Página 78

PRACTICA

1 Escribe los seis primeros términos de las siguientes sucesiones:

a) Cada término se obtiene sumando 3 al anterior. El primero es –8.

b) El primer término es 16. Los demás se obtienen multiplicando el anterior por 0,5.

c) El primer término es 36, el segundo, 12 y los siguientes, la semisuma de los dos anteriores.

d) El primero es 2. Cada uno de los siguientes se obtiene invirtiendo el anterior.

a) –8, –5, –2, 1, 4, 7

b) 16; 8; 4; 2; 1; 0,5

c) 36; 12; 24; 18; 21; 19,5

d) $2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}$

2 Escribe los términos a_{10}, a_{25} y a_{100} de las siguientes sucesiones:

a) $a_n = 2n - 3$ b) $a_n = \frac{n+1}{2}$ c) $a_n = 1 - n^2$ d) $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$

a) $a_{10} = 2 \cdot 10 - 3 = 20 - 3 = 17$

$a_{25} = 2 \cdot 25 - 3 = 50 - 3 = 47$

$a_{100} = 2 \cdot 100 - 3 = 200 - 3 = 197$

b) $a_{10} = \frac{10+1}{2} = \frac{11}{2}$

$a_{25} = \frac{25+1}{2} = \frac{26}{2} = 13$

$a_{100} = \frac{100+1}{2} = \frac{101}{2}$

c) $a_{10} = 1 - 10^2 = 1 - 100 = -99$

$a_{25} = 1 - 25^2 = 1 - 625 = -624$

$a_{100} = 1 - 100^2 = 1 - 10\,000 = -9\,999$

d) $a_{10} = 1 + \frac{(-1)^{10}}{10} = 1,1$

$a_{25} = 1 + \frac{(-1)^{25}}{25} = \frac{24}{25} = 0,96$

$a_{100} = 1 + \frac{(-1)^{100}}{100} = 1,01$

3 **Comprueba si esta sucesión es una progresión aritmética o geométrica y escribe los tres términos siguientes: 8; 12; 18; 27; 40,5; …**

$$\left.\begin{aligned} a_2 - a_1 &= 12 - 8 = 4 \\ a_3 - a_2 &= 18 - 12 = 6 \end{aligned}\right\} \text{ No es una progresión aritmética.}$$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{12}{8} = 1{,}5; \quad \frac{a_3}{a_2} = \frac{18}{12} = 1{,}5; \quad \frac{a_4}{a_3} = \frac{27}{18} = 1{,}5; \quad \frac{a_5}{a_4} = \frac{40{,}5}{27} = 1{,}5$$

Es una progresión geométrica de razón $r = 1{,}5$. Los tres términos siguientes son: 60,75; 91,125; 136,6875.

4 **Escribe los cinco primeros términos de las sucesiones cuyos términos generales son:**

a) $a_n = 10 - 5n$ **b)** $b_n = \dfrac{n^2 - 1}{n}$ **c)** $c_n = 3^{n-2}$ **d)** $d_n = \dfrac{2n - 1}{n + 1}$

Entre ellas hay una progresión aritmética y otra geométrica. ¿Cuáles son?

a) 5, 0, –5, –10, –15

b) $0, \frac{3}{2}, \frac{8}{3}, \frac{15}{4}, \frac{24}{5}$

c) $\frac{1}{3}, 1, 3, 9, 27$

d) $\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{4}, \frac{7}{5}, \frac{3}{2}$

a_n es una progresión aritmética de diferencia $d = -5$.

c_n es una progresión geométrica de razón $r = 3$.

5 **Averigua el criterio con el que se han formado las siguientes sucesiones. Escribe tres términos más en cada una de ellas y di cuáles son progresiones aritméticas y cuáles geométricas:**

a) 7, 5, 3, 1, … **b)** $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ **c)** 1,5; 1,9; 2,3; 2,7; …

d) 2, 5, 10, 17, … **e)** $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ **f)** 1, 3, 6, 10, …

a) Cada término se obtiene restando 2 (o sumando –2) al anterior. Es una progresión aritmética de diferencia $d = -2$. Los tres términos siguientes son: –1, –3, –5.

b) Cada término se obtiene multiplicando por $\frac{1}{2}$ el anterior. Es una progresión geométrica de razón $r = \frac{1}{2}$.

Los tres términos siguientes son: $\frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}$.

c) Cada término se obtiene sumando 0,4 al anterior. Es una progresión aritmética de diferencia $d = 0{,}4$. Los tres términos siguientes son: 3,1; 3,5; 3,9.

d) Cada término se obtiene sumándole 1 al cuadrado del lugar que ocupa. Los tres términos siguientes son: 26, 37, 50.

e) Cada término es el inverso del lugar que ocupa.

Los tres términos siguientes son: $\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$.

f) Cada término, a partir del segundo, se obtiene sumándole al lugar que ocupa el término anterior. Los tres términos siguientes son: 15, 21, 28.

6 **a) Esta es la tabla de multiplicar. Observa en ella cada fila o columna. ¿Qué tipos de sucesiones son? Escribe el término general de cada una.**

b) Obtén el término general de la diagonal principal 1, 4, 9, 16, …

c) La diagonal 2, 6, 12, 20, … se formó multiplicando cada número por su siguiente. ¿Cuál es el término general?

