y 200.

$$G(t) = \int (5 - 0,1t) = 5t - \frac{0,1t^2}{2} = 5t - 0,05t^2$$

$$G(200) = -1000; \quad G(100) = 0$$

$$\text{Área} = |G(200) - G(100)| = 1000$$

Se han vaciado 1000 litros entre los minutos 100 y 200.

- 19** Una fábrica arroja diariamente material contaminante a una balsa según un ritmo dado por la siguiente función: $m = 0,01t^3 - 0,2t^2 + t + 1$ siendo m la cantidad de material en kg y t la hora del día. ¿Cuánto material arroja cada día?

Consideramos t entre 0 y 24 horas:

$$\begin{aligned} \int_0^{24} (0,01t^3 - 0,2t^2 + t + 1) &= \left[\frac{0,01t^4}{4} - \frac{0,2t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t \right]_0^{24} \\ &= 219,84 - 0 = 219,84 \text{ kg} \end{aligned}$$

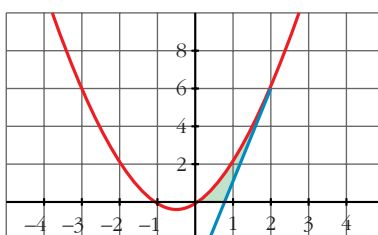
- 20** Calcula el área limitada por la gráfica de $y = x + x^2$, la tangente a esa curva en $x = 2$ y el eje de abscisas.

- Recta tangente en $x = 2$:

$$y' = 1 + 2x \rightarrow m = y'(2) = 5; \quad y(2) = 6$$

$$\text{Recta} \rightarrow y = 6 + 5(x - 2) = 5x - 4$$

- Hacemos las gráficas para entender mejor la situación:



- Puntos de corte de $y = x + x^2$ con el eje X :

$$x + x^2 = 0 \rightarrow x_1 = -1, x_2 = 0$$

- Punto de corte de $y = 5x - 4$ con el eje X :

$$5x - 4 = 0 \rightarrow x = \frac{4}{5}$$

- Área bajo $y = x + x^2$ entre 0 y 2:

$$G_1(x) = \int (x + x^2) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

$$G_1(2) = \frac{14}{3}; G_1(0) = 0$$

$$\text{Área} = |G_1(2) - G_1(0)| = \frac{14}{3} \text{ u}^2$$

- Área bajo $y = 5x - 4$ entre $\frac{4}{5}$ y 2:

$$G_2(x) = \int (5x - 4) = \frac{5x^2}{2} - 4x$$

$$G_2\left(\frac{4}{5}\right) = -\frac{8}{5}; G_2(2) = 2$$

$$\text{Área} = \left|G_2(2) - G_2\left(\frac{4}{5}\right)\right| = 2 + \frac{8}{5} = \frac{18}{5} \text{ u}^2$$

- El área buscada es: $\frac{14}{3} - \frac{18}{5} = \frac{16}{15} \text{ u}^2$

Página 229

- 21** Dada la curva de ecuación $y = x^3 - 2x^2 + x$, halla la ecuación de su tangente en el origen y calcula el área de la región que queda encerrada entre la curva y la tangente.

- Tangente en el origen:

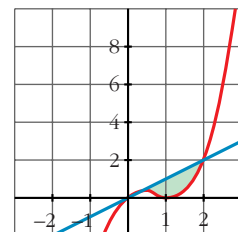
$$y' = 3x^2 - 4x + 1; m = y'(0) = 1; y(0) = 0$$

$$\text{Recta} \rightarrow y = x$$

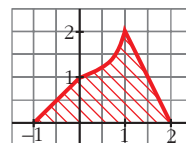
- $x^3 - 2x^2 + x - x = x^3 - 2x^2 = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2$

$$G(x) = \int (x^3 - 2x^2) = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3}$$

