

Página 107

PRACTICA

Ecuaciones de primer grado

1 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a)
$$\frac{1 + 12x}{4} + \frac{x - 4}{2} = \frac{3(x + 1) - (1 - x)}{8}$$

b)
$$\frac{3x - 2}{6} - \frac{4x + 1}{10} = -\frac{2}{15} - \frac{2(x - 3)}{4}$$

c)
$$\frac{2x - 3}{6} - \frac{3(x - 1)}{4} - \frac{2(3 - x)}{6} + \frac{5}{8} = 0$$

d)
$$\frac{2}{3}(x + 3) - \frac{1}{2}(x + 1) = 1 - \frac{3}{4}(x + 3)$$

e)
$$6\left(\frac{x + 1}{8} - \frac{2x - 3}{16}\right) = 3\left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}\right) - \frac{3}{8}(3x - 2)$$

a)
$$\frac{1 + 12x}{4} + \frac{x - 4}{2} = \frac{3(x + 1) - (1 - x)}{8}$$

Multiplicamos toda la ecuación por 8:

$$2(1 + 12x) + 4(x - 4) = 3(x + 1) - (1 - x) \rightarrow 2 + 24x + 4x - 16 = 3x + 3 - 1 + x$$

$$= 3x + 3 - 1 + x$$

$$24x - 16 = 0 \rightarrow x = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$

b)
$$\frac{3x - 2}{6} - \frac{4x + 1}{10} = -\frac{2}{15} - \frac{2(x - 3)}{4}$$

Multiplicamos la ecuación por 60:

$$10(3x - 2) - 6(4x + 1) = -2 \cdot 4 - 15 \cdot 2(x - 3)$$

$$30x - 20 - 24x - 6 = -8 - 30x + 90$$

$$36x = 108 \rightarrow x = \frac{108}{36} = 3$$

c)
$$\frac{2x - 3}{6} - \frac{3(x - 1)}{4} - \frac{2(3 - x)}{6} + \frac{5}{8} = 0$$

Multiplicamos toda la ecuación por 24:

$$4(2x - 3) - 6 \cdot 3(x - 1) - 4 \cdot 2(3 - x) + 3 \cdot 5 = 0$$

$$8x - 12 - 18x + 18 - 24 + 8x + 15 = 0$$

$$-2x = 3 \rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

$$d) \frac{2}{3}(x+3) - \frac{1}{2}(x+1) = 1 - \frac{3}{4}(x+3)$$

Multiplicamos toda la ecuación por 12:

$$4 \cdot 2(x+3) - 6(x+1) = 12 - 3 \cdot 3(x+3)$$

$$8x + 24 - 6x - 6 = 12 - 9x - 27$$

$$11x = -33 \rightarrow x = -\frac{33}{11} = -3$$

$$e) 6\left(\frac{x+1}{8} - \frac{2x-3}{16}\right) = 3\left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}\right) - \frac{3}{8}(3x-2)$$

$$3\left(\frac{x+1}{8} - \frac{2x-3}{16}\right) = 3\left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}\right) - \frac{3}{8}(3x-2)$$

Simplificamos la ecuación dividiendo entre 3:

$$\frac{x+1}{4} - \frac{2x-3}{8} = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4} - \frac{3}{8}(3x-2)$$

Multiplicamos por 24:

$$6(x+1) - 3(2x-3) = 6 \cdot 3x - 6 - 3(3x-2)$$

$$6x + 6 - 6x + 9 = 18x - 6 - 9x + 6 \rightarrow 15 = 9x \rightarrow x = \frac{15}{9} \rightarrow x = \frac{5}{3}$$

2 Las siguientes ecuaciones son de primer grado. Compruébalo y resuélvelas:

$$a) (x+1)^2 + (x-2)^2 = (x+2)^2 + (x-1)^2$$

$$b) 4(x-3)(x+3) - (2x+1)^2 = 3$$

$$c) (x-3)^2 + 1 = (x+2)^2 - 4x - 3(x-1)$$

$$d) 5(x-3)^2 + x^2 - 46 = -(2x+1)(1-3x)$$

$$e) (4x-3)(7x+2) - (3-4x)^2 = 3x(4x-5) - 2$$

$$a) (x+1)^2 + (x-2)^2 = (x+2)^2 + (x-1)^2$$

$$x^2 + 2x + 1 + x^2 - 4x + 4 = x^2 + 4x + 4 + x^2 - 2x + 1$$

$$-2x + 5 = 2x + 5 \rightarrow -4x = 0 \rightarrow x = 0$$

$$b) 4(x-3)(x+3) - (2x+1)^2 = 3$$

$$4(x^2 - 9) - 4x^2 - 4x - 1 = 3$$

$$4x^2 - 36 - 4x^2 - 4x - 1 = 3$$

$$-4x = 40 \rightarrow x = \frac{40}{-4} = -10$$

$$c) (x-3)^2 + 1 = (x+2)^2 - 4x - 3(x-1)$$

$$x^2 - 6x + 9 + 1 = x^2 + 4x + 4 - 4x - 3x + 3$$

$$-3x = -3 \rightarrow x = 1$$

$$d) 5(x-3)^2 + x^2 - 46 = -(2x+1)(1-3x)$$

$$5(x^2 - 6x + 9) + x^2 - 46 = -(2x - 6x^2 + 1 - 3x)$$

$$5x^2 - 30x + 45 + x^2 - 46 = 6x^2 + x - 1$$

$$-31x = 0 \rightarrow x = 0$$

$$e) (4x-3)(7x+2) - (3-4x)^2 = 3x(4x-5) - 2$$

$$28x^2 + 8x - 21x - 6 - 9 + 24x - 16x^2 = 12x^2 - 15x - 2$$

$$26x = 13 \rightarrow x = \frac{13}{26} = \frac{1}{2}$$

3 Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$a) \frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(2x-1)^2}{16} = \frac{35}{16}$$