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

a) Son progresiones aritméticas. Términos generales:

Fila 1 $\rightarrow$ $a_n = n$ Fila 2 $\rightarrow$ $a_n = 2n$ Fila 3 $\rightarrow$ $a_n = 3n$

Fila 4 $\rightarrow$ $a_n = 4n$ Fila 5 $\rightarrow$ $a_n = 5n$ Fila 6 $\rightarrow$ $a_n = 6n$

Fila 7 $\rightarrow$ $a_n = 7n$ Fila 8 $\rightarrow$ $a_n = 8n$ Fila 9 $\rightarrow$ $a_n = 9n$

Fila 10 $\rightarrow$ $a_n = 10n$

b) $a_n = n^2$

c) $a_n = n\,(n + 1)$

7 **Halla la diferencia, escribe el término general y calcula la suma de los 20 primeros términos en las siguientes progresiones aritméticas:**

a) 1; 1,5; 2; 2,5; … **b) 5, 3, 1, –1, …**

c) 3,3; 4,4; 5,5; 6,6; … **d)** $\frac{1}{4}, \frac{5}{4}, \frac{9}{4}, \frac{13}{4}, \ldots$

a) • $d = 0{,}5$

• $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = 1 + (n - 1) \cdot 0{,}5 = 1 + 0{,}5n - 0{,}5 = 0{,}5n + 0{,}5$

$a_n = 0{,}5n + 0{,}5$

• $a_{20} = 0{,}5 \cdot 20 + 0{,}5 = 10{,}5$

$$S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} = \frac{(1 + 10{,}5) \cdot 20}{2} = 115$$

b) • $d = -2$

• $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 5 + (n-1) \cdot (-2) = 5 - 2n + 2 = 7 - 2n$

$a_n = 7 - 2n$

• $a_{20} = 7 - 2 \cdot 20 = 7 - 40 = -33$

$S_{20} = \dfrac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} = \dfrac{(5 - 33) \cdot 20}{2} = -280$

c) • $d = 1,1$

• $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 3,3 + (n-1) \cdot 1,1 = 3,3 + 1,1n - 1,1 = 1,1n + 2,2$

$a_n = 1,1n + 2,2$

• $a_{20} = 1,1 \cdot 20 + 2,2 = 24,2$

$S_{20} = \dfrac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} = \dfrac{(3,3 + 24,2) \cdot 20}{2} = 275$

d) • $d = 1$

• $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = \dfrac{1}{4} + (n-1) \cdot 1 = \dfrac{1}{4} + n - 1 = n - \dfrac{3}{4}$

$a_n = n - \dfrac{3}{4}$

• $a_{20} = 20 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{77}{4}$

$S_{20} = \dfrac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} = \dfrac{(1/4 + 77/4) \cdot 20}{2} = 195$

8 **Halla la razón, escribe el término general y calcula la suma de los 10 primeros términos en las siguientes progresiones geométricas:**

a) 0,25; 0,75; 2,25; 6,75; …

b) 3, –6, 12, –24, …

c) 4; 6; 9; 13,5; …

d) 8, 4, 2, 1, …

a) • $r = 3$

• $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 0,25 \cdot 3^{n-1} \rightarrow a_n = 0,25 \cdot 3^{n-1}$

• $a_{10} = 0,25 \cdot 3^9 = 4\,920,75$

$S_{10} = \dfrac{a_{10} \cdot r - a_1}{r - 1} = \dfrac{14\,762,25 - 0,25}{2} = 7\,381$

b) • $r = -2$

• $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 3 \cdot (-2)^{n-1} \rightarrow a_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$

• $a_{10} = 3 \cdot (-2)^9 = 3 \cdot (-512) = -1\,536$

$S_{10} = \dfrac{a_{10} \cdot r - a_1}{r - 1} = \dfrac{3\,072 - 3}{-3} = -1\,023$

c) • $r = 1{,}5$

• $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 4 \cdot (1{,}5)^{n-1} \rightarrow a_n = 4 \cdot (1{,}5)^{n-1}$

• $a_{10} = 4 \cdot 1{,}5^9 \approx 153{,}77$

$S_{10} = \dfrac{a_{10} \cdot r - a_1}{r - 1} \approx 453{,}32$

d) • $r = \dfrac{1}{2}$

• $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 8 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = 2^3 \cdot \dfrac{1}{2^{n-1}} = \dfrac{2^3}{2^{n-1}} = 2^{3-(n-1)} =$

$= 2^{3-n+1} = 2^{4-n} \rightarrow a_n = 2^{4-n}$

• $a_{10} = 2^{-6} = \dfrac{1}{2^6} = \dfrac{1}{64}$

$S_{10} = \dfrac{a_{10} \cdot r - a_1}{r - 1} = \dfrac{\dfrac{1}{128} - 8}{-\dfrac{1}{2}} = \dfrac{1\,023}{64} \simeq 15{,}98$

9 **Calcula el término general y la suma de los 15 primeros términos de las sucesiones siguientes:**

a) 8, 5, 2, –1, … **b)** $\dfrac{1}{81}, \dfrac{1}{27}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{3}, \dots$

a) Es una progresión aritmética de diferencia $d = -3$.

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = 8 + (n - 1) \cdot (-3) = 8 - 3n + 3 = 11 - 3n$

$a_n = 11 - 3n$

$a_{15} = 11 - 3 \cdot 15 = 11 - 45 = -34$

$S_{15} = \dfrac{(a_1 + a_{15}) \cdot 15}{2} = \dfrac{(8 - 34) \cdot 15}{2} = -195$

b) Es una progresión geométrica de razón $r = 3$.