$$G(0) = 0; G(2) = -\frac{4}{3}$$



22 Halla el área de la figura sabiendo que el lado curvo corresponde a la función $y = x^2 + 1$.



- Entre -1 y 0 tenemos un triángulo de base 1 y altura 1 :

$$\text{Área} = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2} u^2$$

- Entre 1 y 2 tenemos un triángulo de base 1 y altura 2 :

$$\text{Área} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1 u^2$$

- Entre 0 y 1 :

$$G(x) = \int (x^2 + 1) = \frac{x^3}{3} + x$$

$$G(0) = 0; \quad G(1) = \frac{4}{3}$$

$$\text{Área} = |G(1) - G(0)| = \frac{4}{3} u^2$$

- El área total será: $\frac{1}{2} + 1 + \frac{4}{3} = \frac{17}{6} u^2$

23 Dada la función $f(x) = 4 - x^2$, escribe las ecuaciones de las tangentes a f en los puntos de corte con el eje de abscisas. Halla el área comprendida entre las rectas tangentes y la curva.

- Puntos de corte con el eje X :

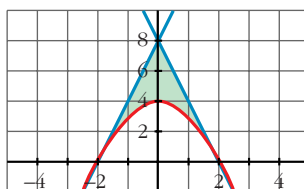
$$4 - x^2 = 0 \rightarrow x_1 = -2, \quad x_2 = 2 \rightarrow \text{Puntos } (-2, 0) \text{ y } (2, 0)$$

- $f'(x) = -2x$; $f'(-2) = 4$; $f'(2) = -4$

- Recta tangente en $x = -2 \rightarrow y = 4(x + 2) = 4x + 8$

$$\text{Recta tangente en } x = 2 \rightarrow y = -4(x - 2) = -4x + 8$$

- Hacemos una gráfica para entenderlo mejor:



- Área del triángulo de vértices $(-2, 0)$, $(0, 8)$ y $(2, 0)$:

$$\text{Área} = \frac{4 \cdot 8}{2} = 16 u^2$$

- Área entre $y = 4 - x^2$ y el eje X :

$$G(x) = \int (4 - x^2) = 4x - \frac{x^3}{3}$$

$$G(-2) = -\frac{16}{3}; \quad G(2) = \frac{16}{3}$$

$$\text{Área} = |G(2) - G(-2)| = \frac{32}{3} u^2$$

- El área total será la diferencia: $16 - \frac{32}{3} = \frac{16}{3} u^2$

24 Dada $f(x) = x + 1$, halla:

$$\text{a) } \int_0^x f \quad \text{b) } \int_1^x f \quad \text{c) } \int_{-1}^x f \quad \text{d) } \int_1^3 f$$

$$G(x) = \int (x + 1) = \frac{x^2}{2} + x$$

$$G(0) = 0; \quad G(1) = \frac{3}{2}; \quad G(-1) = -\frac{1}{2}; \quad G(3) = \frac{15}{2}$$

$$\text{a) } \int_0^x f = G(x) - G(0) = \frac{x^2}{2} + x$$

$$\text{b) } \int_1^x f = G(x) - G(1) = \frac{x^2}{2} + x - \frac{3}{2}$$

$$\text{c) } \int_{-1}^x f = G(x) - G(-1) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}$$

$$\text{d) } \int_1^3 f = G(3) - G(1) = \frac{15}{2} - \frac{3}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

25 a) Halla el área limitada por $y = |2x - 4|$, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = 5$.

b) Calcula $\int_{-2}^3 |2x - 4|$.

a) Definimos la función por intervalos para hacernos una idea de su forma:

$$y = |2x - 4| = \begin{cases} -2x + 4, & x \leq 2 \\ 2x - 4, & x > 2 \end{cases}$$

