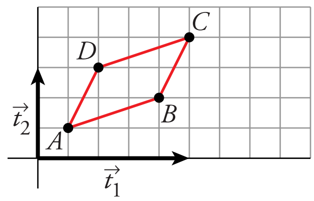
## Página 207

### PRACTICA

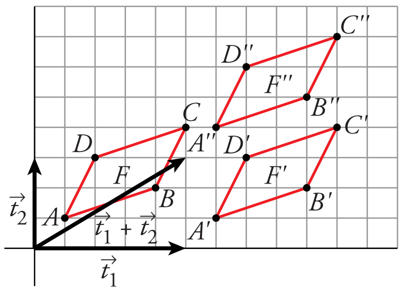
**1** Reproduce sobre papel cuadriculado el paralelogramo $F(A, B, C, D)$.




a) Sométélo a una traslación de vector $\vec{t}_1$.

b) Traslada la figura obtenida, $F'$, mediante $\vec{t}_2$.

c) Determina el vector $\vec{t}$ de una traslación que transforme directamente $F$ en $F''$.

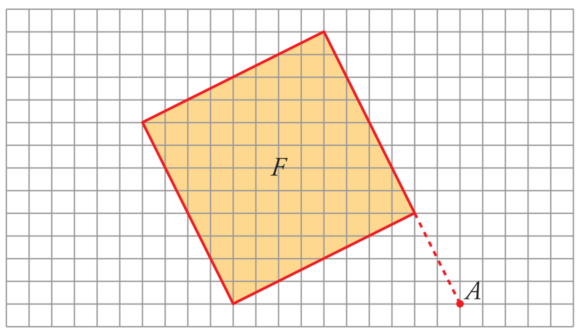



$T_1(F) = F'$ ; $T_2(F') = F''$

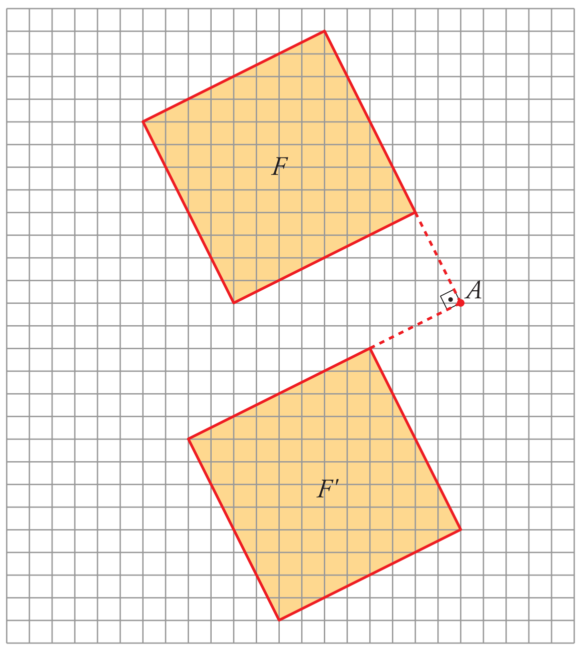
$T_2 \circ T_1(F) = F''$

- La traslación que transforma directamente $F$ en $F''$ es la de vector $\vec{t} = \vec{t}_1 + \vec{t}_2$.

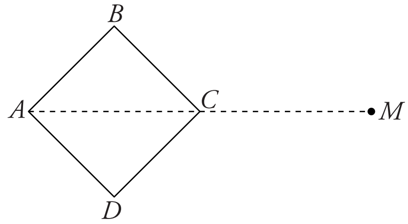
**2** Copia esta figura sobre una cuadrícula.




Dibuja su transformada según un giro de 90° alrededor del punto $A$ y en sentido contrario a las agujas del reloj.