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = \dfrac{1}{81} \cdot 3^{n-1} = \dfrac{1}{3^4} \cdot 3^{n-1} = \dfrac{3^{n-1}}{3^4} = 3^{n-1-4} = 3^{n-5}$

$a_n = 3^{n-5}$

$a_{15} = 3^{10} = 59\,049$

$S_{15} = \dfrac{a_{15} \cdot r - a_1}{r - 1} = \dfrac{177\,147 - 1/81}{2} = \dfrac{7\,174\,453}{81} \approx 88\,573{,}494$

10 **Busca una ley de recurrencia para definir las siguientes sucesiones:**

a) 5, 6, 1, –5, …

b) 2, 3, $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, …

c) 0, 1, 1, 0, –1, –1, …

d) 1, 3, 5, 11, 21, 43, …

a) $a_1 = 5,\ a_2 = 6,\ a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$, para $n > 2$

b) $a_1 = 2,\ a_2 = 3,\ a_n = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}$, para $n > 2$

c) $a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$, para $n > 2$

d) $a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_n = a_{n-1} + 2 \cdot a_{n-2}$, para $n > 2$
También, $a_1 = 1,\ a_n = 2 \cdot a_{n-1} + (-1)^n$, para $n > 1$

Página 79

11 **Halla el término general de estas sucesiones:**

a) 2, 4, 6, 8, 10, …

b) 32, 25, 18, 11, …

c) $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, …

d) 7,7; 6,6; 5,5; 4,4; …

e) –7, –4, –1, 2, …

f) $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, …

g) 0,2; 0,02; 0,002; …

h) 0, 3, 8, 15, 24, …

a) $a_n = 2n$

b) $b_n = 32 + (n-1) \cdot (-7) = 32 - 7n + 7 = 39 - 7n$

c) $c_n = \frac{n}{n+1}$

d) $d_n = 7{,}7 + (n-1) \cdot (-1{,}1) = 7{,}7 - 1{,}1n + 1{,}1 = 8{,}8 - 1{,}1n$

e) $e_n = -7 + (n-1) \cdot 3 = -7 + 3n - 3 = 3n - 10$

f) $f_n = 2^{n-5}$

g) $g_n = 0{,}2 \cdot (0{,}1)^{n-1}$

h) $h_n = n^2 - 1$

12 **Identifica las progresiones aritméticas, las geométricas y las que no sean de estos tipos. Obtén el término general de cada una:**

a) 1, 1, 1, 1, …

b) $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, …

c) $\frac{7}{8}$, 1, $\frac{9}{8}$, $\frac{5}{4}$, …

d) $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, …

e) $\sqrt{2}$, 2, $2\sqrt{2}$, 4, …

f) 1, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{16}$, …

a) $a_n = 1$. Es una progresión aritmética de diferencia $d = 0$. También es una progresión geométrica de razón $r = 1$.

b) Es una progresión aritmética de diferencia $d = \sqrt{2}$, $a_n = n\sqrt{2}$.

c) Es una progresión aritmética de diferencia $d = \frac{1}{8}$, $a_n = \frac{n+6}{8}$.

d) $a_n = \sqrt{n}$. No es ni progresión aritmética ni geométrica.

e) Es una progresión geométrica de razón $r = \sqrt{2}$, $a_n = (\sqrt{2})^n$.

f) $a_n = \frac{1}{n^2}$. No es ni progresión aritmética ni geométrica.

13 Halla la suma de todos los términos de la progresión geométrica con: $a_1 = 10$ y $r = \frac{1}{10}$.

$$S_\infty = \frac{a_1}{r-1} = \frac{10}{1-1/10} = \frac{10}{9/10} = \frac{100}{9}$$

14 Escribe el término a_{63} de esta sucesión: 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 1, 2, …

El término a_n es igual al resto que se obtiene al dividir n entre 4.

$63 = 4 \cdot 15 + 3$. Por tanto, $a_{63} = 3$.

PIENSA Y RESUELVE

15 Escribe el término general de una progresión aritmética en la que $a_1 = 7$ y $a_4 = 40$.

☛ *$a_4 = a_1 + 3d$, sustituye y halla d.*

$a_4 = a_1 + 3d \;\rightarrow\; 40 = 7 + 3d \;\rightarrow\; 33 = 3d \;\rightarrow\; d = 11$

Término general: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 7 + (n-1) \cdot 11 = 7 + 11n - 11 =$

$= 11n - 4 \;\rightarrow\; a_n = 11n - 4$

16 En una progresión aritmética, $a_8 = 4$ y la diferencia es –5. Calcula el primer término y la suma de los veinticinco primeros términos.

☛ *$a_8 = a_1 + 7d$, sustituye y halla a_1.*

$a_1 = a_8 - 7d = 4 + 35 = 39 \;\rightarrow\; a_1 = 39$

$a_{25} = a_1 + 24d = 39 - 120 = -81$

$$S_{25} = \frac{(a_1 + a_{25}) \cdot 25}{2} = \frac{(39-81) \cdot 25}{2} = -525 \;\rightarrow\; S_{25} = -525$$

17 **En una progresión geométrica, $a_1 = 64$ y $r = 0{,}25$.**

a) Calcula el primer término no entero.

b) Expresa, de forma indicada, a_{25}.

a) $a_1 = 64,\ a_2 = 16,\ a_3 = 4,\ a_4 = 1,\ a_5 = 0{,}25$.