$$b) \frac{x+3}{5} + \frac{(x-1)^2}{4} = \frac{1}{4}x^2 - \left(\frac{x}{2} + 2\right)$$

$$c) \frac{1}{2}[1 - (x+2)^2] = -x - \frac{x^2-1}{2}$$

$$d) \frac{1}{2}[2(x+1) - (x-3)^2] = \frac{1}{2}[3(x-1) - \frac{2}{3}(x+1)^2]$$

Para comprobar que son ecuaciones de primer grado, simplificamos las ecuaciones al máximo antes de resolverlas:

$$a) \frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(2x-1)^2}{16} = \frac{35}{16}$$

$$4(x^2 + 9 - 6x) - (4x^2 + 1 - 4x) = 35 \rightarrow 4x^2 + 36 - 24x - 4x^2 - 1 + 4x = 35$$

$$-20x = 0 \rightarrow \text{Ecuación de primer grado}$$

$$20x = 0 \rightarrow x = 0$$

$$b) \frac{x+3}{5} - \frac{(x-1)^2}{4} = \frac{-1}{4}x^2 - \left(\frac{x}{2} + 2\right)$$

$$4(x+3) - 5(x^2 + 1 - 2x) = -5x^2 - 10x - 40$$

$$4x + 12 - 5x^2 - 5 + 10x = -5x^2 - 10x - 40 \rightarrow 24x = -47 \rightarrow x = -\frac{47}{24}$$

$$c) \frac{1}{2} [1 - (x+2)^2] = -x - \frac{x^2 - 1}{2}$$

$$1 - (x^2 + 4 + 4x) = -2x - x^2 + 1 \rightarrow 1 - x^2 - 4 - 4x = -2x - x^2 + 1$$

$$-3 - 4x = -2x + 1 \rightarrow \text{Ecuación de primer grado}$$

$$-3 - 4x = -2x + 1 \rightarrow 2x = -4 \rightarrow x = -2$$

$$d) \frac{1}{2} [2(x+1) - (x-3)^2] = \frac{1}{2} \left[3(x-1) - \frac{2}{3}(x+1)^2 \right]$$

$$2x + 2 - (x^2 + 9 - 6x) = 3x - 3 - \frac{2}{3}(x^2 + 2x + 1)$$

$$6x + 6 - 3x^2 - 27 + 18x = 9x - 9 - 2x^2 - 4x - 2$$

$$-x^2 - 25x - 10 = 0 \rightarrow x^2 + 25x + 10 = 0$$

$$-x^2 + 19x - 10 = 0 \rightarrow x^2 - 19x + 10 = 0$$

$$x = \frac{19 \pm \sqrt{361 - 40}}{2} \begin{cases} x_1 = \frac{19 + \sqrt{321}}{2} \\ x_2 = \frac{19 - \sqrt{321}}{2} \end{cases}$$

4 Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$a) \frac{1 - 2x}{9} = 1 - \frac{x + 4}{6}$$

$$b) \frac{3x + 2}{5} - \frac{4x - 1}{10} + \frac{5x - 2}{8} = \frac{x + 1}{4}$$

$$c) (3x + 2)^2 + 3(1 - 3x)x = 2(x - 11)$$

$$d) (2x - 3)^2 + (x - 2)^2 = 3(x + 1) + 5x(x - 1)$$

$$a) \frac{1 - 2x}{9} = 1 - \frac{x + 4}{6}$$

Quitamos los denominadores, multiplicando por 18 en ambos miembros:

$$2(1 - 2x) = 18 - 3(x + 4) \rightarrow 2 - 4x = 18 - 3x - 12 \rightarrow x = -4$$

$$b) \frac{3x + 2}{5} - \frac{4x - 1}{10} + \frac{5x - 2}{8} = \frac{x + 1}{4}$$

Multiplicamos toda la ecuación por 40:

$$8(3x + 2) - 4(4x - 1) + 5(5x - 2) = 10(x + 1)$$

$$24x + 16 - 16x + 4 + 25x - 10 = 10x + 10 \rightarrow 23x = 0 \rightarrow x = 0$$

$$c) (3x + 2)^2 + 3(1 - 3x)x = 2(x - 11)$$

$$9x^2 + 4 + 12x + 3x - 9x^2 = 2x - 22 \rightarrow 13x + 26 = 0 \rightarrow x = -2$$

$$d) (2x - 3)^2 + (x - 2)^2 = 3(x + 1) + 5x(x - 1)$$

$$4x^2 + 9 - 12x + x^2 + 4 - 4x = 3x + 3 + 5x^2 - 5x \rightarrow 14x = 10 \rightarrow x = \frac{5}{7}$$

Inecuaciones

5 (ESTÁ RESUELTO EN EL LIBRO).