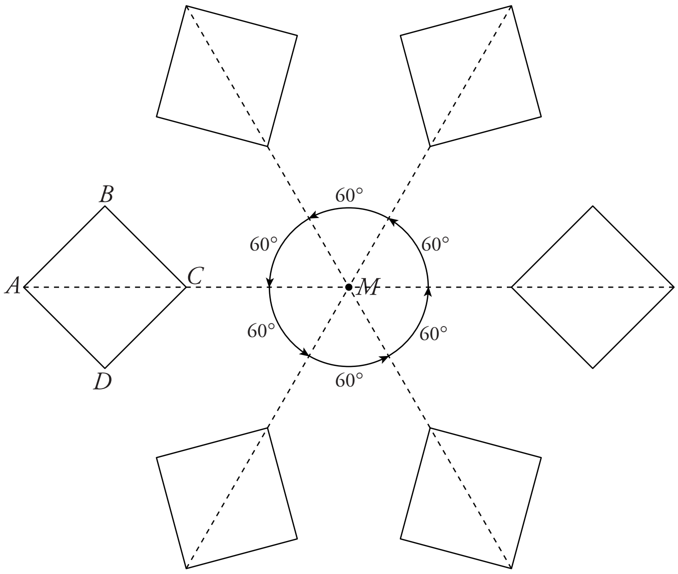


**3** Dibuja un cuadrado $ABCD$ de 3 cm de lado. Prolonga la diagonal $AC$ hasta el punto $M$, tal que $\overline{AM} = 2\overline{AC}$ (la distancia de $A$ a $M$ debe ser dos veces la de $A$ a $C$).

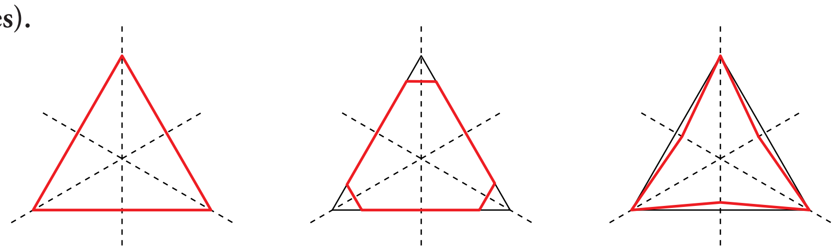



Dibuja la imagen del cuadrado en distintos giros, alrededor de $M$, de ángulos 60°, 120°, 180°, 240° y 300°.

☛ *En un arco de 60°, la cuerda es igual al radio.*




**4** Dibuja un polígono con tres ejes de simetría. (Intenta encontrar varias soluciones).



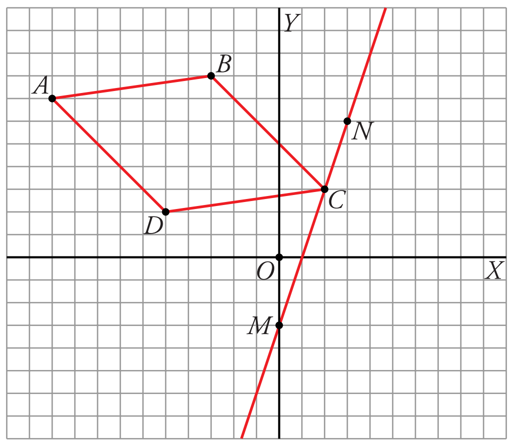
**5** Los puntos $A(-10, 7)$, $B(-3, 8)$, $C(2, 3)$ y $D(-5, 2)$ son los vértices de un rombo.

Calcula las coordenadas de los vértices del rombo transformado mediante:

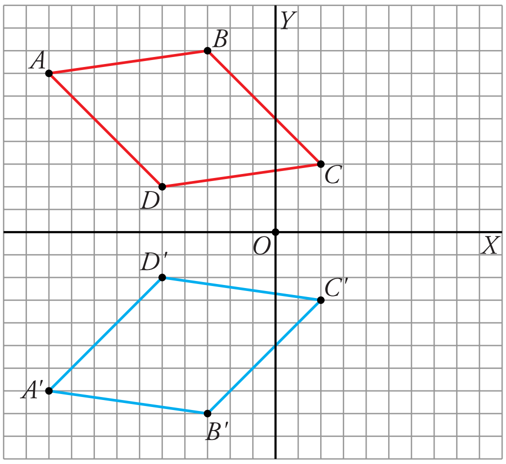
a) La simetría de eje $OX$.

b) La simetría de eje $OY$.

c) La simetría que tiene por eje la recta que pasa por los puntos $M(0, -3)$ y $N(3, 6)$.



a)