El primer término no entero es $a_5 = 0{,}25$.

b) $a_{25} = a_1 \cdot r^{24} = 64 \cdot 0{,}25^{24} = 64 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{24} = 64 \cdot \left(\frac{1}{2^2}\right)^{24} =$

$$= 2^6 \cdot \frac{1}{2^{48}} = \frac{2^6}{2^{48}} = \frac{1}{2^{42}} = 2^{-42}$$

$a_{25} = 64 \cdot 0{,}25^{24} = 2^{-42}$

18 **En una progresión geométrica, $a_1 = 1\,000$ y $a_4 = 8$. Calcula la suma de los cinco primeros términos.**

$a_4 = a_1 \cdot r^3 \ \rightarrow\ 8 = 1\,000 \cdot r^3 \ \rightarrow\ r^3 = \frac{8}{1\,000} \ \rightarrow\ r = \sqrt[3]{\frac{8}{1\,000}} = \frac{2}{10} = 0{,}2$

$r = 0{,}2$

$a_5 = a_4 \cdot r = 8 \cdot 0{,}2 = 1{,}6$

$S_5 = \frac{a_5 \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{0{,}32 - 1\,000}{0{,}2 - 1} = \frac{-999{,}68}{-0{,}8} = 1\,249{,}6 = S_5$

19 **Los ángulos de un triángulo están en progresión aritmética y el menor mide 36°. ¿Cuánto miden los otros?**

$a_1 = 36°,\ a_2 = 36° + d,\ a_3 = 36° + 2d$

$a_1 + a_2 + a_3 = 36° + 36° + d + 36° + 2d = 180°$

$108° + 3d = 180° \ \rightarrow\ 3d = 72° \ \rightarrow\ d = 24°$

Los ángulos miden: $a_1 = 36°,\ a_2 = 60°,\ a_3 = 84°$

20 **En una sala de cine, la primera fila dista de la pantalla 5,5 m, y la sexta, 8,75 m. ¿En qué fila está una persona si su distancia a la pantalla es 13,3 m?**

- Con $a_1 = 5{,}5$ y $a_6 = 8{,}75$, calculamos d:

  $a_6 = a_1 + 5d \ \rightarrow\ 8{,}75 = 5{,}5 + 5d \ \rightarrow\ d = 0{,}65$

- ¿Qué lugar ocupa el término 13,3?

  $a_n = 5{,}5 + (n - 1)\ 0{,}65$

  $13{,}3 = 5{,}5 + (n - 1)\ 0{,}65 \ \rightarrow\ 7{,}8 = (n - 1) \cdot 0{,}65$

  $n - 1 = \frac{7{,}8}{0{,}65} \ \rightarrow\ n - 1 = 12 \ \rightarrow\ n = 13$

  Está en la fila 13.

21 **Un vendedor de coches cobra al mes un tanto fijo más una comisión por cada coche que venda. En enero vendió 14 coches y cobró 2 460 €. En febrero vendió 23 y cobró 3 630 €. ¿Cuánto cobrará en marzo si ha vendido 17 coches?**

Tenemos que calcular a_{17}, sabiendo que $a_{14} = 2\,460$ € y que $a_{23} = 3\,630$ €.

$a_{23} = a_{14} + 9d \rightarrow 3\,630 = 2\,460 + 9d \rightarrow 1\,170 = 9d \rightarrow d = 130$

$a_{17} = a_{14} + 3d = 2\,460 + 3 \cdot 130 = 2\,850$ €.

Vendiendo 17 coches, cobrará 2 850 €.

22 **Una persona que estaba de vacaciones gastó 100 € el primer día, y en cada uno de los siguientes, 5 € menos que el anterior. El dinero le duró 20 días. ¿Cuánto dinero llevó para sus vacaciones?**

Tenemos que $a_1 = 100$ €, $d = -5$. Así:

$a_{20} = 100 - 19 \cdot 5 = 5$ € gastó el día 20º de sus vacaciones. En total llevó:

$$S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} = \frac{(100 + 5) \cdot 20}{2} = 1\,050 \text{ €}.$$

23 **Calcula la suma de los doce primeros términos de una progresión aritmética en la que $a_3 = 24$ y $a_{10} = 66$.**

$a_{10} = a_3 + 7d \rightarrow 66 = 24 + 7d \rightarrow 42 = 7d \rightarrow d = 6$

$a_1 = a_3 - 2d = 24 - 12 = 12$

$a_{12} = a_{10} + 2d = 66 + 12 = 78$

$$S_{12} = \frac{(a_1 + a_{12}) \cdot 12}{2} = \frac{(12 + 78) \cdot 12}{2} = 540 \rightarrow S_{12} = 540$$

24 **Halla el primer término y la diferencia de una progresión aritmética en la que el término $a_4 = 13$ y $a_2 + a_{11} = 41$.**

$$\left.\begin{array}{l} a_4 = a_1 + 3d \rightarrow 13 = a_1 + 3d \rightarrow a_1 = 13 - 3d \\ a_2 + a_{11} = a_1 + d + a_1 + 10d = 2a_1 + 11d \rightarrow 2a_1 + 11d = 41 \end{array}\right\}$$

$2(13 - 3d) + 11d = 41 \rightarrow 26 - 6d + 11d = 41 \rightarrow 5d = 15 \rightarrow d = 3$

$a_1 = 13 - 9 = 4 \rightarrow a_1 = 4$

25 **Un tipo de bacterias se reproduce por bipartición cada 10 minutos. ¿Cuántas bacterias habrá después de 8 horas?**

8 horas = 480 minutos = 48 · 10 minutos. Así, al cabo de 8 horas habrá:

$$2^{48} \simeq 2{,}81 \cdot 10^{14} \text{ bacterias}$$

26 **¿En cuánto se convertirá un euro al 10% de interés anual compuesto durante un siglo?**

1 € colocado durante 100 años al 10% de interés anual compuesto, se convertirá en: $1 \cdot (1{,}1)^{100} = 13\,780{,}61$ €

27 **La tasa anual de crecimiento demográfico de un país es del 18‰ (18 por mil). Si al finalizar el año 2000 tiene una población de 16 millones de habitantes, ¿qué población tendrá en el año 2025, si se mantiene esa tasa?**

Si al finalizar el año 2000 tenía 16 millones de habitantes, al cabo de un año tendrá: $16\,000\,000 \cdot 1{,}018 = 16\,288\,000$ habitantes

Es una progresión geométrica de razón $r = 1{,}018$.