6 Halla el conjunto de soluciones de las inecuaciones siguientes:

a) $3x - 7 < 5$

b) $2 - x > 3$

c) $7 \geq 8x - 5$

d) $1 - 5x \leq -8$

a) $3x - 7 < 5$

$$3x < 5 + 7 \rightarrow x < \frac{12}{3} \rightarrow x < 4 \rightarrow (-\infty, 4)$$

b) $2 - x > 3$

$$-x > 1 \rightarrow x < -1 \rightarrow (-\infty, -1)$$

c) $7 \geq 8x - 5$

$$8x \leq 7 + 5 \rightarrow x \leq \frac{12}{8} \rightarrow x \leq \frac{3}{2} \rightarrow \left(-\infty, \frac{3}{2}\right]$$

d) $1 - 5x \leq -8$

$$-5x \leq -9 \rightarrow x \geq \frac{9}{5} \rightarrow \left[\frac{9}{5}, +\infty\right)$$

7 Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $\frac{2(x+2)}{3} < 2x$

b) $\frac{x-1}{2} > x+1$

c) $\frac{x-4}{4} + 1 \leq \frac{x+4}{8}$

d) $1 - x \leq \frac{x}{3}$

a) $\frac{2(x+2)}{3} < 2x$

$$2x + 4 < 6x \rightarrow 4x > 4 \rightarrow x > 1 \rightarrow (1, +\infty)$$

b) $\frac{x-1}{2} > x+1$

$$x - 1 > 2x + 2 \rightarrow x < -3 \rightarrow (-\infty, -3)$$

c) $\frac{x-4}{4} + 1 \leq \frac{x+4}{8}$

$$2x - 8 + 8 \leq x + 4 \rightarrow x \leq 4 \rightarrow (-\infty, 4]$$

$$d) 1 - x \leq \frac{x}{3}$$

$$3 - 3x \leq x \rightarrow -4x \leq -3 \rightarrow x \geq \frac{3}{4} \rightarrow \left[\frac{3}{4}, +\infty \right)$$

8 Traduce a lenguaje algebraico:

a) El cuadrado de un número es menor que el doble de ese número más 15.

b) Si creciera 15 cm, superaría la estatura que se requiere para entrar en el equipo de baloncesto, que es 1,80 cm.

a) $x \rightarrow$ número

$$x^2 < 2x + 15$$

b) $x =$ estatura actual $\rightarrow x + 15 > 1,80$

Ecuaciones de segundo grado

9 Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$a) 4x^2 - 64 = 0$$

$$b) 3x^2 - 9x = 0$$

$$c) x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$d) 2x^2 - 7x - 4 = 0$$

$$a) 4x^2 - 64 = 0$$

$$4x^2 = 64 \rightarrow x^2 = \frac{64}{4} \rightarrow x^2 = 16 \rightarrow x = \pm 4$$

$$\text{Soluciones: } x_1 = 4, x_2 = -4$$

$$b) 3x^2 - 9x = 0$$

$$3x(x-3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases} \rightarrow x = 3$$

$$\text{Soluciones: } x_1 = 0, x_2 = 3$$

$$c) x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

$$\text{Soluciones: } x_1 = 3, x_2 = -1$$

$$d) 2x^2 - 7x - 4 = 0$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 32}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{81}}{4} = \frac{7 \pm 9}{4} = \begin{cases} 4 \\ -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Soluciones: } x_1 = 4, x_2 = -\frac{1}{2}$$

10 Halla las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $3x(x+4) - x(x-1) = 15$

b) $(x+4)^2 - (2x-1)^2 = 8x$

c) $2x + 3(x-4)^2 = 37 + (x-3)(x+3)$

a) $3x(x+4) - x(x-1) = 15$

$$3x^2 + 12x - x^2 + x = 15 \rightarrow 2x^2 + 13x - 15 = 0$$

$$x = \frac{-13 \pm \sqrt{169 + 120}}{4} = \frac{-13 \pm 17}{4} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -\frac{30}{4} = -\frac{15}{2} \end{cases}$$

b) $(x+4)^2 - (2x-1)^2 = 8x$

$$x^2 + 8x + 16 - 4x^2 + 4x - 1 = 8x \rightarrow -3x^2 + 4x + 15 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 180}}{-6} = \frac{-4 \pm 14}{-6} \begin{cases} x_1 = -5/3 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

c) $2x + 3(x-4)^2 = 37 + (x-3)(x+3)$

$$2x + 3x^2 - 24x + 48 = 37 + x^2 - 9 \rightarrow 2x^2 - 22x + 20 = 0 \rightarrow x^2 - 11x + 10 = 0$$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 40}}{2} = \frac{11 \pm 9}{2} \begin{cases} x_1 = 10 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Página 108**11** Resuelve:

a) $(x-3)(x+3) + (x-4)(x+4) = 25$

b) $(x+1)(x-3) + (x-2)(x-3) = x^2 - 3x - 1$

c) $2x(x+3) - 2(3x+5) + x = 0$

a) $(x-3)(x+3) + (x-4)(x+4) = 25$

$$x^2 - 9 + x^2 - 16 = 25 \rightarrow 2x^2 = 50 \rightarrow x^2 = 25 \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -5 \end{cases}$$

b) $(x+1)(x-3) + (x-2)(x-3) = x^2 - 3x - 1$

$$x^2 + x - 3x - 3 + x^2 - 5x + 6 = x^2 - 3x - 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow (x-2)^2 = 0 \rightarrow x = 2$$

c) $2x(x+3) - 2(3x+5) + x = 0$

$$2x^2 + 6x - 6x - 10 + x = 0 \rightarrow 2x^2 + x - 10 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 80}}{4} = \frac{-1 \pm 9}{4} \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -5/2 \end{cases}$$