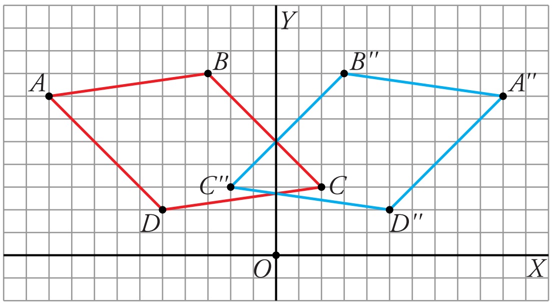

$A(-10, 7)$ $A'(-10, -7)$

$B(-3, 8)$ $B'(-3, -8)$

$C(2, 3)$ $C'(2, -3)$

$D(-5, 2)$ $D'(-5, -2)$

b)



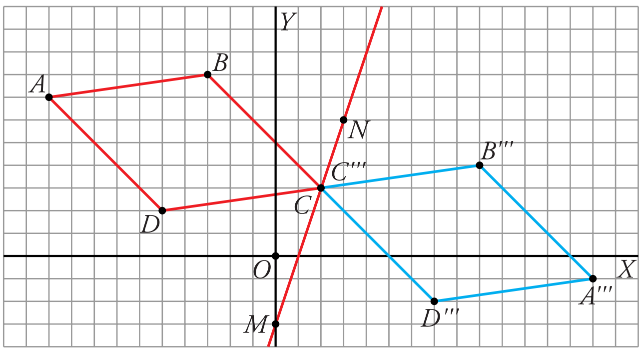

$A''(10, 7)$

$B''(3, 8)$

$C''(-2, 3)$

$D''(5, 2)$

c)



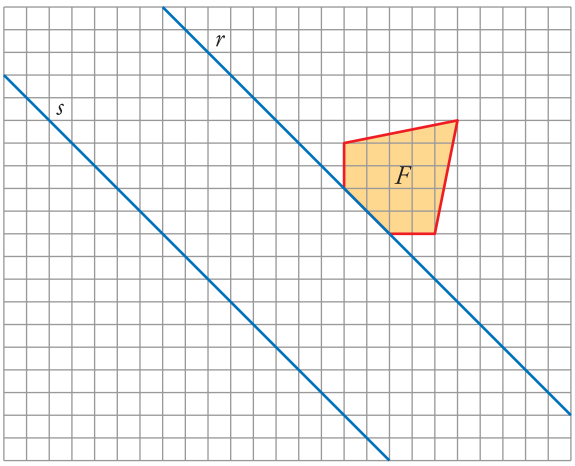

$A'''(14, -1)$

$B'''(9, 4)$

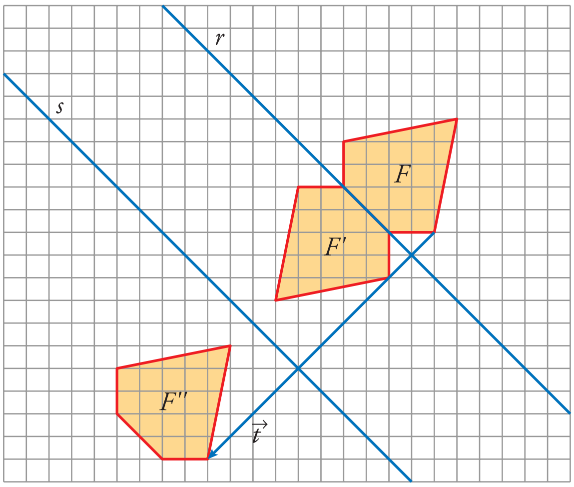
$C'''(2, 3)$

$D'''(7, -2)$

**6** **Dibuja la imagen del pentágono, *F*, al aplicarle sucesivamente las simetrías de ejes *r* y *s*.**



**Dibuja también el vector $\vec{t}$ de la traslación equivalente a la composición de dichas simetrías.**

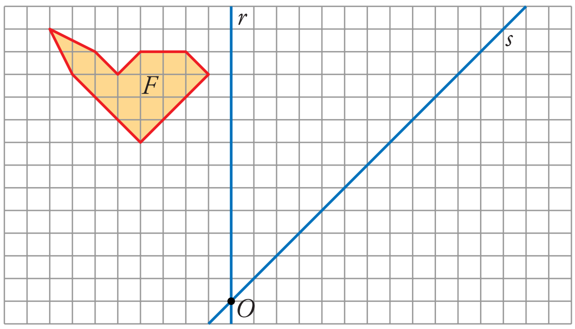



## Página 208

7 **a) Dibuja la imagen $F_1$, transformada de la figura $F$, por la simetría de eje $r$.**