- A principios del año 2025 (al cabo de 24 años) tendrá:

$$16\,000\,000 \cdot 1{,}018^{24} = 24\,550\,857 \simeq 24{,}5 \text{ millones de habitantes}$$

- Al final del año 2025 (al cabo de 25 años) tendrá:

$$16\,000\,000 \cdot 1{,}018^{25} = 24\,992\,772 \simeq 25 \text{ millones de habitantes}$$

Página 80

28 (ESTÁ RESUELTO EN EL LIBRO).

29 **Calcula la fracción generatriz de estos números utilizando el método del ejercicio anterior:**

a) $7{,}\widehat{3}$ **b)** $3{,}5\widehat{4}$ **c)** $0{,}\widehat{23}$

a) $7{,}\widehat{3} = 7{,}3333\ldots = 7 + 0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}003 + \ldots$

Hallamos la suma de los infinitos términos de la progresión geométrica: $\frac{3}{10}, \frac{3}{100}, \frac{3}{1\,000}, \ldots$, de razón $\frac{1}{10}$.

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{3}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Por tanto: $7{,}\widehat{3} = 7 + \frac{1}{3} = \frac{22}{3}$

b) $3{,}5\widehat{4} = 3 + 0{,}5 + 0{,}04 + 0{,}004 + 0{,}0004 + \ldots$

Expresamos 0,5 en forma de fracción $\rightarrow$ $0{,}5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

Hallamos la suma de los infinitos términos de la progresión $\frac{4}{100}, \frac{4}{1\,000}, \frac{4}{10\,000}, \ldots$, de razón $\frac{1}{10}$.

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{4}{100}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{4}{100}}{\frac{9}{10}} = \frac{4}{90} = \frac{2}{45}$$

Por tanto: $3{,}5\widehat{4} = 3 + \frac{1}{2} + \frac{2}{45} = \frac{270}{90} + \frac{45}{90} + \frac{4}{90} = \frac{319}{90}$

c) $0{,}\widehat{23} = 0{,}23 + 0{,}0023 + 0{,}000023 + \ldots$

Hallamos la suma de los infinitos términos de la progresión geométrica:

$\frac{23}{100}, \frac{23}{10\,000}, \frac{23}{100\,000}, \ldots$, de razón $\frac{1}{100}$.

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{23}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{\frac{23}{100}}{\frac{99}{100}} = \frac{23}{99}$$

Por tanto: $0{,}\widehat{23} = \frac{23}{99}$

30 **Dejamos caer una pelota desde una cierta altura y tras cada rebote, la altura alcanzada se reduce a la mitad de la altura anterior. Si en el cuarto rebote alcanzó 30 cm, ¿desde qué altura se dejó caer?**

Llamamos a_1 a la altura desde la que se dejó caer. En el primer rebote, su altura será: $a_2 = \frac{1}{2}a_1$. En el segundo rebote, $a_3 = \frac{1}{2}a_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 a_1$, etc.

Es una progresión geométrica de razón $\frac{1}{2}$, en la que sabemos que en el cuarto rebote alcanzó 30 cm; es decir: $a_5 = 30$.

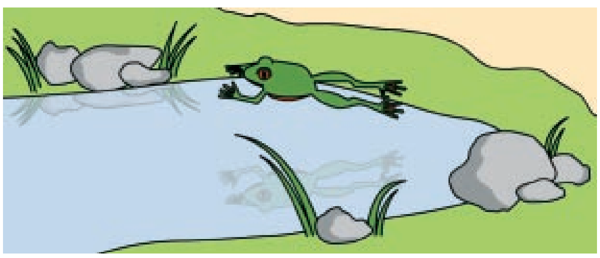
Por tanto:

$$a_5 = a_1 \cdot r^4 = a_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = a_1 \cdot \frac{1}{16} = \frac{a_1}{16} = 30 \text{ cm} \quad \to \quad a_1 = 16 \cdot 30 = 480 \text{ cm}$$

Se dejó caer desde una altura de 480 cm = 4,8 m.

31 **Una rana da saltos en línea recta hacia adelante, y cada vez salta los 2/3 del salto anterior. Quiere atravesar una charca circular de 5 m de radio, y el primer salto es de 2 m.**

¿Llegará al centro de la charca? ¿Llegará al otro lado de la charca siguiendo el diámetro?



En cada uno de sus saltos recorre:

– Primer salto $\rightarrow$ $a_1 = 2$ m.

– Segundo salto $\rightarrow$ $a_2 = \frac{2}{3}a_1 = \frac{4}{3}$ m.

– …

Es una progresión geométrica de razón $\frac{2}{3} < 1$. Lo que recorre en total es:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{2}{1-\frac{2}{3}} = \frac{2}{\frac{1}{3}} = 6 \text{ m}$$

Como el radio de la charca son 5 m, sí llegará al centro de la charca (y un metro más); pero no llegará al otro lado, pues tendría que recorrer 10 m.

32 **En el año 1986 fue visto el cometa Halley desde la Tierra, a la que se acerca cada 76 años. Esta era la cuarta vez que nos visitaba desde que el astrónomo Halley lo descubrió.**

a) ¿En qué año fue descubierto?

b) ¿Cuándo será visto en el siglo XXI?

Tenemos una progresión aritmética en la que $a_4 = 1986$ y $d = 76$.

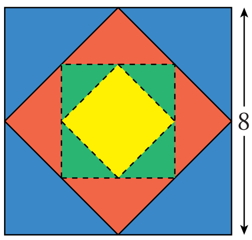
a) $a_1 = a_4 - 3d = 1986 - 3 \cdot 76 = 1986 - 228 = 1\,758$

Fue descubierto en 1758.

b) $a_5 = 1986 + 76 = 2062$

Será visto por quinta vez en el año 2062.