El área buscada será:

$$\begin{aligned} \int_0^5 y &= \int_0^2 -2x + 4 + \int_2^5 2x - 4 = [-x^2 + 4x]_0^2 + [x^2 - 4x]_2^5 = \\ &= (4 - 0) + (5 + 4) = 4 + 9 = 13 u^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int_{-2}^3 |2x - 4| &= \int_{-2}^2 -2x + 4 + \int_2^3 2x - 4 = [-x^2 + 4x]_{-2}^2 + [x^2 - 4x]_2^3 = \\ &= (4 + 12) + (-3 + 4) = 16 + 1 = 17 \text{ u}^2 \end{aligned}$$

26 Calcula: a) $\int_0^2 f(x)$ y b) $\int_{-1}^3 g(x)$, siendo:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 + 1 & \text{si } 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

$$\text{a) } \int_0^2 f(x) = \int_0^1 x^2 + \int_1^2 (2 - x)$$

$$G_1(x) = \int x^2 = \frac{x^3}{3} \rightarrow G_1(1) - G_1(0) = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

$$G_2(x) = \int (2 - x) = 2x - \frac{x^2}{2} \rightarrow G_2(2) - G_2(1) = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Así: } \int_0^2 f(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

$$\text{b) } \int_{-1}^3 g(x) = \int_{-1}^1 2x + \int_1^3 (x^2 + 1)$$

$$G_1(x) = \int 2x = x^2 \rightarrow G_1(1) - G_1(-1) = 1 - 1 = 0$$

$$G_2(x) = \int (x^2 + 1) = \frac{x^3}{3} + x \rightarrow G_2(3) - G_2(1) = 12 - \frac{4}{3} = \frac{32}{3}$$

$$\text{Así: } \int_{-1}^3 g(x) = \frac{32}{3}$$

27 Dada la función $f(x)$, halla el área limitada por $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 3$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x < \frac{-1}{2} \\ -x^2 + 3x & \frac{-1}{2} \leq x \leq 3 \\ |x + 3| & x > 3 \end{cases}$$

Para x comprendida entre 0 y 3, tenemos que:

$$f(x) = -x^2 + 3x$$

Hallamos los puntos de corte con el eje OX :

$$-x^2 + 3x = 0 \rightarrow x(-x + 3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

Por tanto, el área pedida es:

$$\text{Área} = \int_0^3 (-x^2 + 3x) = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \right]_0^3 = -9 + \frac{27}{2} = \frac{9}{2} = 4,5 \text{ u}^2$$

28 Halla una función f de la cual sabemos que:

$$f'(x) = 3x^2 - 2x + 5 \text{ y que } f(1) = 0$$

$$G(x) = \int (3x^2 - 2x + 5) = x^3 - x^2 + 5x + k \text{ son las primitivas de la función dada.}$$

Entre todas ellas, nos interesa la que cumple que $G(1) = 0$, es decir:

$$G(1) = 5 + k = 0 \Rightarrow k = -5$$

$$\text{Así: } f(x) = x^3 - x^2 + 5x - 5$$

29 Halla la función primitiva de la función $y = 3x^2 - x^3$ que pase por el punto $(2, 4)$.

$$G(x) = \int (3x^2 - x^3) = x^3 - \frac{x^4}{4} + k \text{ son las primitivas de la función dada.}$$

Buscamos k para que pase por $(2, 4)$:

$$G(2) = 4 + k = 4 \Rightarrow k = 0$$

La función que buscamos es:

$$f(x) = x^3 - \frac{x^4}{4}$$

30 Halla la función que tome el valor 2 en $x = 1$ y cuya derivada es:

$$f'(x) = 3x^2 + 6$$

$$G(x) = \int (3x^2 + 6) = x^3 + 6x + k \text{ son las primitivas de la función dada.}$$

Buscamos k para que $G(1) = 2$:

$$G(1) = 7 + k = 2 \Rightarrow k = -5$$

$$\text{Por tanto: } f(x) = x^3 + 6x - 5$$

31 Halla la primitiva de $f(x) = 1 - x - x^2$ que corte al eje de abscisas en $x = 3$.

$$G(x) = \int (1 - x - x^2) = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + k \text{ son las primitivas de la función dada.}$$

Buscamos k para que $G(3) = 0$:

$$G(3) = -\frac{21}{2} + k \Rightarrow k = \frac{21}{2}$$

La función que buscamos es:

$$y = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{21}{2}$$

CUESTIONES TEÓRICAS

- 32** Si $F(x)$ y $G(x)$ son dos primitivas de f , ¿se verifica necesariamente que $F(x) = k + G(x)$? Justifica la respuesta.