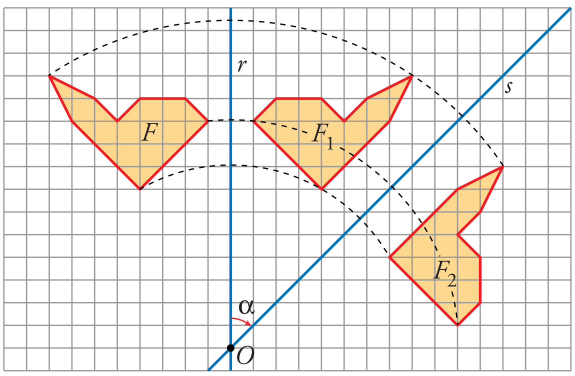
**b) Dibuja la imagen $F_2$, transformada de $F_1$ mediante la simetría de eje $s$.**

**c) Define el giro equivalente a la composición de ambas simetrías.**




**d) Define también el giro equivalente a la composición de ambas simetrías en orden inverso.**

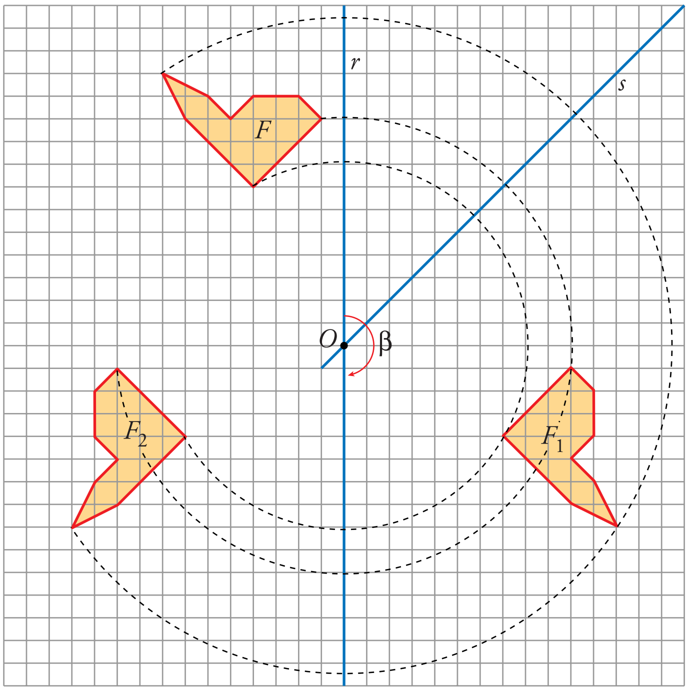
a) y b)



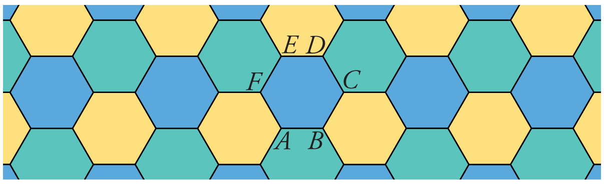

c) Es un giro de centro $O$, corte de $r$ con $s$, y ángulo $2\alpha$, doble del ángulo que forman las rectas $r$ y $s$.

d) Al aplicar primero la simetría según el eje $s$ y después según el eje $r$, se obtiene:

Corresponde a un giro de centro $O$ y ángulo $2\beta$.




**8** **Este mosaico está formado por infinitos hexágonos regulares.**




**a) Define tres traslaciones de vectores no paralelos para las cuales el mosaico sea invariante.**

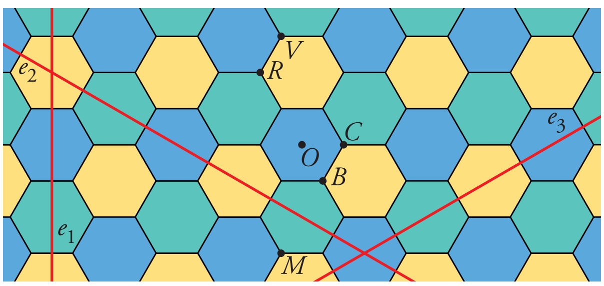
**b) Define tres giros de distintos ángulos que lo transformen en sí mismo.**

**c) Busca tres ejes de simetría del mosaico.**

a) $\overrightarrow{MV}$, $\overrightarrow{BR}$ y $\overrightarrow{MC}$.