33 **Observa los diferentes cuadrados que hay en esta figura. Se han obtenido uniendo los puntos medios de dos lados contiguos.**



a) Halla las áreas de los seis primeros cuadrados de esta sucesión. ¿Cuál será su término general?

b) Escribe la sucesión formada por las longitudes de los lados.

c) Calcula la suma de las áreas de los infinitos cuadrados generados de esa forma.

a) Observamos que el área de cada cuadrado es la mitad del área del cuadrado anterior. Por tanto, la sucesión de las áreas es:

$a_1 = 64 \text{ cm}^2$, $a_2 = 32 \text{ cm}^2$, $a_3 = 16 \text{ cm}^2$, $a_4 = 8 \text{ cm}^2$, $a_5 = 4 \text{ cm}^2$, $a_6 = 2 \text{ cm}^2$, …

Es una progresión geométrica de razón $r = \frac{1}{2}$. El término general es:

$$a_n = 64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2^6 \cdot \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{2^6}{2^{n-1}} = 2^{6-(n-1)} = 2^{6-n+1} = 2^{7-n}$$

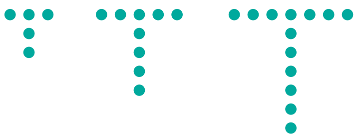
$a_n = 2^{7-n}$

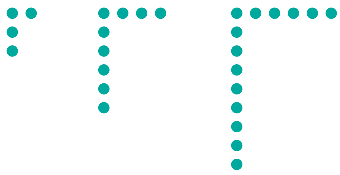
b) El lado de un cuadrado es igual a la raíz cuadrada de su área. Por tanto, la sucesión de las longitudes de los lados será: $\sqrt{64}, \sqrt{32}, \sqrt{16}, \sqrt{8}, \sqrt{4}, \sqrt{2}, \dots$

Es decir: $8, 4\sqrt{2}, 4, 2\sqrt{2}, 2, \sqrt{2}, \dots$

c) Como $a_1 = 64$ y $r = \frac{1}{2}$, tenemos que: $S_\infty = \dfrac{a_1}{1-r} = \dfrac{64}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{64}{\frac{1}{2}} = 128 \text{ cm}^2$

34 **Observa las figuras en cada caso y busca la fórmula que permita saber cuántos puntos tendrá una figura sabiendo el lugar que ocupa en la serie:**

a) 

b) 

a) $a_1 = 5, a_2 = 9, a_3 = 13, \dots$

Es una progresión aritmética con diferencia $d = 4$. Por tanto:

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 5 + (n-1) \cdot 4 = 5 + 4n - 4 = 4n + 1$

$a_n = 4n + 1$

b) $a_1 = 4, \ a_2 = 9, \ a_3 = 14, \dots$

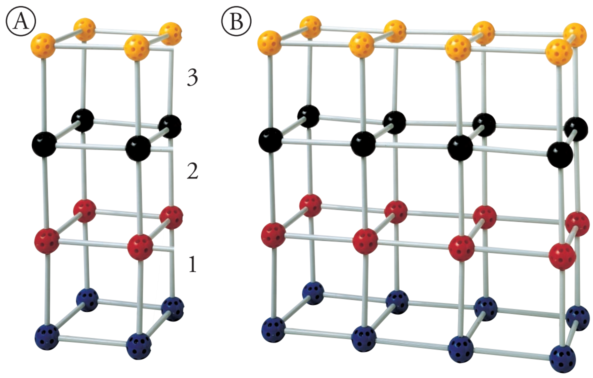
Es una progresión aritmética con diferencia $d = 5$. Por tanto:

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 4 + (n-1) \cdot 5 = 4 + 5n - 5 = 5n - 1$

$a_n = 5n - 1$

35 **Averigua cuántos palos y cuántas bolas son necesarios para hacer una estructura como la de la figura A, pero de *n* pisos.**

¿Y para la figura B?



A) BOLAS: $b_1 = 8, \ b_2 = 12, \ b_3 = 16, \dots$

Es una progresión aritmética con $d = 4$. Para que tenga n pisos, necesitaremos:

$b_n = 8 + (n-1) \cdot 4 = 8 + 4n - 4 = 4n + 4 \ \rightarrow \ b_n = 4n + 4$ bolas

PALOS: $p_1 = 12,\ p_2 = 20,\ p_3 = 28, \dots$

Es una progresión aritmética con $d = 8$. Para que tenga n pisos, necesitaremos:

$p_n = 12 + (n - 1) \cdot 8 = 12 + 8n - 8 = 8n + 4 \ \rightarrow\ p_n = 8n + 4$ palos

B) BOLAS: $b_1 = 16,\ b_2 = 24,\ b_3 = 32, \dots$

Es una progresión aritmética con $d = 8$. Para que tenga n pisos, necesitaremos:

$b_n = 16 + (n - 1) \cdot 8 = 16 + 8n - 8 = 8n + 8 \ \rightarrow\ b_n = 8n + 8$ bolas

PALOS: $p_1 = 28,\ p_2 = 46,\ p_3 = 64, \dots$

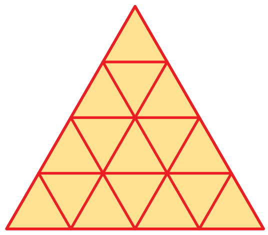
Es una progresión aritmética con $d = 18$. Para que tenga n pisos, necesitaremos:

$p_n = 28 + (n - 1) \cdot 18 = 28 + 18n - 18 = 18n + 10 \ \rightarrow\ p_n = 18n + 10$ palos

Página 81

36 Dibuja un triángulo equilátero de 16 cm de lado. Une los puntos medios de sus lados. ¿Cuántos triángulos obtienes? ¿Cuánto miden sus lados?