12 Las siguientes ecuaciones son de segundo grado e incompletas. Resuélvelas sin aplicar la fórmula general:

$$a) (3x + 1)(3x - 1) + \frac{1}{2}(x - 2)^2 = 1 - 2x$$

$$b) \frac{x^2 + 2}{3} - \frac{x^2 + 1}{4} = 1 - \frac{x + 7}{12}$$

$$c) \frac{(2x - 1)(2x + 1)}{3} + \frac{(x - 2)^2}{4} = \frac{3x + 4}{6} + \frac{x^2}{3}$$

$$a) (3x + 1)(3x - 1) + \frac{1}{2}(x - 2)^2 = 1 - 2x$$

$$9x^2 - 1 + \frac{x^2 - 4x + 4}{2} = 1 - 2x \rightarrow 18x^2 - 2 + x^2 - 4x + 4 = 2 - 4x$$

$$19x^2 = 0 \rightarrow x = 0$$

$$b) \frac{x^2 + 2}{3} - \frac{x^2 + 1}{4} = 1 - \frac{x + 7}{12}$$

$$4x^2 + 8 - 3x^2 - 3 = 12 - x - 7 \rightarrow x^2 + x = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x(x + 1) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

$$c) \frac{(2x - 1)(2x + 1)}{3} + \frac{(x - 2)^2}{4} = \frac{3x + 4}{6} + \frac{x^2}{3}$$

$$\frac{4x^2 - 1}{3} + \frac{x^2 - 4x + 4}{4} = \frac{3x + 4 + 2x^2}{6} \rightarrow 16x^2 - 4 + 3x^2 - 12x + 12 =$$

$$= 6x + 8 + 4x^2 \rightarrow 15x^2 - 18x = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x(15x - 18) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{6}{5} \end{cases}$$

13 Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado:

$$a) (x + 1)^2 - 3x = 3$$

$$b) (2x + 1)^2 = 1 + (x - 1)(x + 1)$$

$$c) \frac{(x + 1)(x - 3)}{2} + x = \frac{x}{4}$$

$$d) x + \frac{3x + 1}{2} - \frac{x - 2}{3} = x^2 - 2$$

$$e) \frac{x}{3}(x - 1) - \frac{x}{4}(x + 1) + \frac{3x + 4}{12} = 0$$

$$a) (x+1)^2 - 3x = 3$$

$$x^2 + 2x + 1 - 3x - 3 = 0 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

$$b) (2x+1)^2 = 1 + (x-1)(x+1)$$

$$4x^2 + 1 + 4x = 1 + x^2 - 1 \rightarrow 3x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{6} = \frac{-4 \pm 2}{6} \begin{cases} x_1 = -1/3 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

$$c) \frac{(x+1)(x-3)}{2} + x = \frac{x}{4}$$

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{2} + x = \frac{x}{4} \rightarrow 2x^2 - 4x - 6 + 4x = x \rightarrow 2x^2 - x - 6 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{4} = \frac{1 \pm 7}{4} \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -3/2 \end{cases}$$

$$d) x + \frac{3x+1}{2} - \frac{x-2}{3} = x^2 - 2$$

$$6x + 9x + 3 - 2x + 4 = 6x^2 - 12 \rightarrow 6x^2 - 13x - 19 = 0$$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{169+456}}{12} = \frac{13 \pm 25}{12} \begin{cases} x_1 = 19/6 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

$$e) \frac{x}{3}(x-1) - \frac{x}{4}(x+1) + \frac{3x+4}{12} = 0$$

$$4x(x-1) - 3x(x+1) + 3x+4 = 0$$

$$4x^2 - 4x - 3x^2 - 3x + 3x + 4 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = 2$$

Solución: $x = 2$

14 Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$a) \frac{x^2+1}{3} - 1 = \frac{x^2-4}{6} + x$$

$$b) \frac{x^2-x-4}{4} = \frac{x^2+x-2}{2}$$

$$c) x(x-3) + (x+4)(x-4) = 2 - 3x$$

$$a) \frac{x^2 + 1}{3} - 1 = \frac{x^2 - 4}{6} + x$$

$$\frac{2x^2 + 2 - 6}{6} = \frac{x^2 - 4 + 6x}{6} \rightarrow x^2 - 6x = 0 \rightarrow x(x - 6) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 6 \end{cases}$$

$$b) \frac{x^2 - x - 4}{4} = \frac{x^2 + x - 2}{2}$$

$$\frac{x^2 - x - 4}{4} = \frac{2x^2 + 2x - 4}{4} \rightarrow x^2 + 3x = 0 \rightarrow x(x + 3) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

$$c) x(x - 3) + (x + 4)(x - 4) = 2 - 3x$$

$$x^2 - 3x + x^2 - 16 = 2 - 3x \rightarrow 2x^2 = 18 \rightarrow x^2 = 9 \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