Sí. Justificación:

$$\int f = F(x) + c_1 \quad \int f = G(x) + c_2$$

Restando:

$$0 = F(x) - G(x) + (c_1 - c_2) \Rightarrow F(x) = k + G(x)$$

- 33** Siendo $F(x) = \int_1^x f = 3x^2 - 5x$, halla la función f . Calcula $F(0)$ y $F(2)$.

$$f(x) = F'(x) = 6x - 5$$

$$F(0) = 0; F(2) = 2$$

- 34** Calcula el área bajo la curva $f(x) = x^2 - 1$ en el intervalo variable $[1, x]$. Halla el área para $x = 4$.

$$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1$$

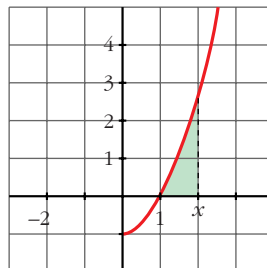
$$\text{Área} = \int_1^x (t^2 - 1)$$

$$G(t) = \int (t^2 - 1) = \frac{t^3}{3} - t$$

$$G(1) = -\frac{2}{3}$$

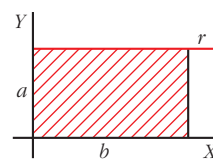
$$\text{Área } [1, x] = |G(x) - G(1)| = \frac{x^3}{3} - x + \frac{2}{3}$$

$$\text{Cuando } x = 4, \text{ queda: } \text{Área } [1, 4] = 18 \text{ u}^2$$



35 Demuestra, utilizando integrales, que el área del rectángulo es $A = b \cdot a$.

☛ Halla la ecuación de la recta r y calcula el área limitada por r y el eje OX entre $x = 0$ y $x = b$.



La ecuación de r es $y = a$. El área es:

$$\text{Área} = \int_0^b a$$

$$G(x) = \int a = ax$$

$$G(b) = ab; \quad G(0) = 0$$

$$\text{Área} = G(b) - G(0) = ab$$

PARA PROFUNDIZAR

36 Dada la función $f(x) = ae^{x/3} + \frac{1}{x^2}$ ($x \neq 0$):

S

a) Calcula $\int_1^2 f(x)$ en función de a .

b) Se sabe que F es una primitiva de f . Calcula a si $F(1) = 0$ y $F(2) = 1/2$.

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_1^2 f(x) &= \int_1^2 \left(ae^{x/3} + \frac{1}{x^2} \right) = \left[3ae^{x/3} - \frac{1}{x} \right]_1^2 = \left(3ae^{2/3} - \frac{1}{2} \right) - \left(3ae^{1/3} - 1 \right) = \\ &= 3a(e^{2/3} - e^{1/3}) + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

b) Si F es una primitiva de f , tenemos que:

$$F(x) = 3ae^{x/3} - \frac{1}{x} + k$$

Tenemos que hallar k y a para que:

$$\left. \begin{aligned} F(1) = 0 &\rightarrow 3ae^{1/3} - 1 + k = 0 \\ F(2) = \frac{1}{2} &\rightarrow 3ae^{2/3} - \frac{1}{2} + k = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 3ae^{1/3} + k &= 1 \\ 3ae^{2/3} + k &= 1 \end{aligned}$$

Restando la 2ª ecuación menos la 1ª:

$$3a(e^{2/3} - e^{1/3}) = 0 \rightarrow a = 0 \rightarrow k = 1$$

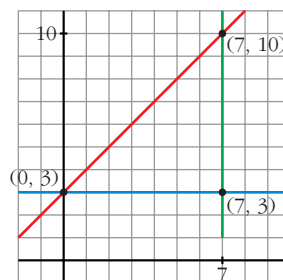
$$\text{Por tanto: } F(x) = -\frac{1}{x} + 1$$

37 Expresa por una integral el área del triángulo de vértices $(0, 3)$, $(7, 3)$ y $(7, 10)$. Explica el significado de la integral escrita.