En estos triángulos vuelve a unir los puntos medios, y así sucesivamente. Escribe las siguientes sucesiones:



a) Número de triángulos que tienes cada vez.

b) Longitudes de los lados de esos triángulos.

c) Áreas de los triángulos.

d) Si multiplicas cada término de la sucesión obtenida en a) por el correspondiente de la sucesión obtenida en c), ¿qué obtienes?

a) $a_1 = 1,\ a_2 = 4,\ a_3 = 16,\ a_4 = 64,\ a_5 = 256, \dots$

Es una progresión geométrica de razón $r = 4$.

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 1 \cdot 4^{n-1} = 4^{n-1} \ \rightarrow\ a_n = 4^{n-1}$

b) $b_1 = 16,\ b_2 = 8,\ b_3 = 4,\ b_4 = 2,\ b_5 = 1, \dots$

Es una progresión geométrica de razón $r = \dfrac{1}{2}$.

$$b_n = b_1 \cdot r^{n-1} = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2^4 \cdot \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{2^4}{2^{n-1}} = 2^{4-(n-1)} =$$

$$= 2^{4-n+1} = 2^{5-n}$$

$b_n = 2^{5-n}$

c) $c_1 = 64\sqrt{3},\ c_2 = 16\sqrt{3},\ c_3 = 4\sqrt{3},\ c_4 = \sqrt{3},\ c_5 = \dfrac{\sqrt{3}}{4}, \dots$

Es una progresión geométrica de razón $r = \dfrac{1}{4}$.

$$c_n = c_1 \cdot r^{n-1} = 64\sqrt{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 2^6 \cdot \sqrt{3} \cdot \left(\frac{1}{2^2}\right)^{n-1} = 2^6 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2^{2n-2}} =$$

$$= \sqrt{3} \cdot \frac{2^6}{2^{2n-2}} = \sqrt{3} \cdot 2^{6-(2n-2)} =$$

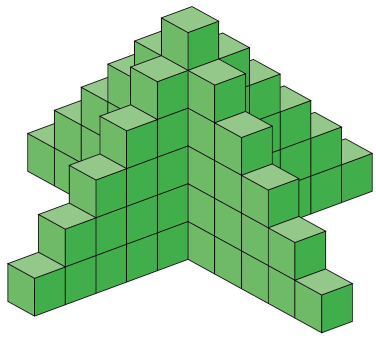
$$= \sqrt{3} \cdot 2^{6-2n+2} = \sqrt{3} \cdot 2^{8-2n}$$

$$c_n = 2^{8-2n} \cdot \sqrt{3}$$

d) El área del triángulo original = $64\sqrt{3}$ cm^2.

PROFUNDIZA

37 **Calcula el número de bloques necesarios para construir una torre como la de la figura, pero de 50 pisos.**



- El número de bloques que hay en cada piso es:

  $a_1 = 1, \ a_2 = 5, \ a_3 = 9, \ a_4 = 13, \ \dots$

- Forman una progresión aritmética con $d = 4$:

  $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 1 + (n-1) \cdot 4 = 1 + 4n - 4 = 4n - 3$

  $a_{50} = 4 \cdot 50 - 3 = 197$

  En el piso 50 hay 197 bloques.

- Para construir una torre de 50 pisos necesitaremos:

$$S_{50} = \frac{(a_1 + a_{50}) \cdot 50}{2} = \frac{(1 + 197) \cdot 50}{2} = 4\,950 \text{ bloques}$$

38 **Un hortelano debe echar un cubo de agua a cada uno de los veinte árboles que tiene. Estos están alineados a distancias regulares de 6 metros, a lo largo de un camino, y la distancia del primer árbol a la fuente es de 12 metros.**

a) Si cada vez lleva un cubo, ¿qué distancia habrá recorrido hasta regar los veinte árboles, considerando que deja el cubo en su posición inicial junto a la fuente?

b) ¿Y si llevara dos cubos en cada viaje?

a) • Para regar el primero y dejar el cubo donde estaba, recorre 12 metros de ida y 12 metros de vuelta $\rightarrow$ $a_1 = 24$.

• Para regar el segundo y dejar el cubo en la fuente, recorre 36 metros $\rightarrow$ $a_2 = 36$.

- Para regar el tercero y dejar el cubo en la fuente, recorre 48 metros $\rightarrow$ $a_3 = 48$.

  …

Es una progresión aritmética con $d = 12$.

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = 24 + (n - 1) \cdot 12 = 24 + 12n - 12 = 12n + 12$

$a_n = 12n + 12$

$a_{20} = 12 \cdot 20 + 12 = 252$

- En total recorrerá:

$$S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} = \frac{(24 + 252) \cdot 20}{2} = 2\,760 \text{ m}$$

b) • Para regar los árboles 1º y 2º, recorre (dejando el cubo en la fuente) 36 metros: $b_1 = 36$.

- Para regar los árboles 3º y 4º, recorre 60 m $\rightarrow$ $b_2 = 60$.

Es una progresión aritmética con $d = 24$.

$b_n = 36 + (n - 1) \cdot 24 = 36 + 24n - 24 = 24n + 12$

$b_{10} = 240 + 12 = 252$

En total recorrerá:

$$S_{10} = \frac{(b_1 + b_{10}) \cdot 10}{2} = \frac{(36 + 252) \cdot 10}{2} = 1\,440 \text{ m}$$

39 Un ahorrador inicia un plan de pensiones a los 45 años, con cuotas anuales de 1 200 € que paga al principio de cada año. Su contrato con el banco le asegura un 8% fijo de interés compuesto anual. ¿De qué capital dispondrá a los 65 años?

Cada cuota anual produce intereses durante el periodo que está en el banco, del siguiente modo:

1ª cuota $\rightarrow$ $1\,200 \cdot 1{,}08^{20} = 5\,593{,}15$

2ª cuota $\rightarrow$ $1\,200 \cdot 1{,}08^{19} = 5\,178{,}84$

…

Penúltima cuota $\rightarrow$ $1\,200 \cdot 1{,}08^{2} = 1\,399{,}68$

Última cuota $\rightarrow$ $1\,200 \cdot 1{,}08 = 1\,296$

Las cantidades al final de cada año forman una progresión geométrica de razón 1,08, cuyo primer término es 1 296.

$a_1 = 1\,296$; $a_2 = 1\,399{,}68$; …; $a_{20} \approx 5\,593{,}15$ forman una progresión geométrica de razón $r = 1{,}08$. Su suma es:

$$S_{20} = \frac{a_{20} \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{5\,593{,}15 \cdot 1{,}08 - 1\,296}{1{,}08 - 1} \approx 59\,307{,}525 \text{ €}$$

40 **Una persona deposita todos los años 900 € en una cuenta bancaria que le produce un 6% de interés compuesto anual. ¿Qué cantidad tendrá al cabo de 5 años? ¿Y al cabo de 10 años?**

- *Al cabo de 5 años:*

  1ª cuota $\to$ $900 \cdot 1{,}06^5 \approx 1\,204{,}4$ €

  2ª cuota $\to$ $900 \cdot 1{,}06^4 \approx 1\,136{,}23$ €

  …

  5ª cuota $\to$ $900 \cdot 1{,}06 = 954$ €

  $a_1 = 954$; …; $a_4 = 1\,136{,}23$; $a_5 = 1\,204{,}4$ forman una progresión geométrica de razón $r = 1{,}06$. Su suma es:

  $$S_5 = \frac{a_5 \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{900 \cdot 1{,}06^5 \cdot 1{,}06 - 954}{1{,}06 - 1} \approx 5\,377{,}79 \text{ €}$$

- *Al cabo de 10 años:*

  1ª cuota $\to$ $900 \cdot 1{,}06^{10}$

  2ª cuota $\to$ $900 \cdot 1{,}06^9$

  …

  Penúltima cuota $\to$ $900 \cdot 1{,}06^2$

  Última cuota $\to$ $900 \cdot 1{,}06$

  $a_1 = 900 \cdot 1{,}06$; $a_2 = 900 \cdot 1{,}06^2$; …; $a_{10} = 900 \cdot 1{,}06^{10}$ forman una progresión geométrica de razón $r = 1{,}06$. Su suma es:

  $$S_{10} = \frac{a_{10} \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{900 \cdot 1{,}06^{10} \cdot 1{,}06 - 900 \cdot 1{,}06}{1{,}06 - 1} \approx 12\,574{,}48 \text{ €}$$

41 **En una progresión geométrica, la suma de sus infinitos términos es 2, y la diferencia entre el primero y el segundo, $a_1 - a_2$, es 2/9. Halla el primer término y la razón.**

☛ ***De las dos soluciones que obtienes, solo una es válida.***

$$\left.\begin{array}{l} S_\infty = \dfrac{a_1}{1 - r} = 2 \;\to\; a_1 = 2(1 - r) \\[2ex] a_1 - a_2 = a_1 - a_1 \cdot r = a_1(1 - r) = \dfrac{2}{9} \end{array}\right\}$$

$$2(1 - r)(1 - r) = \frac{2}{9} \;\to\; (1 - r)(1 - r) = \frac{1}{9}$$

$$r^2 - 2r + 1 = \frac{1}{9} \;\to\; 9r^2 - 18r + 9 = 1$$

$$9r^2 - 18r + 8 = 0$$

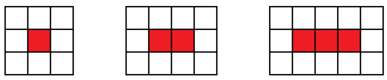
$$r = \frac{18 \pm \sqrt{324 - 288}}{18} = \frac{18 \pm \sqrt{36}}{18} = \frac{18 \pm 6}{18} = \begin{cases} r = \dfrac{24}{18} = \dfrac{4}{3} > 1 \\[2mm] r = \dfrac{12}{18} = \dfrac{2}{3} < 1 \end{cases}$$

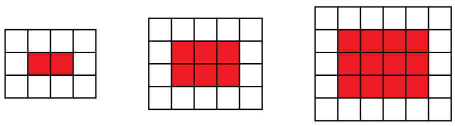
Solo es válida $r = \frac{2}{3}$ (hemos sumado los infinitos términos de la sucesión, luego $r < 1$).

$$a_1 = 2(1 - r) = 2 \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right) = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Por tanto, $a_1 = \frac{2}{3}$ y $r = \frac{2}{3}$.

42 **Observa las series de rectángulos en a) y en b).**

a) 

b) 

¿Cuántos cuadrados rojos tiene cada figura? ¿Y blancos? ¿Cuántos cuadrados rojos y cuántos blancos tendrá la figura que ocupa el lugar n en cada caso?

a) • **Rojos:** 1, 2, 3, 4, … $\rightarrow$ $a_n = n$

• **Blancos:** 8, 10, 12, 14, … $\rightarrow$ $a_n = 2n + 6$

b) • **Rojos:** 2, 6, 12, … $\rightarrow$ $a_n = n(n + 1)$

• **Blancos:** 10, 14, 18, … $\rightarrow$ $a_n = 4n + 6$