Otras ecuaciones

15 Di cuáles son las soluciones de estas ecuaciones:

$$a) (x - 2)(x + 3)(2x - 5) = 0$$

$$b) x^2(x - 7)(4x - 1) = 0$$

$$c) (x + 2)(x^2 + 4) = 0$$

$$a) (x - 2)(x + 3)(2x - 5) = 0 \begin{cases} x - 2 = 0 \rightarrow x_1 = 2 \\ x + 3 = 0 \rightarrow x_2 = -3 \\ 2x - 5 = 0 \rightarrow x_3 = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$b) x^2(x - 7)(4x - 1) = 0 \begin{cases} x^2 = 0 \rightarrow x_1 = 0 \\ x - 7 = 0 \rightarrow x_2 = 7 \\ 4x - 1 = 0 \rightarrow x_3 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$c) (x + 2)(x^2 + 4) = 0 \rightarrow x + 2 = 0 \rightarrow x = -2$$

El factor $x^2 + 4$ es siempre distinto de 0, para cualquier valor de x real.

16 Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$a) x^4 - 5x^2 - 36 = 0$$

$$b) x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

$$c) 36x^4 - 13x^2 + 1 = 0$$

$$d) x^4 - x^2 = 0$$

$$\text{a) } x^4 - 5x^2 - 36 = 0$$

$$x^2 = y \rightarrow x^4 = y^2$$

$$y^2 - 5y - 36 = 0 \rightarrow y = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 144}}{2} = \frac{5 \pm 13}{2} \begin{cases} y_1 = 9 \\ y_2 = -4 \end{cases}$$

$$x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3$$

$$x^2 = -4 \rightarrow \text{no hay solución} \left. \vphantom{x^2 = -4} \right\} \rightarrow \text{Soluciones: } x_1 = 3, x_2 = -3$$

$$\text{b) } x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

$$x^2 = y \rightarrow x^4 = y^2$$

$$y^2 - 5y + 4 = 0 \rightarrow y = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \begin{cases} y_1 = 4 \\ y_2 = 1 \end{cases}$$

$$x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$$

$$x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$

$$\left. \vphantom{x^2 = 4} \right\} \rightarrow \text{Soluciones: } x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = 1, x_4 = -1$$

$$\text{c) } 36x^4 - 13x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = y \rightarrow x^4 = y^2$$

$$36y^2 - 13y + 1 = 0 \rightarrow y = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{72} = \frac{13 \pm 5}{72} \begin{cases} y_1 = \frac{18}{72} = \frac{1}{4} \\ y_2 = \frac{8}{72} = \frac{1}{9} \end{cases}$$

$$x^2 = \frac{1}{4} \rightarrow x = \pm \frac{1}{2}$$

$$x^2 = \frac{1}{9} \rightarrow x = \pm \frac{1}{3}$$

$$\text{Soluciones: } x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -\frac{1}{2}, x_3 = \frac{1}{3}, x_4 = -\frac{1}{3}$$

$$\text{d) } x^4 - x^2 = 0$$

$$x^2(x^2 - 1) = 0 \begin{cases} x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

$$\text{Soluciones: } x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -1$$

17 Resuelve:

$$\text{a) } x - \sqrt{x} = 2$$

$$\text{b) } x - \sqrt{25 - x^2} = 1$$

$$\text{c) } x - \sqrt{169 - x^2} = 17$$

$$\text{d) } x + \sqrt{5x + 10} = 8$$

$$\text{a) } x - \sqrt{x} = 2$$

$$(x - 2) = \sqrt{x} \rightarrow \text{Elevamos al cuadrado ambos miembros:}$$

$$x^2 - 4x + 4 = x \rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Comprobación: } x_1 = 4 &\rightarrow 4 - \sqrt{4} = 2 \\ x_2 = 1 &\rightarrow 1 - \sqrt{4} = 0 \neq 2 \end{aligned}$$

Solución: $x = 4$

$$\text{b) } x - \sqrt{25 - x^2} = 1$$

$$(x - 1) = \sqrt{25 - x^2} \rightarrow \text{Elevamos al cuadrado ambos miembros:}$$

$$x^2 - 2x + 1 = 25 - x^2 \rightarrow 2x^2 - 2x - 24 = 0 \rightarrow x^2 - x - 12 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2} \begin{cases} 4 \\ -3 \end{cases}$$

$$\text{Comprobación: } x_1 = 4 \rightarrow 4 - \sqrt{25 - 16} = 4 - 3 = 1$$

$$x_2 = -3 \rightarrow -3 - \sqrt{25 - 9} = -3 - 4 = -7 \neq 1$$

Solución: $x = 4$

$$\text{c) } x - \sqrt{169 - x^2} = 17$$

$$(x - 17)^2 = \sqrt{169 - x^2} \rightarrow \text{Elevamos al cuadrado ambos miembros:}$$

$$x^2 + 289 - 34x = 169 - x^2 \rightarrow 2x^2 - 34x + 120 = 0 \rightarrow x^2 - 17x + 60 = 0$$

$$x = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 240}}{2} = \frac{17 \pm 7}{2} \begin{cases} x_1 = 12 \\ x_2 = 5 \end{cases}$$

$$\text{Comprobación: } x_1 = 12 \rightarrow 12 - \sqrt{169 - 144} = 12 - 5 = 7 \neq 17$$

$$x_2 = 5 \rightarrow 5 - \sqrt{169 - 25} = 5 - 12 = -7 \neq 17$$

No tiene solución.

$$\text{d) } x + \sqrt{5x + 10} = 8$$

$$\sqrt{5x + 10} = (8 - x)^2 \rightarrow \text{Elevamos al cuadrado ambos miembros:}$$

$$5x + 10 = 64 + x^2 - 16x \rightarrow x^2 - 21x + 54 = 0$$

$$x = \frac{21 \pm \sqrt{441 - 216}}{2} = \frac{21 \pm 15}{2} \begin{cases} x_1 = 18 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

$$\text{Comprobación: } x_1 = 18 \rightarrow 18 + \sqrt{5 \cdot 18 + 10} = 18 + 10 = 28 \neq 8$$

$$x_2 = 3 \rightarrow 3 + \sqrt{5 \cdot 3 + 10} = 3 + 5 = 8$$

Solución: $x = 3$

18 Resuelve estas ecuaciones:

a) $\frac{x-3}{x} + \frac{x+3}{x^2} = \frac{2}{3}$

b) $\frac{(x-2)^2}{x^2} - \frac{1}{2x} = \frac{8+3x}{2x^2} - \frac{2}{x}$

c) $\frac{3x+1}{x^3} + \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{2x+3}{x^2}$

d) $\frac{x+1}{x-1} + \frac{3}{x+1} = \frac{x-2}{x^2-1}$

a) $\frac{x-3}{x} + \frac{x+3}{x^2} = \frac{2}{3}$ Multiplicamos los dos miembros por $3x^2$:

$$3x^2 - 9x + 3x + 9 = 2x^2 \rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \rightarrow (x-3)^2 = 0$$

$$x = 3 \rightarrow \text{Solución doble.}$$

Comprobación: $x = 3 \rightarrow \frac{3-3}{3} + \frac{3+3}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

Solución: $x = 3$

b) $\frac{(x-2)^2}{x^2} - \frac{2}{2x} = \frac{8+3x}{2x^2} - \frac{2}{x}$

Multiplicamos toda la ecuación por $2x^2$:

$$2(x-2)^2 - x = 8 + 3x - 2 \cdot 2x \rightarrow 2x^2 - 8x + 8 - x = 8 + 3x - 4x$$

$$2x^2 - 8x = 0 \rightarrow 2x(x-4) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4 \end{cases} \rightarrow \text{No es válida.}$$

Comprobación de que $x = 4$ es solución:

$$\left. \begin{aligned} \frac{(4-2)^2}{4^2} - \frac{1}{8} &= \frac{4}{16} - \frac{1}{8} = \frac{4}{16} - \frac{2}{16} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} \\ \frac{8+3 \cdot 4}{2 \cdot 4^2} - \frac{2}{4} &= \frac{20}{32} - \frac{2}{4} = \frac{5}{8} - \frac{4}{8} = \frac{1}{8} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Coinciden ambos} \\ \text{resultados} \rightarrow x = 4 \\ \text{es solución.} \end{array}$$

c) $\frac{3x+1}{x^3} + \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{2x+3}{x^2}$

Multiplicamos toda la ecuación por x^3 :

$$3x + 1 + x^2(x+1) = x^3 + x(2x+3) \rightarrow 3x + 1 + x^3 + x^2 = x^3 + 2x^2 + 3x$$

$$x^2 - 1 = 0 \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Comprobación

$$x_1 = 1 \rightarrow \frac{3+1}{1} + \frac{1+1}{1} = 4+2 = 6; 1 + \frac{2+3}{1} = 1+5 = 6 \rightarrow$$

$\rightarrow x_1 = 1$ es solución.

$$x_2 = -1 \rightarrow \frac{-3+1}{-1} + \frac{-1+1}{-1} = \frac{-2}{-1} = 2; 1 + \frac{-2+3}{1} = 1+1 = 2 \rightarrow$$

$\rightarrow x_2 = -1$ es solución.

$$d) \frac{x+1}{x-1} + \frac{3}{x+1} = \frac{x-2}{x^2-1}$$

Multiplicamos toda la ecuación por $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$:

$$(x+1)^2 + 3(x-1) = x-2 \rightarrow x^2 + 2x + 1 + 3x - 3 = x - 2 \rightarrow x^2 + 4x = 0$$

$$x(x+4) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -4 \end{cases}$$

Comprobación

$$x_1 = 0 \rightarrow \frac{1}{-1} + \frac{3}{1} = -1 + 3 = 2; \frac{-2}{-1} = 2 \rightarrow x_1 = 0 \text{ es solución.}$$

$$x_2 = -4 \rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{-4+1}{-4-1} + \frac{3}{-4+1} &= \frac{-3}{-5} + \frac{3}{-3} = \frac{3}{5} - 1 = \frac{-2}{5} \\ \frac{-4-2}{16-1} &= \frac{-6}{15} = \frac{-2}{5} \end{aligned} \right\} x_2 = -4 \text{ es solución.}$$

PIENSA Y RESUELVE

19 Averigua qué ecuaciones no tienen solución:

$$a) (5x-3)^2 - 5x(4x-5) = 5x(x-1)$$

$$b) \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{5}{2} = 0$$

$$c) (x+3)^2 - 2(3x+6) = 0$$

$$d) \frac{x+1}{2} = x - \frac{2x+3}{4}$$

$$a) (5x-3)^2 - 5x(4x-5) = 5x(x-1)$$

$$25x^2 + 9 - 30x - 20x^2 + 25x = 5x^2 - 5x \rightarrow 9 = 0 \rightarrow \text{No tiene solución.}$$

$$b) \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{5}{2} = 0$$

$$x^2 - 4x + 5 = 0 \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} \rightarrow \text{No tiene solución.}$$

$$c) (x + 3)^2 - 2(3x + 6) = 0$$

$$x^2 + 6x + 9 - 6x - 12 = 0 \rightarrow x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{3} \begin{cases} x_1 = \sqrt{3} \\ x_2 = -\sqrt{3} \end{cases}$$

$$d) \frac{x+1}{2} = x - \frac{2x+3}{4}$$

$$2x + 2 = 4x - 2x - 3 \rightarrow 2 = -3 \rightarrow \text{No tiene solución.}$$

- 20** Una persona compra un equipo de música y un ordenador por 2 500 €, y los vende, después de algún tiempo, por 2 157,5 €. Con el equipo de música perdió el 10% de su valor, y con el ordenador, el 15%. ¿Cuánto le costó cada uno?

x → Precio del equipo de música

y → Precio del ordenador

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 2\,500 \\ 0,9x + 0,85y = 2\,157,50 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = 2\,500 - x \\ 0,9x + 0,85(2\,500 - x) = 2\,157,50 \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow 0,9x + 2\,125 - 0,85x = 2\,157,50 \rightarrow 0,05x = 32,50 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = 650, y = 1\,850$$

Le costó 650 € el equipo de música y 1 850 € el ordenador.

- 21** La calificación de una oposición se obtiene mediante dos exámenes: uno escrito, que es el 65% de la nota final, y otro oral, que es el 35%. Si una persona tuvo 12 puntos entre los dos exámenes y obtuvo un 5,7 de nota final, ¿qué nota tuvo en cada uno de ellos?

• *Nota examen oral* → $12 - \text{Nota examen escrito}$. *Nota final* = 65% del escrito + 35% del oral

$$\left. \begin{array}{l} x \rightarrow \text{nota del examen escrito} \\ y \rightarrow \text{nota del examen oral} \end{array} \right\} \begin{array}{l} x + y = 12 \\ 0,65x + 0,35y = 5,7 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 12 - y \\ 0,65(12 - y) + 0,35y = 5,7 \end{array} \right\} \rightarrow 7,8 - 0,65y + 0,35y = 5,7$$

$$-0,3y = -2,1 \rightarrow y = 7 \rightarrow x = 5$$

Obtuvo un 5 en el examen escrito y un 7 en el examen oral.

Página 109

- 22** En un examen de 20 preguntas te dan dos puntos por cada acierto y te quitan medio punto por cada fallo. Para aprobar, es obligatorio contestar a todas las preguntas y hay que obtener, por lo menos, 20 puntos. ¿Cuántas preguntas hay que contestar correctamente para aprobar?

• *Puntuación total* = $2 \cdot \text{aciertos} - 0,5 \cdot \text{fallos} = 20$

$$\left. \begin{array}{l} x \rightarrow \text{número de respuestas acertadas} \\ y \rightarrow \text{número de respuestas falladas} \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 20 \\ 2x - 1/2y = 20 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x + y = 20 \\ 4x - y = 40 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \hline 5x = 60 \end{array} \rightarrow x = \frac{60}{5} \rightarrow x = 12, y = 8$$

- 23** Jorge tiene en el banco 12 500 €. Una parte de ese dinero está en una cuenta en la que le dan el 11% de interés anual. El resto lo tiene en otra cuenta al 9% anual. Calcula esas dos cantidades sabiendo que al final del año cobró 1 295 € de intereses.

$$x \rightarrow \text{dinero al 11\% anual}$$

$$12\,500 - x \rightarrow \text{dinero al 9\% anual}$$

$$\text{Interés total: } 0,11x + (12\,500 - x) \cdot 0,09 = 1\,295$$

$$0,02x = 170 \rightarrow x = \frac{170}{0,02} = 8\,500$$

Luego pone 8 500 € al 11% de interés anual y 4 000 al 9% de interés anual.

- 24** Las amigas de María le han comprado un regalo por el que tienen que pagar 3,15 € cada una. Como tres de ellas no tienen dinero, deciden ponerlo entre las demás, pagando 3,60 € cada una. ¿Cuántas son? ¿Cuánto vale el regalo?

☛ *Consulta el ejercicio resuelto de la página 106.*

$$x \rightarrow \text{número de amigos y amigas de María}$$

$$3,15 \cdot x = 3,60(x - 3) \rightarrow 3,15x = 3,60x - 10,80 \rightarrow 0,45x = 10,80$$

$$x = \frac{10,80}{0,45} = 24$$

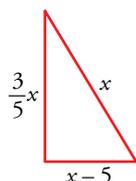
Son, en total, 24 amigos y amigas, y el regalo cuesta $3,15 \cdot 24 = 75,60$ €.

- 25** En un triángulo rectángulo, uno de los catetos mide los $\frac{3}{5}$ de la hipotenusa, y el otro cateto mide 5 cm menos que la misma. Halla el perímetro del triángulo.

☛ *Dibuja el triángulo y aplica el teorema de Pitágoras.*

$$x^2 = \left(\frac{3}{5}x\right)^2 + (x - 5)^2 \rightarrow x^2 = \frac{9}{25}x^2 + x^2 + 25 - 10x \rightarrow$$

$$\rightarrow 25x^2 = 9x^2 + 25x^2 + 625 - 250x$$



$$9x^2 - 250x + 625 = 0$$

$$x = \frac{250 \pm \sqrt{62500 - 22500}}{18} = \frac{250 \pm 200}{18} \begin{cases} x_1 = 25 \\ x_2 = \frac{50}{18} = \frac{25}{9} < 5 \end{cases}$$

Para que la longitud de los lados sea positiva, se ha de tener $x > 5$, luego la solución es $x = 25$.

$$\text{Perímetro} = \frac{3}{5} \cdot 25 + 25 - 5 + 25 = 15 + 20 + 25 = 60 \text{ cm}$$

- 26** Los lados de un triángulo miden 18 cm, 16 cm y 9 cm. Si restamos una misma cantidad a los tres lados, obtenemos un triángulo rectángulo. ¿Qué cantidad es esa?

$$(18 - x)^2 = (16 - x)^2 + (9 - x)^2$$

$$324 + x^2 - 36x = 256 + x^2 - 32x + 81 + x^2 - 18x \rightarrow x^2 - 14x + 13 = 0$$

$$x = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 52}}{2} = \frac{14 \pm 12}{2} \begin{cases} x_1 = 13 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$x = 13$ no puede ser, porque nos quedaría una longitud negativa ($9 - 13 < 0$).

Solución: $x = 1$ cm es la cantidad restada.

- 27** Calcula los lados de un triángulo rectángulo isósceles cuyo perímetro es de 24 cm.

• *Un triángulo isósceles tiene dos lados iguales. Si es rectángulo, los lados iguales serán los catetos.*

Existen dos relaciones entre x e y :

$$\bullet y^2 = x^2 + x^2 = 2x^2 \rightarrow y^2 = 2x^2$$

$$\bullet 2x + y = 24 \rightarrow y^2 = (24 - 2x)^2$$

$$2x^2 = 576 - 96x + 4x^2 \rightarrow 2x^2 - 96x + 576 = 0 \rightarrow x^2 - 48x + 288 = 0$$

$$x = \frac{48 \pm \sqrt{2304 - 1152}}{2} = \frac{48 \pm \sqrt{1152}}{2}$$

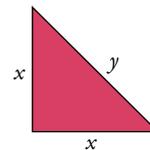
$$x_1 = \frac{48 + 24\sqrt{2}}{2} = 40,97$$

$$x_2 = \frac{48 - 24\sqrt{2}}{2} = 7,029$$

$x_1 = 40,97$ no puede ser porque el perímetro es 24.

$$x_2 = 7,029 \rightarrow y = 9,942$$

Los lados iguales miden 7,03 cm y la hipotenusa mide 9,94 cm.



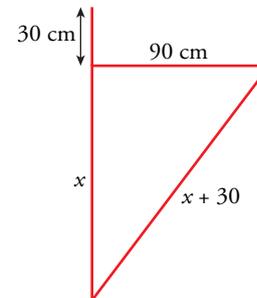
- 28** En un lago hay una flor a 90 cm de la orilla. Cuando el tallo está vertical, la flor sobresale 30 cm sobre la superficie. Inclinando la flor, con el tallo estirado, la corola toca la orilla. ¿qué profundidad tiene el lago?

Utilizando el teorema de Pitágoras:

$$(x + 30)^2 = x^2 + 90^2 \rightarrow x^2 + 60x + 900 = x^2 + 8100$$

$$60x = 7200 \rightarrow x = \frac{7200}{60} = 120$$

La profundidad del lago es de 120 m.

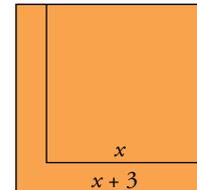


- 29** Si se aumenta en 3 m el lado de un cuadrado, la superficie aumenta en 75 m^2 .
¿Cuál es su lado?

$$(x + 3)^2 = x^2 + 75 \rightarrow x^2 + 6x + 9 = x^2 + 75 \rightarrow$$

$$\rightarrow 6x = 66 \rightarrow x = 11$$

El lado del cuadrado mide 11 m.



- 30** Un grupo de estudiantes alquila un piso por 700 € al mes. Si fueran dos más, cada uno pagaría 40 € menos. ¿Cuántos son?

n° de estudiantes = x ; si fueran 2 más: $x + 2$

$$\text{Dinero que paga cada uno} = \frac{700}{x}$$

$$\text{Si fueran 2 más, cada uno pagaría} = \frac{700}{x} - 40$$

Si hubiese x estudiantes, cada uno pagaría $\frac{700}{x}$.

Si hubiese $x + 2$ estudiantes, cada uno pagaría 40 € menos $\rightarrow \frac{700}{x} - 40$

$$(x + 2) \left(\frac{700}{x} - 40 \right) = 700$$

$$700 - 40x + \frac{1400}{x} - 80 = 700 \rightarrow -40x^2 - 80x + 1400 = 0$$

$$x^2 + 2x - 35 = 0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 140}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{144}}{2} =$$

$$= \frac{-2 \pm 12}{2} = \begin{cases} 5 \\ -7 \end{cases} \text{ solución no válida.}$$

Han alquilado el piso 5 estudiantes.