- La ecuación de la recta que pasa por $(0, 3)$ y $(7, 10)$ es:

$$\text{Pendiente} = \frac{10 - 3}{7 - 0} = \frac{7}{7} = 1$$

$$\text{Ecuación: } y = x + 3$$



- La ecuación de la recta que pasa por $(0, 3)$ y $(7, 3)$ es:
 $y = 3$.

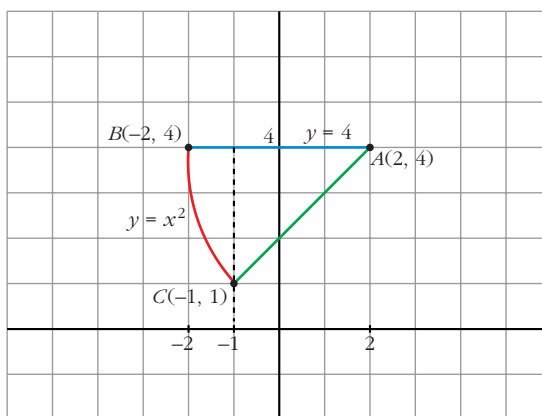
El área del triángulo es el área comprendida entre las dos rectas anteriores y $x = 7$. Así, tenemos que:

$$\text{Área} = \int_0^7 [(x + 3) - 3] = \int_0^7 x = \text{Área}$$

- Calculamos su valor:

$$\int_0^7 x = \frac{49}{2} \text{ u}^2$$

- 38** **S** **Halla el área del triángulo mixtilíneo de vértices $A(2, 4)$, $B(-2, 4)$ y $C(-1, 1)$, en el que las líneas AB y AC son rectas, mientras que la que une los puntos B y C es la de ecuación $y = x^2$.**



- Hallamos la ecuación de la recta que pasa por A y C :

$$\text{Pendiente} = \frac{4 - 1}{2 - (-1)} = \frac{3}{3} = 1$$

$$\text{Ecuación: } y = 4 + (x - 2) = x + 2$$

- Calculamos el área pedida:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_{-2}^{-1} (4 - x^2) + \int_{-1}^2 [4 - (x + 2)] = \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^{-1} + \int_{-1}^2 (2 - x) = \\ &= \left(-4 + \frac{1}{3} \right) - \left(-8 + \frac{8}{3} \right) + \left[2x - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^2 = \frac{5}{3} + 2 + \frac{5}{2} = \frac{37}{6} \text{ u}^2 \end{aligned}$$

39
S

La curva $y = a[1 - (x - 2)^2]$, con $a > 0$, limita con el eje de abscisas un recinto de 12 unidades de superficie. Calcula el valor de a .

- Hallamos los puntos de corte con el eje de abscisas:

$$a[1 - (x - 2)^2] = 0 \rightarrow (x - 2)^2 = 1 \begin{cases} x - 2 = 1 \rightarrow x = 3 \\ x - 2 = -1 \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

- Calculamos el área e igualamos a 12:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_1^3 a[1 - (x - 2)^2] = a \left[x - \frac{(x - 2)^3}{3} \right]_1^3 = a \left[3 - \frac{1}{3} - \left(1 + \frac{1}{3} \right) \right] = \\ &= a \left[2 - \frac{2}{3} \right] = \frac{4a}{3} = 12 \rightarrow a = \frac{12 \cdot 3}{4} = 9 \rightarrow a = 9 \end{aligned}$$