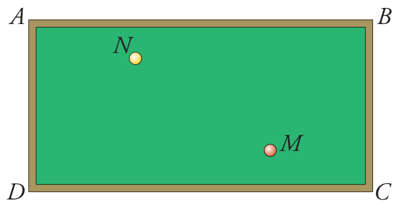
b) Giro de centro $O$ y amplitud 120°, 240° y 360°.

c) $e_1$, $e_2$ y $e_3$.

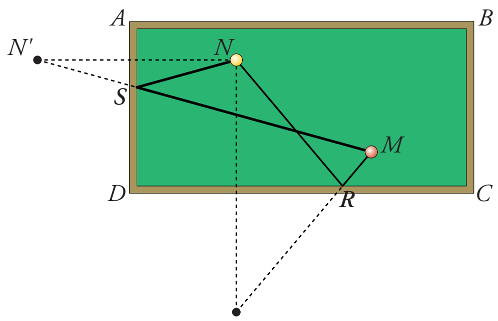


## PIENSA Y RESUELVE

**9** **$M$ y $N$ son dos bolas de billar. Busca el punto en que $M$ debe golpear la banda $DC$ para chocar después con la bola $N$.**




**Busca también el punto de la banda $AD$ hacia el que habría que lanzar $M$ para chocar con $N$.**



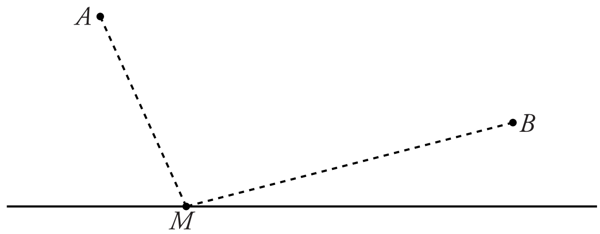

Buscamos el simétrico de $N$ respecto a la banda $DC$, $N'$, y unimos $N'$ con $M$.

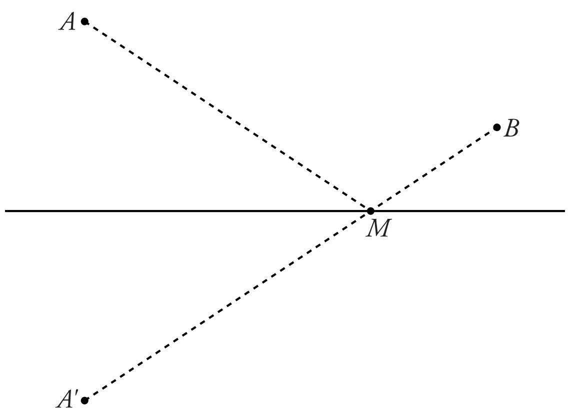
El punto de corte de $DC$ con $N'M$ es el buscado, $R$.

Se actúa de forma análoga con la banda $AD$. Se obtiene $S$.

**10** **Dos pueblos, A y B, están situados al mismo lado de una autopista.**

**Busca el trazado más corto para un tramo de carretera que los una entre sí y con la autopista.**

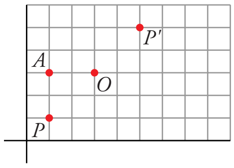



Si hallamos, por ejemplo, el simétrico del pueblo $A$ respecto a la autopista, $A'$, estará a la misma distancia de la autopista que $A$.

El camino más corto entre $A'$ y $B$ es el tramo de recta que los une. La intersección de este tramo con la autopista es el punto que buscamos, $M$.

**11** **Observa la cuadrícula.**




**Un giro de 180° alrededor de $O(3, 3)$ transforma el punto $P(1, 1)$ en $P'(5, 5)$.**

**a) Identifica otros tres movimientos que transformen $P$ en $P'$.**

**b) ¿Cuál es la imagen de $A(1, 3)$ en cada uno de ellos?**

a) Una traslación de vector $\overrightarrow{PP'}$.

Una simetría cuyo eje sea la mediatriz de $PP'$.

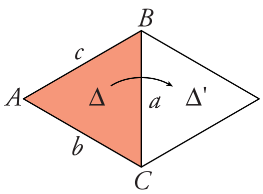
Un giro de centro en el punto (1, 5) y un ángulo de 90° en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

b) La traslación de vector $\overrightarrow{PP'}$ transforma $A(1, 3)$ en $A'(5, 7)$.

La simetría mencionada transforma $A(1, 3)$ en $A'(3, 5)$.

El giro transforma $A(1, 3)$ en $A'(3, 5)$.

**12** **El triángulo equilátero $\Delta$ se puede transformar en $\Delta'$ mediante tres movimientos distintos.**

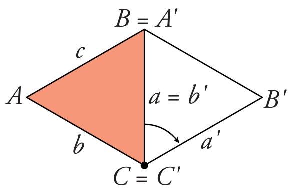



**a) Determina cada uno de los tres movimientos que transforman $\Delta$ en $\Delta'$ y designa en cada caso los vértices y los lados de $\Delta'$ teniendo en cuenta de qué vértices de $\Delta$ provienen.**

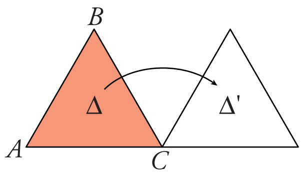
**Por ejemplo:**

**Un giro de centro $C$ y ángulo –60° transforma:**

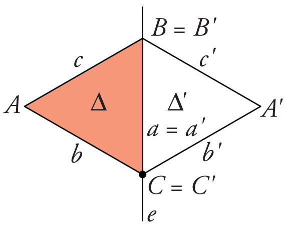
**$A \rightarrow B = A'$,**
**$B \rightarrow B'$ y $C$ en sí mismo $(C = C')$.**



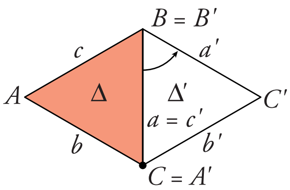

**b) Encuentra una traslación, un giro y una simetría que transformen $\Delta$ en $\Delta'$. Nombra, en cada caso, los vértices de $\Delta'$.**




a)

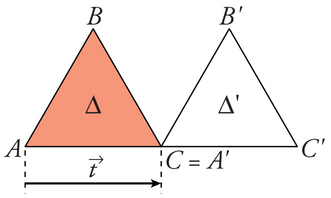



Simetría de eje $e$ (recta $BC$).

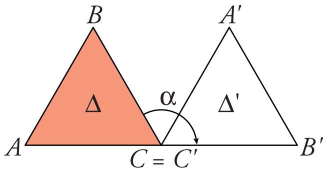



Giro de centro $B$ y ángulo 60°.

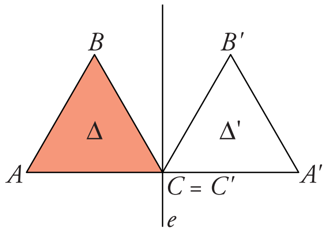
b)




Traslación de vector $\vec{t} = \vec{AC}$.




Giro de centro $C$ y ángulo $\alpha = 120°$.




Simetría de eje $e$.

## Página 209

### REFLEXIONA SOBRE LA TEORÍA

**13** **Si consideramos como transformación el que *todo quede como estaba y donde estaba*, a dicha transformación la llamaremos identidad ($I$).**

**Define una traslación y un giro que sean equivalentes a la identidad.**

- Traslación de vector $\vec{0}$.
- Giro de ángulo 0°, 360°… (con cualquier centro).

**14** **Se dice que una transformación es idempotente si compuesta consigo misma da lugar a la identidad (es decir, si la aplicamos dos veces, todo queda como estaba: $\mathcal{T} \circ \mathcal{T} = I$).**

**Encuentra dos movimientos que sean idempotentes.**

Por ejemplo, una simetría de un cierto eje $e$, y un giro de 180° (con cualquier centro).

**15** **Se dice que una transformación $\mathcal{T}'$ es inversa de otra $\mathcal{T}$ cuando compuesta con ella da lugar a la identidad (es decir, si aplicamos $\mathcal{T}$ y después $\mathcal{T}'$, todo vuelve a donde estaba).**

**Encuentra la transformación inversa en cada uno de los siguientes casos:**

**a) Una traslación de vector $\vec{t}(7, -4)$.**

**b) Un giro de centro $O(0, 0)$ y ángulo $\alpha = 60°$.**

**c) Una simetría de eje la recta $y = x$.**

a) Una traslación de vector $\vec{t}\,'$ (–7, 4).

b) Un giro de centro $O(0, 0)$ y ángulo $\alpha' = -60°$.

c) Es inversa de sí misma: una simetría de eje la recta $y = x$.

**16** **La composición de transformaciones no cumple la propiedad conmutativa (es decir, $\mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1$, en general, es distinto que $\mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2$). Sin embargo, si las transformaciones son de ciertos tipos, sí se cumple la propiedad conmutativa.**

**Justifica en cuáles de los siguientes casos es así y en cuáles no:**

**a) Composición de dos traslaciones.**

**b) Composición de dos giros del mismo centro.**

**c) Composición de dos simetrías axiales.**

**d) Composición de una traslación y un giro.**

a) Sí es conmutativa. El resultado es otra traslación de vector igual al vector suma de los correspondientes a las dos traslaciones.

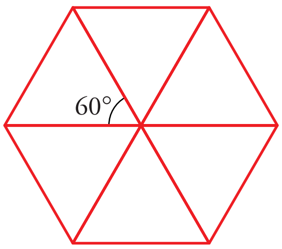
b) Sí es conmutativa. El resultado es otro giro del mismo centro y ángulo igual a la suma de los ángulos correspondientes a los dos giros.

c) No es conmutativa.

d) No es conmutativa.

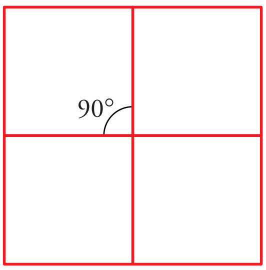
**17** **Justifica que solo se puede hacer un mosaico regular con triángulos, cuadrados o hexágonos. Para ello ten en cuenta cuánto deben sumar los ángulos de los polígonos que concurren en un vértice de un mosaico y cuánto vale el ángulo de cada uno de los polígonos regulares.**

• Seis triángulos equiláteros encajan en el plano, pues sus ángulos suman 360°:



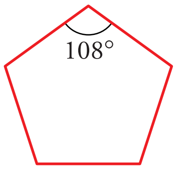

$60° \cdot 6 = 360°$

• Cuatro cuadrados encajan en el plano, pues sus ángulos suman 360°:




$90° \cdot 4 = 360°$

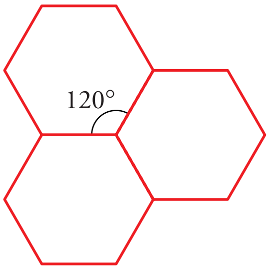
- No podemos encajar los pentágonos regulares:




180° · 3 = 324° → Con tres pentágonos no llega a 360°.

180° · 4 = 432° → Con cuatro pentágonos pasamos de 360°.

- Tres hexágonos regulares encajan en el plano, pues sus ángulos suman 360°:



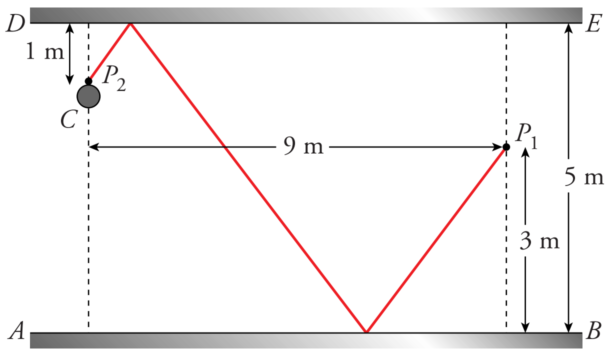

120° · 3 = 360°

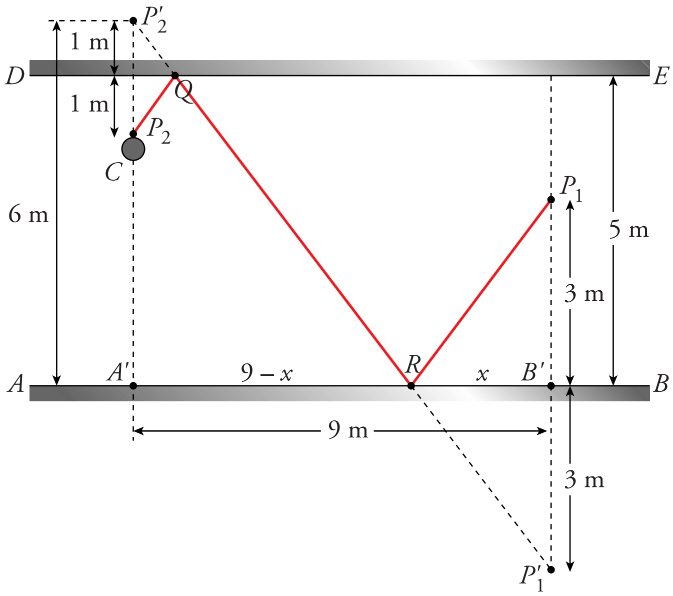
- Al considerar tres polígonos de más de 6 lados, la suma de los tres ángulos correspondientes es mayor de 360°; luego no se pueden encajar en el plano.

## PROFUNDIZA

**18** **Dos personas, $P_1$ y $P_2$, se encuentran en un pasillo de espejos.**

**Teniendo en cuenta la columna $C$, halla la distancia a la que $P_1$ cree ver a $P_2$ cuando $P_1$ mira hacia el espejo $AB$.**



$P'_1$ es el simétrico de $P_1$ respecto al espejo $AB$.

$P'_2$ es el simétrico de $P_2$ respecto al espejo $DE$.

$P_1$ ve reflejado en $AB$ a $P_2$ en el punto $R$. Hemos de calcular las distancias de $P_1$ a $R$, de $R$ a $Q$ y de $Q$ a $P_2$.

Los triángulos $A'P'_2R$ y $B'RP_1$ son semejantes. Por tanto:

$$\frac{6}{3} = \frac{9-x}{x} \rightarrow 6x = 27 - 3x \rightarrow 9x = 27 \rightarrow x = 3 \text{ m}$$

$$\overline{P_1R} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \text{ m}$$

$$\overline{RP'_2} = \overline{RQ} + \overline{QP_2}$$

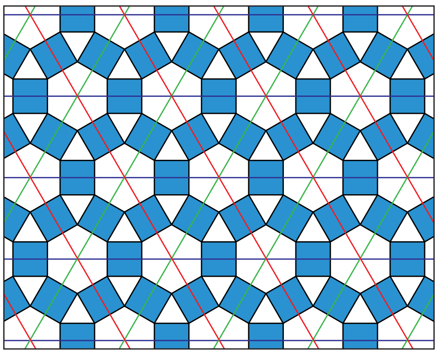
$\overline{RP'_2}$ es la hipotenusa del triángulo rectángulo de catetos 6 m y 6 m.

$$\overline{RP'_2} = 6\sqrt{2} \text{ m}$$

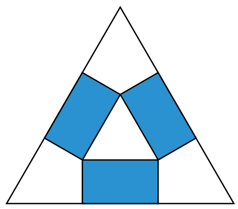
La distancia a la que $P_1$ cree ver a $P_2$ es $3\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$ m.

**19** **Se llama motivo mínimo de un mosaico a una pieza teórica, lo más pequeña posible, repitiendo la cual se puede reproducir todo el mosaico. Los bordes de esta pieza “no se notan” salvo que los hayamos pintado expresamente.**

**Por ejemplo, si en el siguiente mosaico trazamos ejes de simetría con ángulos de 60°:**



**descubrimos esta pieza como candidata a “motivo mínimo”.**



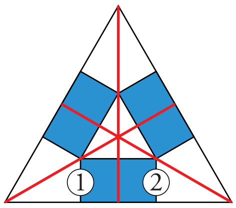
**a) Redúcela a la tercera parte de dos formas distintas.**

**b) ¿Puedes hacerla aún más pequeña?**

**c) Descubre otro “motivo mínimo” trazando ejes de simetría perpendiculares.**

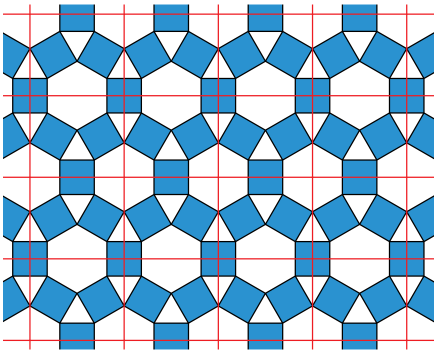
a)

b) *No*. Observa que, si lo dividimos de esta forma:




la pieza 1 y la 2 son simétricas, pero *no* podemos obtener una a partir de la otra solo con giros y traslaciones.

Por tanto, esta división no es válida.

c) 

Otro "motivo mínimo" es el siguiente: