

Página 75

PRACTICA

Operaciones con polinomios

1 Efectúa las operaciones y simplifica las siguientes expresiones:

$$a) x(x^2 + 1) - 3x(-x + 3) + 2(x^2 - x)^2$$

$$b) 2(x^2 + 3) - 2x(x - 3) + 6(x^2 - x - 1)$$

$$c) -4x(x - 4)^2 + 3(x^2 - 2x + 3) - 2x(-x^2 + 5)$$

$$\begin{aligned} a) x(x^2 + 1) - 3x(-x + 3) + 2(x^2 - x)^2 &= \\ &= x^3 + x + 3x^2 - 9x + 2(x^4 - 2x^3 + x^2) = \\ &= x^3 + x + 3x^2 - 9x + 2x^4 - 4x^3 + 2x^2 = 2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 8x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) 2(x^2 + 3) - 2x(x - 3) + 6(x^2 - x - 1) &= \\ &= 2x^2 + 6 - 2x^2 + 6x + 6x^2 - 6x - 6 = 6x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) -4x(x - 4)^2 + 3(x^2 - 2x + 3) - 2x(-x^2 + 5) &= \\ &= -4x(x^2 - 8x + 16) + 3x^2 - 6x + 9 + 2x^3 - 10x = \\ &= -4x^3 + 32x^2 - 64x + 3x^2 - 6x + 9 + 2x^3 - 10x = -2x^3 + 35x^2 - 80x + 9 \end{aligned}$$

2 Multiplica y simplifica las siguientes expresiones:

$$a) -3x(x + 7)^2 + (2x - 1)(-3x + 2)$$

$$b) (2a^2 + a - 1)(a - 3) - (2a - 1)(2a + 1)$$

$$c) (3b - 1)(3b + 1) - (4b - 3)^2 - 2(2b^2 + 16b - 16)$$

$$\begin{aligned} a) -3x(x + 7)^2 + (2x - 1)(-3x + 2) &= \\ &= -3x(x^2 + 14x + 49) - 6x^2 + 4x + 3x - 2 = \\ &= -3x^3 - 42x^2 - 147x - 6x^2 + 7x - 2 = -3x^3 - 48x^2 - 140x - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) (2a^2 + a - 1)(a - 3) - (2a - 1)(2a + 1) &= \\ &= 2a^3 + a^2 - a - 6a^2 - 3a + 3 - 4a^2 + 1 = 2a^3 - 9a^2 - 4a + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) (3b - 1)(3b + 1) - (4b - 3)^2 - 2(2b^2 + 16b - 16) &= \\ &= 9b^2 - 1 - (16b^2 - 24b + 9) - 4b^2 - 32b + 32 = \\ &= 9b^2 - 1 - 16b^2 + 24b - 9 - 4b^2 - 32b + 32 = -11b^2 - 8b + 22 \end{aligned}$$

3 Expresa como un cuadrado o como producto de dos binomios cada uno de los siguientes polinomios:

$$a) 25x^2 + 40x + 16$$

$$b) 64x^2 - 160x + 100$$

$$c) 4x^2 - 25$$

- a) $25x^2 + 40x + 16 = (5x + 4)^2$
 b) $64x^2 - 160x + 100 = (8x - 10)^2$
 c) $4x^2 - 25 = (2x - 5)(2x + 5)$

4 Expresa como un cuadrado o como producto de dos binomios cada uno de los siguientes polinomios:

- a) $x^4 + 4x^2 + 4$ b) $x^4 - 16$ c) $9x^2 - 6x^3 + x^4$ d) $2x^2 + 4x + 2$
 a) $x^4 + 4x^2 + 4 = (x^2 + 2)^2$ b) $x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4)$
 c) $9x^2 - 6x^3 + x^4 = x^2(x - 3)^2$ d) $2x^2 + 4x + 2 = 2(x + 1)^2$

5 Saca factor común e identifica productos notables en cada caso:

- a) $12x^3 - 3x$ b) $2x^4 + 12x^3 + 18x^2$ c) $45x^2 - 120x + 80$ d) $3x^3 - 15x$
 a) $12x^3 - 3x = 3x(4x^2 - 1) = 3x(2x - 1)(2x + 1)$
 b) $2x^4 + 12x^3 + 18x^2 = 2x^2(x^2 + 6x + 9) = 2x^2(x + 3)^2$
 c) $45x^2 - 120x + 80 = 5(9x^2 - 24x + 16) = 5(3x - 4)^2$
 d) $3x^3 - 15x = 3x(x^2 - 5) = 3x(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$

6 Halla el cociente y el resto en cada una de estas divisiones:

- a) $(3x^2 - 7x + 5) : (x^2 - x + 1)$
 b) $(x^3 - x) : (x^2 - 1)$
 c) $(x^3 - 3x^2 - 2) : (x^2 + 1)$

$$\begin{array}{r} \text{a) } 3x^2 - 7x + 5 \quad \left| \begin{array}{l} x^2 - x + 1 \\ 3 \end{array} \right. \\ \underline{-3x^2 + 3x - 3} \\ -4x + 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Cociente: } 3 \\ \text{Resto: } -4x + 2 \end{array}$$

b) $(x^3 - x) : (x^2 - 1)$
 Observamos que $x^3 - x = x(x^2 - 1)$, luego $(x^3 - x) : (x^2 - 1) = x$
 Cociente: x
 Resto: 0

$$\begin{array}{r} \text{c) } x^3 - 3x^2 - 2 \quad \left| \begin{array}{l} x^2 + 1 \\ x - 3 \end{array} \right. \\ \underline{-x^3 \quad -x} \\ -3x^2 - x \\ \underline{3x^2 \quad + 3} \\ -x + 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Cociente: } x - 3 \\ \text{Resto: } -x + 3 \end{array}$$

7 Calcula el cociente y el resto en cada una de estas divisiones:

a) $(x^5 + 7x^3 - 5x + 1) : (x^3 + 2x)$ b) $(x^3 - 5x^2 + x) : (x^2 - 1)$

c) $(x^3 - 5x^2 + x) : (2x^2 - 1)$

a) $(x^5 + 7x^3 - 5x + 1) : (x^3 + 2x)$

$$\begin{array}{r} x^5 + 7x^3 - 5x + 1 \quad \left| \begin{array}{l} x^3 + 2x \\ x^2 + 5 \end{array} \right. \\ \underline{-x^5 - 2x^3} \\ 5x^3 \\ \underline{-5x^3 - 10x} \\ -15x + 1 \end{array}$$

Cociente: $x^2 + 5$

Resto: $-15x + 1$

b) $(x^3 - 5x^2 + x) : (x^2 - 1)$

$$\begin{array}{r} x^3 - 5x^2 + x \quad \left| \begin{array}{l} x^2 - 1 \\ x - 5 \end{array} \right. \\ \underline{-x^3 + x} \\ -5x^2 + 2x \\ \underline{5x^2 - 5} \\ 2x - 5 \end{array}$$

Cociente: $x - 5$

Resto: $2x - 5$

c) $(x^3 - 5x^2 + x) : (2x^2 - 1)$

$$\begin{array}{r} x^3 - 5x^2 + x \quad \left| \begin{array}{l} 2x^2 - 1 \\ (1/2)x - 5/2 \end{array} \right. \\ \underline{-x^3 + (1/2)x} \\ -5x^2 + (3/2)x \\ \underline{5x^2 - 5/2} \\ (3/2)x - 5/2 \end{array}$$

Cociente: $(1/2)x - 5/2$

Resto: $(3/2)x - 5/2$

8 Halla el cociente y el resto en las siguientes divisiones:

a) $(6a^3 + 5a^2 - 9a) : (3a - 2)$ b) $(3b^4 - 8b^3 + 9b^2 - 2b - 7) : (b^2 - b - 1)$

c) $(4c^5 - 2c^3 + 3c) : (c^2 - c + 2)$

a) $6a^3 + 5a^2 - 9a \quad \left| \begin{array}{l} 3a - 2 \\ 2a^2 + 3a - 1 \end{array} \right.$

$$\begin{array}{r} 6a^3 + 5a^2 - 9a \\ \underline{-6a^3 + 4a^2} \\ 9a^2 \\ \underline{-9a^2 + 6a} \\ -3a \\ \underline{3a - 2} \\ -2 \end{array}$$

Cociente: $2a^2 + 3a - 1$

Resto: -2

$$\begin{array}{r}
 \text{b) } 3b^4 - 8b^3 + 9b^2 - 2b - 7 \\
 \underline{-3b^4 + 3b^3 + 3b^2} \\
 -5b^3 + 12b^2 \\
 \underline{5b^3 - 5b^2 - 5b} \\
 7b^2 - 7b \\
 \underline{-7b^2 + 7b + 7} \\
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \overline{b^2 - b - 1} \\
 3b^2 - 5b + 7 \\
 \text{Cociente: } 3b^2 - 5b + 7 \\
 \text{Resto: } 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{c) } 4c^5 - 2c^3 + 3c \\
 \underline{-4c^5 + 4c^4 - 8c^3} \\
 4c^4 - 10c^3 \\
 \underline{-4c^4 + 4c^3 - 8c^2} \\
 -6c^3 - 8c^2 \\
 \underline{6c^3 - 6c^2 + 12c} \\
 -14c^2 + 15c \\
 \underline{14c^2 - 7c + 14} \\
 8c + 14
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \overline{c^2 - c + 2} \\
 4c^3 + 4c^2 - 6c - 7 \\
 \text{Cociente: } 4c^3 + 4c^2 - 6c - 7 \\
 \text{Resto: } 8c + 14
 \end{array}$$

Regla de Ruffini. Teorema del resto

9 Halla el cociente y el resto de las siguientes divisiones:

- a) $(2x^3 - x^2 + 5x - 3) : (x - 2)$ b) $(-x^4 + 3x^2 - 2x + 1) : (x + 1)$
 c) $(3x^3 + 5x^2 - x) : (x + 2)$ d) $(x^3 - 27) : (x - 3)$
 e) $(x^4 - x^2) : (x + 1)$ f) $(x^5 - 2x^4 + x - 2) : (x - 1)$

$$\begin{array}{r}
 \text{a) } (2x^3 - x^2 + 5x - 3) : (x - 2) \\
 \begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & -1 & 5 & -3 \\
 2 & & 4 & 6 & 22 \\
 \hline
 & 2 & 3 & 11 & \underline{19}
 \end{array} \\
 \text{Cociente: } 2x^2 + 3x + 11 \\
 \text{Resto: } 19
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{b) } (-x^4 + 3x^2 - 2x + 1) : (x + 1) \\
 \begin{array}{r|rrrrr}
 & -1 & 0 & 3 & -2 & 1 \\
 -1 & & 1 & -1 & -2 & 4 \\
 \hline
 & -1 & 1 & 2 & -4 & \underline{5}
 \end{array} \\
 \text{Cociente: } -x^3 + x^2 + 2x - 4 \\
 \text{Resto: } 5
 \end{array}$$

c) $(3x^3 + 5x^2 - x) : (x + 2)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & 5 & -1 & 0 \\ -2 & & -6 & 2 & -2 \\ \hline & 3 & -1 & 1 & \underline{-2} \end{array}$$

Cociente: $3x^2 - x + 1$

Resto: -2

d) $(x^3 - 27) : (x - 3)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & -27 \\ 3 & & 3 & 9 & 27 \\ \hline & 1 & 3 & 9 & \underline{0} \end{array}$$

Cociente: $x^2 + 3x + 9$

Resto: 0

e) $(x^4 - x^2) : (x + 1)$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & & -1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline & 1 & -1 & 0 & 0 & \underline{0} \end{array}$$

Cociente: $x^3 - x^2$

Resto: 0

f) $(x^5 - 2x^4 + x - 2) : (x - 1)$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ \hline & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & \underline{-2} \end{array}$$

Cociente: $x^4 - x^3 - x^2 - x$

Resto: -2

10 Averigua cuáles de los números 1, -1, 2, -2, 3 y -3 son raíces de los polinomios siguientes:

$P(x) = x^3 - 7x - 6$

$Q(x) = x^3 - 6x^2 - 4x + 24$

$R(x) = x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x$

$S(x) = 2x^3 - 2x^2 - 10x - 6$

Descomponemos en factores cada uno de los polinomios:

$P(x) = x^3 - 7x - 6$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -7 & -6 \\ -2 & & -2 & 4 & 6 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & \underline{0} \\ 3 & & 3 & 3 & \\ \hline & 1 & 1 & \underline{0} & \end{array}$$

$P(x) = (x + 2)(x - 3)(x + 1)$

$Q(x) = x^3 - 6x^2 - 4x + 24$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -6 & -4 & 24 \\ 2 & & 2 & -8 & -24 \\ \hline & 1 & -4 & -12 & \underline{0} \\ -2 & & -2 & 12 & \\ \hline & 1 & -6 & \underline{0} & \end{array}$$

$Q(x) = (x - 2)(x + 2)(x - 6)$

$$R(x) = x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x = x(x^3 - 2x^2 - 11x + 12)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -11 & 12 \\ 1 & & & 1 & -1 & -12 \\ \hline & 1 & -1 & -12 & \boxed{0} \\ -3 & & -3 & 12 & \\ \hline & 1 & -4 & \boxed{0} \end{array}$$

$$R(x) = x(x-1)(x+3)(x-4)$$

$$S(x) = 2x^3 - 2x^2 - 10x - 6 = 2(x^3 - x^2 - 5x - 3)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -5 & -3 \\ -1 & & -1 & 2 & 3 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & \boxed{0} \\ -1 & & -1 & 3 & \\ \hline & 1 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

$$S(x) = 2(x+1)^2(x-3)$$

Así, 1 es raíz de $R(x)$; -1 es raíz de $P(x)$ y de $S(x)$; 2 es raíz de $Q(x)$; -2 es raíz de $P(x)$ y de $Q(x)$; 3 es raíz de $P(x)$ y de $S(x)$; -3 es raíz de $R(x)$.

II Aplica la regla de Ruffini para calcular el valor del polinomio:

$$P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 5x - 8$$

para $x = 2$, $x = -1$ y $x = -2$.

El valor de $P(x)$ cuando hacemos $x = a$ coincidirá con el resto de la división $P(x) : (x - a)$, según el teorema del resto.

$$P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 5x - 8$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -7 & 5 & -8 \\ 2 & & 4 & -6 & -2 \\ \hline & 2 & -3 & -1 & \boxed{-10} \end{array} \rightarrow P(2) = -10$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -7 & 5 & -8 \\ -1 & & -2 & 9 & -14 \\ \hline & 2 & -9 & 14 & \boxed{-22} \end{array} \rightarrow P(-1) = -22$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -7 & 5 & -8 \\ -2 & & -4 & 22 & -54 \\ \hline & 2 & -11 & 27 & \boxed{-62} \end{array} \rightarrow P(-2) = -62$$

12 Comprueba si los siguientes polinomios son divisibles por $x - 2$ y/o por $x + 1$:

a) $x^3 + 3x^2 - 10x$

b) $x^3 + 2x^2 - x - 2$

c) $2x^3 - 5x^2 - x + 6$

d) $-x^4 + 3x^3 - 2x^2$

e) $x^3 + 5x^2 + 8x + 4$

Para que un polinomio, $P(x)$, sea divisible por $x - 2$, el resto de la división de $P(x) : (x - 2)$ ha de ser 0, es decir, $P(2) = 0$. Análogamente, para que sea divisible por $x + 1$, debe ser $P(-1) = 0$.

a) $x^3 + 3x^2 - 10x$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 3 & -10 & 0 \\ & & 2 & 10 & 0 \\ \hline & 1 & 5 & 0 & \underline{0} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 3 & -10 & 0 \\ & & -1 & -2 & 12 \\ \hline & 1 & 2 & -12 & \underline{12} \end{array}$$

$x^3 + 3x^2 - 10x$ es divisible por $x - 2$, pero no por $x + 1$.

b) $x^3 + 2x^2 - x - 2$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ & & 2 & 8 & 14 \\ \hline & 1 & 4 & 7 & \underline{12} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ & & -1 & -1 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \underline{0} \end{array}$$

$x^3 + 2x^2 - x - 2$ es divisible por $x + 1$, pero no por $x - 2$.

c) $2x^3 - 5x^2 - x + 6$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 2 & -5 & -1 & 6 \\ & & 4 & -2 & -6 \\ \hline & 2 & -1 & -3 & \underline{0} \\ -1 & & -2 & 3 & \\ \hline & 2 & -3 & \underline{0} & \end{array}$$

$2x^3 - 5x^2 - x + 6$ es divisible por $x + 1$ y por $x - 2$.

d) $-x^4 + 3x^3 - 2x^2 = x^2(-x^2 + 3x - 2)$

$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 1 & 3 & -2 \\ & & -2 & 2 \\ \hline & -1 & 1 & \underline{0} \end{array}$$

$-x^4 + 3x^3 - 2x^2$ es divisible por $x - 2$, pero no por $x + 1$.

e) $x^3 + 5x^2 + 8x + 4$

	1	5	8	4
-1		-1	-4	-4
	1	4	4	0
2		2	12	
	1	6	16	

$x^3 + 5x^2 + 8x + 4$ es divisible por $x + 1$, pero no por $x - 2$.

Página 76

Factorización de polinomios

13 (ESTÁ RESUELTO EN EL LIBRO).

14 Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^2 - 6x - 7$

b) $x^2 + 12x + 35$

c) $4x^2 + 8x - 12$

d) $2x^3 + 2x^2 - 24x$

e) $x^4 + 9x^3 - 10x^2$

f) $3x^3 - 9x^2 - 30x$

☛ En c) d) e) y f), saca factor común.

a) $x^2 - 6x - 7$

Buscamos las raíces de $x^2 - 6x - 7$:

$$x^2 - 6x - 7 = 0 \rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 28}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{6 \pm 8}{2} = \begin{cases} 7 \\ -1 \end{cases}$$

Por tanto, $x^2 - 6x - 7 = (x - 7)(x + 1)$.

b) $x^2 + 12x + 35$

$$x^2 + 12x + 35 = 0 \rightarrow x = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 140}}{2} = \frac{-12 \pm 2}{2} = \begin{cases} -7 \\ -5 \end{cases}$$

Así: $x^2 + 12x + 35 = (x + 7)(x + 5)$

c) $4x^2 + 8x - 12 = 4(x^2 + 2x - 3)$

Buscamos las raíces de $x^2 + 2x - 3$:

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} -3 \\ 1 \end{cases}$$

Por tanto, $4x^2 + 8x - 12 = 4(x + 3)(x - 1)$.

$$d) 2x^3 + 2x^2 - 24x = 2x(x^2 + x - 12)$$

Buscamos las raíces de $x^2 + x - 12$:

$$x^2 + x - 12 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} = \begin{cases} 3 \\ -4 \end{cases}$$

$$\text{Luego, } 2x^3 + 2x^2 - 24x = 2x(x - 3)(x + 4).$$

$$e) x^4 + 9x^3 - 10x^2 = x^2(x^2 + 9x - 10)$$

$$x^2 + 9x - 10 = 0 \rightarrow x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 40}}{2} = \frac{-9 \pm \sqrt{121}}{2} = \frac{-9 \pm 11}{2} = \begin{cases} 1 \\ -10 \end{cases}$$

$$\text{Así, } x^4 + 9x^3 - 10x^2 = x^2(x - 1)(x + 10).$$

$$f) 3x^3 - 9x^2 - 30x = 3x(x^2 - 3x - 10)$$

$$x^2 - 3x - 10 = 0 \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2} = \begin{cases} 5 \\ -2 \end{cases}$$

$$\text{Luego, } 3x^3 - 9x^2 - 30x = 3x(x + 2)(x - 5).$$

15 Sacar factor común y utilizar los productos notables para descomponer en factores los siguientes polinomios. Di cuáles son sus raíces:

$$a) x^3 - 6x^2 + 9x$$

$$b) x^3 - x$$

$$c) 4x^4 - 81x^2$$

$$d) x^3 + 2x^2 + x$$

$$e) 12x^3 - 27x$$

$$f) 3x^2 + 30x + 75$$

$$a) x^3 - 6x^2 + 9x = x(x^2 - 6x + 9) = x(x - 3)^2$$

Las raíces son: $x = 0$, $x = 3$ (raíz doble)

$$b) x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1)$$

Las raíces son: $x = 0$, $x = 1$ y $x = -1$

$$c) 4x^4 - 81x^2 = x^2(4x^2 - 81) = x^2(2x - 9)(2x + 9)$$

Las raíces son: $x = 0$ (raíz doble), $x = \frac{9}{2}$, $x = -\frac{9}{2}$

$$d) x^3 + 2x^2 + x = x(x^2 + 2x + 1) = x(x + 1)^2$$

Las raíces son: $x = 0$, $x = -1$ (raíz doble)

$$e) 12x^3 - 27x = 3x(4x^2 - 9) = 3x(2x - 3)(2x + 3)$$

Las raíces son: $x = 0$, $x = \frac{3}{2}$, $x = -\frac{3}{2}$

$$f) 3x^2 + 30x + 75 = 3(x^2 + 10x + 25) = 3(x + 5)^2$$

La raíz es: $x = -5$ (raíz doble)

16 Descompón en factores y di cuáles son sus raíces:

a) $x^4 - x^2$

b) $x^3 + 3x^2 + 4x + 12$

c) $2x^3 - 3x^2$

d) $x^3 - x^2 - 12x$

e) $x^3 - 7x^2 + 14x - 8$

f) $x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 3$

a) $x^4 - x^2 = 0$

$$x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1) = x^2(x + 1)(x - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{(raíz doble)} \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

b) $x^3 + 3x^2 + 4x + 12 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & 4 & 12 \\ -3 & & -3 & 0 & -12 \\ \hline & 1 & 0 & 4 & \underline{0} \end{array}$$

$$x^3 + 3x^2 + 4x + 12 = (x + 3)(x^2 + 4) = 0 \rightarrow x = -3 \text{ es su raíz}$$

c) $2x^3 - 3x^2 = 0$

$$x^2(2x - 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{(raíz doble)} \\ x = 3/2 \end{cases}$$

d) $x^3 - x^2 - 12x = 0$

$$x^3 - x^2 - 12x = x(x^2 - x - 12) = x(x - 4)(x + 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \\ x = -3 \end{cases}$$

e) $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -7 & 14 & -8 \\ 2 & & 2 & -10 & 8 \\ \hline & 1 & -5 & 4 & \underline{0} \\ 1 & & 1 & -4 & \\ \hline & 1 & -4 & \underline{0} \end{array}$$

$$x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = (x - 2)(x - 1)(x - 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

f) $x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 3 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -4 & 4 & -4 & 3 \\ 1 & & 1 & -3 & 1 & -3 \\ \hline & 1 & -3 & 1 & -3 & \underline{0} \\ 3 & & 3 & 0 & 3 & \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \underline{0} \end{array}$$

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)(x^2 + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

17 Factoriza los polinomios siguientes:

a) $3x^2 + 2x - 8$

b) $4x^2 + 17x + 15$

c) $2x^2 - 9x - 5$

d) $-x^2 + 17x - 72$

a) $3x^2 + 2x - 8$

$$3x^2 + 2x - 8 = 0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 96}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{100}}{6} =$$

$$= \frac{-2 \pm 10}{2} = \begin{cases} -2 \\ \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Luego, $3x^2 + 2x - 8 = 3\left(x - \frac{4}{3}\right) \cdot (x + 2) = (3x - 4)(x + 2)$.

b) $4x^2 + 17x + 15$

$$4x^2 + 17x + 15 = 0 \rightarrow x = \frac{-17 \pm \sqrt{289 - 240}}{8} = \frac{-17 \pm \sqrt{49}}{8} =$$

$$= \frac{-17 \pm 7}{8} = \begin{cases} -3 \\ \frac{-10}{8} = \frac{-5}{4} \end{cases}$$

Luego, $4x^2 + 17x + 15 = 4(x + 3)\left(x + \frac{5}{4}\right) = (x + 3)(4x + 5)$.

c) $2x^2 - 9x - 5$

$$2x^2 - 9x - 5 = 0 \rightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 40}}{4} = \frac{9 \pm \sqrt{121}}{4} =$$

$$= \frac{9 \pm 11}{4} = \begin{cases} 5 \\ \frac{-1}{2} \end{cases}$$

Por tanto, $2x^2 - 9x - 5 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 5) = (2x + 1)(x - 5)$.

d) $-x^2 + 17x - 72$

$$-x^2 + 17x - 72 = 0 \rightarrow x = \frac{-17 \pm \sqrt{289 - 288}}{-2} = \frac{-17 \pm 1}{-2} = \begin{cases} 9 \\ 8 \end{cases}$$

Así, $-x^2 + 17x - 72 = -(x - 9)(x - 8) = (9 - x)(x - 8)$

18 Descompón en factores:

a) $x^3 - x^2 + 4x - 4$ b) $x^3 - x - 6$ c) $3x^4 + 15x^2$ d) $x^4 - 1$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 + 4x - 4 & x - 1 \\ x^2 + 4 & x^2 + 4 \\ 1 & \end{array} \quad x^3 - x^2 + 4x - 4 = (x - 1)(x^2 + 4)$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x - 6 & x - 2 \\ x^2 + 2x + 3 & x^2 + 2x + 3 \\ 1 & \end{array} \quad x^3 - x - 6 = (x - 2)(x^2 + 2x + 3)$$

$$\begin{array}{r|l} 3x^4 + 15x^2 & 3x^2 \\ x^2 + 5 & x^2 + 5 \\ 1 & \end{array} \quad 3x^4 + 15x^2 = 3x^2(x^2 + 5)$$

d) $x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$

Fracciones algebraicas

19 Comprueba, en cada caso, si las fracciones dadas son equivalentes:

a) $\frac{x-3}{2x-6}$ y $\frac{1}{2}$ b) $\frac{x^2}{x^2+x}$ y $\frac{1}{x}$

c) $\frac{x}{x^2-x}$ y $\frac{2}{2x-2}$ d) $\frac{3x-2}{9x^2-4}$ y $\frac{1}{3x+2}$

a) $\frac{x-3}{2x-6}$ y $\frac{1}{2}$
 $\frac{x-3}{2x-6} = \frac{x-3}{2(x-3)} = \frac{1}{2} \rightarrow$ Las fracciones son equivalentes.

b) $\frac{x^2}{x^2+x}$ y $\frac{1}{x}$
 $\frac{x^2}{x^2+x} = \frac{x^2}{x(x+1)} = \frac{x}{x+1} \rightarrow$ No son equivalentes.

c) $\frac{x}{x^2-x}$ y $\frac{2}{2x-2}$
 $\frac{x}{x^2-x} = \frac{x}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1}$
 $\frac{2}{2x-2} = \frac{2}{2(x-1)} = \frac{1}{x-1}$

Ambas fracciones son equivalentes.

$$d) \frac{3x-2}{9x^2-4} \text{ y } \frac{1}{3x+2}$$

$$\frac{3x-2}{9x^2-4} = \frac{3x-2}{(3x+2)(3x-2)} = \frac{1}{3x+2} \rightarrow \text{Ambas fracciones son equivalentes.}$$

20 Calcula:

$$a) \frac{1}{x} - \frac{1}{2x} - \frac{1}{3x}$$

$$b) \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x}$$

$$c) \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}$$

$$d) \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}$$

$$a) \frac{1}{x} - \frac{1}{2x} - \frac{1}{3x} = \frac{6}{6x} - \frac{3}{6x} - \frac{2}{6x} = \frac{1}{6x}$$

$$b) \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x} = \frac{2}{2x^2} - \frac{2x}{2x^2} + \frac{x}{2x^2} = \frac{2-x}{2x^2}$$

$$c) \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{x-1}{x(x-1)} - \frac{x}{x(x-1)} = \frac{-1}{x(x-1)}$$

$$d) \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} = \frac{x+2}{(x-2)(x+2)} - \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \frac{4}{(x-2)(x+2)}$$

21 Sacar factor común y luego simplificar:

$$a) \frac{15x+15}{10x+10}$$

$$b) \frac{x+3}{2x+6}$$

$$c) \frac{x^2-x}{x^2}$$

$$a) \frac{15x+15}{10x+10} = \frac{15(x+1)}{10(x+1)} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$$

$$b) \frac{x+3}{2x+6} = \frac{x+3}{2(x+3)} = \frac{1}{2}$$

$$c) \frac{x^2-x}{x^2} = \frac{x(x-1)}{x^2} = \frac{x-1}{x}$$

22 Recuerda los productos notables, descompón en factores y simplifica:

$$a) \frac{x^2-1}{x+1}$$

$$b) \frac{x^2-4}{(x+2)^2}$$

$$c) \frac{9x^2-4}{3x-2}$$

$$d) \frac{x^2+6x+9}{x^2-9}$$

$$e) \frac{x^2-25}{x^2+25-10x}$$

$$f) \frac{x(x+1)}{x^2+2x+1}$$

$$g) \frac{x^2-5x+6}{x^2-4}$$

$$h) \frac{x^2-1}{x^4-1}$$

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \frac{x^2 - 1}{x + 1} &= \frac{(x + 1)(x - 1)}{x + 1} = x - 1 \\ \text{b)} \quad \frac{x^2 - 4}{(x + 2)^2} &= \frac{(x + 2)(x - 2)}{(x + 2)^2} = \frac{x - 2}{x + 2} \\ \text{c)} \quad \frac{9x^2 - 4}{3x - 2} &= \frac{(3x + 2)(3x - 2)}{3x - 2} = 3x + 2 \\ \text{d)} \quad \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - 9} &= \frac{(x + 3)^2}{(x + 3)(x - 3)} = \frac{x + 3}{x - 3} \\ \text{e)} \quad \frac{x^2 - 25}{x^2 + 25 - 10x} &= \frac{(x + 5)(x - 5)}{(x - 5)^2} = \frac{x + 5}{x - 5} \\ \text{f)} \quad \frac{x(x + 1)}{x^2 + 2x + 1} &= \frac{x(x + 1)}{(x + 1)^2} = \frac{x}{x + 1} \\ \text{g)} \quad \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} &= \frac{(x - 2)(x - 3)}{(x + 2)(x - 2)} = \frac{x - 3}{x + 2} \\ \text{h)} \quad \frac{x^2 - 1}{x^4 - 1} &= \frac{(x + 1)(x - 1)}{(x + 1)(x - 1)(x^2 + 1)} = \frac{1}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

23 a) Simplifica las fracciones: $A = \frac{x - 2}{x^2 + x - 6}$ $B = \frac{x^2 - 3x}{2x}$

b) Calcula $A - B$ después de simplificar.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \frac{x - 2}{x^2 + x - 6} &= \frac{x - 2}{(x - 2)(x + 3)} = \frac{1}{x + 3} \\ \frac{x^2 - 3x}{2x} &= \frac{x(x - 3)}{2x} = \frac{x - 3}{2} \\ \text{b)} \quad A - B &= \frac{1}{x + 3} - \frac{x - 3}{2} = \frac{2}{2(x + 3)} - \frac{(x - 3)(x + 3)}{2(x + 3)} = \\ &= \frac{2 - x^2 + 9}{2(x + 3)} = \frac{11 - x^2}{2(x + 3)} \end{aligned}$$

24 Efectúa:

a) $\frac{x}{3} - \frac{2}{x} + 1$ b) $\frac{x - 2}{3} \cdot \frac{x + 2}{3}$

c) $\frac{1}{x - 1} : \frac{x + 1}{x}$ d) $\frac{x + 2}{3x^2} - \frac{1}{6x}$

a) $\frac{x}{3} - \frac{2}{x} + 1 = \frac{x^2}{3x} - \frac{6}{3x} + \frac{3x}{3x} = \frac{x^2 + 3x - 6}{3x}$

$$b) \frac{x-2}{3} \cdot \frac{x+2}{3} = \frac{(x-2) \cdot (x+2)}{9} = \frac{x^2-4}{9}$$

$$c) \frac{1}{x-1} : \frac{x+1}{x} = \frac{x}{(x-1)(x+1)} = \frac{x}{x^2-1}$$

$$d) \frac{x+2}{3x^2} - \frac{1}{6x} = \frac{2(x+2)}{6x^2} - \frac{x}{6x^2} = \frac{2x+4-x}{6x^2} = \frac{x+4}{6x^2}$$

25 Efectúa:

$$a) \frac{x}{x-1} + \frac{3}{x} \quad b) \frac{3}{x^2} - \frac{x+2}{5x} \quad c) \frac{x-2}{x+3} - \frac{2}{3x} \quad d) \frac{5}{x^2} - \frac{3x-1}{x+1}$$

$$a) \frac{x}{x-1} + \frac{3}{x} = \frac{x^2}{x(x-1)} + \frac{3(x-1)}{x(x-1)} = \frac{x^2+3x-3}{x^2-x}$$

$$b) \frac{3}{x^2} - \frac{x+2}{5x} = \frac{15}{5x^2} - \frac{x(x+2)}{5x^2} = \frac{15-x^2-2x}{5x^2}$$

$$c) \frac{x-2}{x+3} - \frac{2}{3x} = \frac{3x(x-2)}{3x(x+3)} - \frac{2(x+3)}{3x(x+3)} = \frac{3x^2-6x-2x-6}{3x(x+3)} = \frac{3x^2-8x-6}{3x^2+9x}$$

$$d) \frac{5}{x^2} - \frac{3x-1}{x+1} = \frac{5(x+1)}{x^2(x+1)} - \frac{(3x-1)x^2}{x^2(x+1)} = \frac{5x+5-3x^3+x^2}{x^2(x+1)} =$$

$$= \frac{-3x^3+x^2+5x+5}{x^3+x^2}$$

Página 77

PIENSA Y RESUELVE

26 Di cuáles son las raíces de los polinomios siguientes:

$$a) P(x) = (x+5)^2(2x-3)x$$

$$b) R(x) = 3x(x^2+5)$$

$$c) Q(x) = (x-2)(x^2+1)$$

$$d) S(x) = 2x^2(x-7)$$

$$a) P(x) = (x+5)^2(2x-3)x$$

$$x = -5 \text{ (raíz doble)}, x = \frac{3}{2}, x = 0$$

$$b) R(x) = 3x(x^2+5)$$

$$x = 0$$

$$c) Q(x) = (x-2)(x^2+1)$$

$$x = 2$$

$$d) S(x) = 2x^2(x-7)$$

$$x = 0 \text{ (raíz doble)}, x = 7$$

27 Descompón en factores el dividendo y el divisor, y después simplifica:

$$\text{a) } \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 5x + 6} \quad \text{b) } \frac{x^2 - 3x + 4}{x^3 + x^2} \quad \text{c) } \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{3x^2 - 9x + 6} \quad \text{d) } \frac{x^2 - x + 48}{x^2 - 8x + 7}$$

$$\text{a) } \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 5x + 6} = \frac{x(x-2)}{(x-2)(x-3)} = \frac{x}{x-3}$$

$$\text{b) } \frac{x^2 - 3x + 4}{x^3 + x^2} \rightarrow \text{No se puede simplificar, ya que el numerador no se puede descomponer en factores de menor grado.}$$

$$\text{c) } \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{3x^2 - 9x + 6} = \frac{x(x-2)(x-1)}{3(x-2)(x-1)} = \frac{x}{3}$$

$$\text{d) } \frac{x^2 - x + 48}{x^2 - 8x + 7} \rightarrow \text{No se puede simplificar, ya que el numerador no se puede descomponer en factores de menor grado.}$$

28 (ESTÁ RESUELTO EN EL LIBRO).

29 Opera y simplifica:

$$\text{a) } \left(\frac{3}{x} - \frac{x}{3}\right) : \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3}\right) \quad \text{b) } \frac{x+1}{(x-1)^2} \cdot \frac{x^2-1}{x} \quad \text{c) } \left[\left(x + \frac{1}{x}\right) : \left(x - \frac{1}{x}\right)\right] \cdot (x-1)$$

$$\text{d) } \frac{2}{x} \cdot \left(\frac{1}{x} : \frac{1}{x-1}\right) \quad \text{e) } \left(\frac{x-1}{x^2} + \frac{3}{x} - \frac{5}{x-4}\right) \cdot 2x^2$$

$$\text{a) } \left(\frac{3}{x} - \frac{x}{3}\right) : \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3}\right) = \frac{9-x^2}{3x} : \frac{3+x}{3x} = \frac{9-x^2}{3+x} = \frac{(3-x)(3+x)}{3+x} = 3-x$$

$$\text{b) } \frac{x+1}{(x-1)^2} \cdot \frac{x^2-1}{x} = \frac{(x+1)(x+1)(x-1)}{(x-1)^2 \cdot x} = \frac{(x+1)^2}{x(x-1)}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \left[\left(x + \frac{1}{x}\right) : \left(x - \frac{1}{x}\right)\right] \cdot (x-1) &= \left(\frac{x^2+1}{x} : \frac{x^2-1}{x}\right) \cdot (x-1) = \\ &= \frac{x^2+1}{x^2-1} \cdot (x-1) = \frac{x^2+1}{x+1} \end{aligned}$$

$$\text{d) } \frac{2}{x} \cdot \left(\frac{1}{x} : \frac{1}{x-1}\right) = \frac{2}{x} \cdot \frac{x-1}{x} = \frac{2(x-1)}{x^2}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \left(\frac{x-1}{x^2} + \frac{3}{x} + \frac{5}{x-4}\right) \cdot 2x^2 &= \frac{(x-1)(x-4) + 3(x-4)x - 5x^2}{x^2(x-4)} \cdot 2x^2 = \\ &= \frac{x^2 - 5x + 4 + 3x^2 - 12x - 5x^2}{(x-4)} \cdot 2 = \\ &= \frac{2(-x^2 - 17x + 4)}{(x-4)} \end{aligned}$$

30 Sustituye, en cada caso, los puntos suspensivos por la expresión adecuada para que las fracciones sean equivalentes:

$$a) \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \frac{\dots}{x + 1}$$

$$b) \frac{x}{2x + 1} = \frac{x^2}{\dots}$$

$$c) \frac{x}{x - 3} = \frac{\dots}{x^2 - 9}$$

$$d) \frac{2}{x + 2} = \frac{\dots}{x^2 + 4x + 4}$$

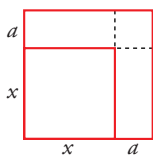
$$a) \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \frac{x(x - 1)}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{x}{x + 1}$$

$$b) \frac{x}{2x + 1} = \frac{x^2}{2x^2 + x}$$

$$c) \frac{x}{x - 3} = \frac{x(x + 3)}{x^2 - 9} = \frac{x^2 + 3x}{x^2 - 9}$$

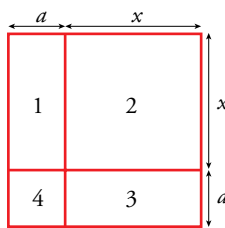
$$d) \frac{2}{x + 2} = \frac{2(x + 2)}{x^2 + 4x + 4} = \frac{2x + 4}{x^2 + 4x + 4}$$

31 El lado x de un cuadrado aumenta en a cm y formamos un nuevo cuadrado.



Suma las áreas de los rectángulos y cuadrados de la figura y comprueba que obtienes el área del cuadrado de lado $x + a$.

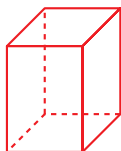
$$\text{Área del cuadrado de lado } (x + a) = (x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2 = A$$



$$\left. \begin{array}{l} A_1 = a \cdot x \\ A_2 = x^2 \\ A_3 = a \cdot x \\ A_4 = a^2 \end{array} \right\}$$

$$\rightarrow A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = ax + x^2 + ax + a^2 = 2ax + a^2 + x^2 = A$$

32 Con un cuadrado de lado x formamos un prisma de base cuadrada, pero sin bases.

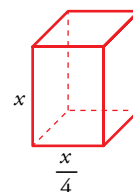
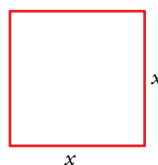


a) Escribe el área total del prisma en función de x .

b) Escribe su volumen en función de x .

$$a) A_p = 4 \cdot x \cdot \frac{x}{4} = x^2$$

$$b) V_p = x \cdot \frac{x}{4} \cdot \frac{x}{4} = \frac{x^3}{16}$$



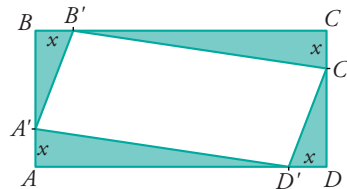
33 Traduce a lenguaje algebraico empleando una sola incógnita:

- El cociente entre un número y su siguiente.
- El cociente entre dos números pares consecutivos.
- Un número menos su inverso.
- El inverso de un número más el inverso del doble de ese número.
- La suma de los inversos de dos números consecutivos.

$$\text{a) } \frac{x}{x+1} \quad \text{b) } \frac{2x}{2x+2} \quad \text{c) } x - \frac{1}{x} \quad \text{d) } \frac{1}{x} + \frac{1}{2x} \quad \text{e) } \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$$

34 En el rectángulo $ABCD$ hemos señalado los puntos A', B', C', D' , de modo que: $\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'} = \overline{DD'} = x$

Expresa el área del cuadrilátero $A'B'C'D'$ mediante un polinomio en x , sabiendo que $\overline{AB} = 3 \text{ cm}$ y $\overline{BC} = 5 \text{ cm}$.



Sabiendo que $\overline{AD'} = \overline{B'C} = 5 - x$ y $\overline{A'B} = \overline{C'D} = 3 - x$, se tendrá:

$$\text{El área del triángulo } B'CC' \text{ es } \frac{x(5-x)}{2}.$$

$$\text{El área del triángulo } A'AD' \text{ es } \frac{x(5-x)}{2}.$$

$$\text{El área del triángulo } B'BA' \text{ es } \frac{x(3-x)}{2}.$$

$$\text{El área del triángulo } D'DC' \text{ es } \frac{x(3-x)}{2}.$$

El área del rectángulo $ABCD$ es $3 \cdot 5 = 15 \text{ cm}^2$.

$$\begin{aligned} A_{\text{paralelogramo}} &= 15 - \left[2 \cdot \frac{x(5-x)}{2} + 2 \cdot \frac{x(3-x)}{2} \right] = \\ &= 15 - [x(5-x) + x(3-x)] = 15 - (-2x^2 + 8x) = 2x^2 - 8x + 15 \end{aligned}$$

35 Comprueba que al reducir la expresión $\frac{m+1}{2m} + \frac{m+4}{4m} - \frac{2m+9}{6m}$ obtienes una fracción numérica.

$$\begin{aligned} \frac{m+1}{2m} + \frac{m+4}{4m} - \frac{2m+9}{6m} &= \frac{6(m+1)}{12m} + \frac{3(m+4)}{12m} - \frac{2(2m+9)}{12m} = \\ &= \frac{6m+6+3m+12-4m-18}{12m} = \frac{5m}{12m} = \frac{5}{12} \end{aligned}$$

Página 78

36 Halla, en cada caso, el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor de los polinomios siguientes:

a) x^2 ; $x^2 - x$; $x^2 - 1$

b) $x - 3$; $x^2 - 9$; $x^2 - 6x + 9$

c) $x + 2$; $3x + 6$; $x^2 + x - 2$

d) $2x$; $2x + 1$; $4x^2 - 1$

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } x^2 \\ x^2 - x = x(x - 1) \\ x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1) \end{array} \right\}$$

$$\text{M.C.D. } [x^2, x^2 - x, x^2 - 1] = 1$$

$$\text{m.c.m. } [x^2, x^2 - x, x^2 - 1] = x^2(x - 1)(x + 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{b) } x - 3 \\ x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3) \\ x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2 \end{array} \right\}$$

$$\text{M.C.D. } [x - 3, x^2 - 9, x^2 - 6x + 9] = x - 3$$

$$\text{m.c.m. } [x - 3, x^2 - 9, x^2 - 6x + 9] = (x - 3)^2(x + 3)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{c) } x + 2 \\ 3x + 6 = 3(x + 2) \\ x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1) \end{array} \right\}$$

$$\text{M.C.D. } [x + 2, 3x + 6, x^2 + x - 2] = x + 2$$

$$\text{m.c.m. } [x + 2, 3x + 6, x^2 + x - 2] = 3(x + 2)(x - 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{d) } 2x \\ 2x + 1 \\ 4x^2 - 1 = (2x - 1)(2x + 1) \end{array} \right\}$$

$$\text{M.C.D. } [2x, 2x + 1, 4x^2 - 1] = 1$$

$$\text{m.c.m. } [2x, 2x + 1, 4x^2 - 1] = 2x(4x^2 - 1)$$

37 Efectúa:

a) $\frac{x-2}{x^2} + \frac{x+2}{x^2-x} - \frac{1}{x^2-1}$

b) $\frac{x}{x-3} - \frac{x+1}{x^2-9} + \frac{2}{x^2-6x+9}$

c) $\frac{2x}{x^2+x-2} - \frac{5}{x+2} - \frac{x-4}{3x+6}$

d) $\frac{x+2}{2x+1} - \frac{2}{4x^2-1} + \frac{x+1}{2x}$

En todos los apartados, el mínimo común múltiplo de los denominadores ha sido calculado en el ejercicio anterior.

$$\begin{aligned}
 \text{a) } & \frac{x-2}{x^2} + \frac{x+2}{x^2-x} - \frac{1}{x^2-1} = \\
 & = \frac{(x-2)(x-1)(x+1)}{x^2(x-1)(x+1)} + \frac{(x+2)(x+1)x}{x^2(x-1)(x+1)} - \frac{x^2}{x^2(x-1)(x+1)} = \\
 & = \frac{(x-2)(x^2-1) + (x+2)(x^2+x) - x^2}{x^2(x^2-1)} = \\
 & = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2 + x^3 + 2x^2 + x^2 + 2x - x^2}{x^2(x^2-1)} = \frac{2x^3 + x + 2}{x^2(x^2-1)} = \frac{2x^3 + x + 2}{x^4 - x^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } & \frac{x}{x-3} - \frac{x+1}{x^2-9} + \frac{2}{x^2-6x+9} = \\
 & = \frac{x(x-3)(x+3)}{(x-3)^2(x+3)} - \frac{(x+1)(x-3)}{(x-3)^2(x+3)} - \frac{2(x+3)}{(x-3)^2(x+3)} = \\
 & = \frac{x(x^2-9) - (x+1)(x-3) - 2(x+3)}{(x-3)^2(x+3)} = \frac{x^3 - 9x - x^2 + 2x + 3 - 2x - 6}{(x-3)^2(x+3)} = \\
 & = \frac{x^3 - x^2 - 9x - 3}{(x-3)^2(x+3)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } & \frac{2x}{x^2+x-2} - \frac{5}{x+2} - \frac{x-4}{3x+6} = \\
 & = \frac{6x}{3(x+2)(x-1)} - \frac{15(x-1)}{3(x+2)(x-1)} - \frac{(x-4)(x-1)}{3(x+2)(x-1)} = \\
 & = \frac{6x - 15x + 15 - x^2 + 5x - 4}{3(x+2)(x-1)} = \frac{-x^2 - 4x + 11}{3(x+2)(x-1)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } & \frac{x+2}{2x+1} - \frac{2}{4x^2-1} + \frac{x+1}{2x} = \\
 & = \frac{2x(x+2)(2x-1)}{2x(2x+1)(2x-1)} - \frac{4x}{2x(2x+1)(2x-1)} + \frac{(x+1)(2x+1)(2x-1)}{2x(2x+1)(2x-1)} = \\
 & = \frac{(2x^2+4x)(2x-1) - 4x + (x+1)(4x^2-1)}{2x(4x^2-1)} = \\
 & = \frac{4x^3 + 8x^2 - 2x^2 - 4x - 4x + 4x^3 + 4x^2 - x - 1}{2x(4x^2-1)} = \frac{8x^3 + 10x^2 - 9x - 1}{2x(4x^2-1)}
 \end{aligned}$$

38 Opera y simplifica:

$$\text{a) } \left(1 - \frac{x-1}{x}\right) \frac{x^2}{x+3} - 1 \quad \text{b) } \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3}\right) : \frac{3}{x^2} \quad \text{c) } 4 - \frac{1}{2x-1} \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{a)} \left(1 - \frac{x-1}{x}\right) \cdot \frac{x^2}{x+3} - 1 &= \left(\frac{x-x+1}{x}\right) \cdot \frac{x^2}{x+3} - 1 = \frac{x^2}{x(x+3)} - 1 = \\ &= \frac{x^2 - x(x+3)}{x(x+3)} = \frac{x^2 - x^2 - 3x}{x(x+3)} = \frac{-3x}{x(x+3)} = \frac{-3x}{x+3} \end{aligned}$$

$$\text{b)} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3}\right) : \frac{3}{x^2} = \frac{x+3-x}{x(x+3)} : \frac{3}{x^2} = \frac{3}{x(x+3)} : \frac{3}{x^2} = \frac{x^2}{x(x+3)} = \frac{x}{x+3}$$

$$\text{c)} 4 - \frac{1}{2x-1} \cdot \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = 4 - \frac{1}{2x-1} \cdot \frac{2x-1}{x^2} = 4 - \frac{1}{x^2} = \frac{4x^2-1}{x^2}$$

39 Efectúa:

$$\text{a)} \frac{x+1}{x-1} + \frac{3}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-1}$$

$$\text{b)} \frac{x^2}{x^2-2x+1} + \frac{2x+3}{x-1} - 3$$

$$\text{c)} \frac{2x-3}{x^2-9} - \frac{x+1}{x-3} - \frac{x+2}{x+3}$$

$$\begin{aligned} \text{a)} \frac{x+1}{x-1} + \frac{3}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-1} &= \frac{(x+1)^2}{x^2-1} + \frac{3(x-1)}{x^2-1} - \frac{x-2}{x^2-1} = \\ &= \frac{x^2+2x+1+3x-3-x+2}{x^2-1} = \frac{x^2+4x}{x^2-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \frac{x^2}{x^2-2x+1} + \frac{2x+3}{x-1} - 3 &= \frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{(2x+3)(x-1)}{(x-1)^2} - \frac{3(x-1)^2}{(x-1)^2} = \\ &= \frac{x^2+2x^2+3x-2x-3-3(x^2-2x+1)}{(x-1)^2} = \\ &= \frac{7x-6}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \frac{2x-3}{x^2-9} - \frac{x+1}{x-3} - \frac{x+2}{x+3} &= \frac{2x-3}{x^2-9} - \frac{(x+1)(x+3)}{x^2-9} - \frac{(x+2)(x-3)}{x^2-9} = \\ &= \frac{2x-3-x^2-4x-3-x^2+x+6}{x^2-9} = \frac{-2x^2-x}{x^2-9} \end{aligned}$$

40 Factoriza los polinomios siguientes:

$$\text{a)} 2x^2 - 5x + 2$$

$$\text{b)} 3x^2 + x - 2$$

$$\text{c)} 4x^2 + 11x - 3$$

$$\text{a) } 2x^2 - 5x + 2$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} 2 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Así, } 2x^2 - 5x + 2 = 2(x-2)\left(x - \frac{1}{2}\right) = (x-2)(2x-1).$$

$$\text{b) } 3x^2 + x - 2$$

$$3x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{6} = \frac{-1 \pm 5}{6} = \begin{cases} \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \\ -1 \end{cases}$$

$$\text{Por tanto, } 3x^2 + x - 2 = 3(x+1)\left(x - \frac{2}{3}\right) = (x+1)(3x-2).$$

$$\text{c) } 4x^2 + 11x - 3$$

$$4x^2 + 11x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{-11 \pm \sqrt{121 + 48}}{8} = \frac{-11 \pm \sqrt{169}}{8} =$$

$$= \frac{-11 \pm 13}{8} = \begin{cases} -\frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\text{Luego, } 4x^2 + 11x - 3 = 4(x+3)\left(x - \frac{1}{4}\right) = (x+3)(4x-1).$$

- 41** En una división conocemos el divisor, $D(x)$, el cociente, $C(x)$, y el resto, $R(x)$: $D(x) = x^2 - 3x$; $C(x) = 3x + 2$; $R(x) = -5x$. Calcula el dividendo.

$$D(x) = x^2 - 3x \qquad C(x) = 3x + 2 \qquad R(x) = -5x$$

Llamamos $P(x)$ al polinomio dividendo; se ha de cumplir, pues:

$$P(x) = D(x) \cdot C(x) + R(x)$$

$$P(x) = (x^2 - 3x) \cdot (3x + 2) - 5x = 3x^3 + 2x^2 - 9x^2 - 6x - 5x$$

$$P(x) = 3x^3 - 7x^2 - 11x$$

- 42** (ESTÁ RESUELTO EN EL LIBRO).

- 43** Calcula m para que el polinomio $P(x) = x^3 - mx^2 + 5x - 2$ sea divisible por $x + 1$.

$$P(x) = x^3 - mx^2 + 5x - 2 \text{ será divisible por } x + 1 \text{ si } P(-1) = 0.$$

$$P(-1) = (-1)^3 - m(-1)^2 + 5(-1) - 2 = 0$$

$$-1 - m - 5 - 2 = 0 \rightarrow m = -8$$

- 44 El resto de la siguiente división es igual a -8 :

$$(2x^4 + kx^3 - 7x + 6) : (x - 2)$$

¿Cuánto vale k ?

Llamamos $P(x) = 2x^4 + kx^3 - 7x + 6$

El resto de la división $P(x) : (x - 2)$ es $P(2)$, luego:

$$P(2) = -8 \rightarrow 2 \cdot 2^4 + k \cdot 2^3 - 7 \cdot 2 + 6 = -8 \rightarrow$$

$$\rightarrow 32 + 8k - 14 + 6 = -8 \rightarrow 8k = -32 \rightarrow k = -4$$

- 45 Halla el valor que debe tener m para que el polinomio $mx^3 - 3x^2 + 5x + 9m$ sea divisible por $x + 2$.

Llamamos $P(x) = mx^3 - 3x^2 + 5x + 9m$; dicho polinomio ha de ser divisible por $x + 2$, luego el resto ha de ser 0:

$$P(-2) = 0 \rightarrow m(-2)^3 - 3(-2)^2 + 5 \cdot (-2) + 9m = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow -8m - 12 - 10 + 9m = 0 \rightarrow m = 22$$

- 46 Calcula el valor de k para que el cociente de la división:

$$(x^3 - x^2 + kx - 1) : (x - 1)$$

sea igual a $x^2 + 1$. ¿Cuál será el resto?

Por Ruffini, calculamos el cociente:

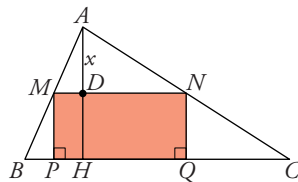
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & k & -1 \\ 1 & & 1 & 0 & k \\ \hline & 1 & 0 & k & \underline{k-1} \end{array}$$

El cociente de la división es $x^2 + k$, que ha de ser igual a $x^2 + 1 \rightarrow k = 1$

El resto será $k - 1 = 0$.

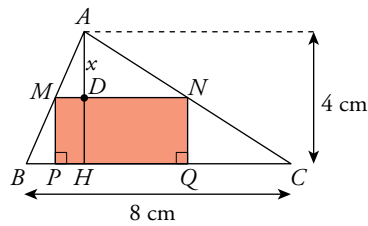
- 47 En el triángulo de la figura conocemos:

$$\overline{BC} = 8 \text{ cm} \quad \overline{AH} = 4 \text{ cm}$$



Por un punto D de la altura, tal que $\overline{AD} = x$, se traza una paralela MN a BC . Desde M y N se trazan perpendiculares a BC .

- Expresa \overline{MN} en función de x . (Utiliza la semejanza de los triángulos AMN y ABC).
- Escribe el área del rectángulo $MNPQ$ mediante un polinomio en x .



a) Por la semejanza de triángulos:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{BD}}{x} \rightarrow \overline{MN} = \frac{\overline{BC} \cdot x}{\overline{AH}} \rightarrow \overline{MN} = \frac{8 \cdot x}{4} \rightarrow \overline{MN} = 2x$$

b) $\overline{MP} = 4 - x$

$$A_{\text{rectángulo}} = \overline{MN} \cdot \overline{MP} = 2x(4 - x) = 8x - 2x^2$$

48 Simplifica esta expresión: $\left(1 - \frac{a}{a-b}\right) \frac{a-b}{b^2}$

$$\left(1 - \frac{a}{a-b}\right) \cdot \frac{a-b}{b^2} = \frac{a-b-a}{a-b} \cdot \frac{a-b}{b^2} = \frac{-b(a-b)}{(a-b)b^2} = \frac{-1}{b}$$

Página 79

REFLEXIONA SOBRE LA TEORÍA

49 Escribe, en cada caso, un polinomio de segundo grado que tenga por raíces los números dados:

a) 5 y -5 b) 0 y 4 c) 2 y 3 d) -6 y 1

a) $P(x) = (x-5)(x+5) \rightarrow P(x) = x^2 - 25$

b) $Q(x) = x(x-4) \rightarrow Q(x) = x^2 - 4x$

c) $R(x) = (x-2)(x-3) \rightarrow R(x) = x^2 - 5x + 6$

d) $S(x) = (x+6)(x-1) \rightarrow S(x) = x^2 + 5x - 6$

50 Escribe un polinomio de segundo grado que tenga solo la raíz 3.

Para que un polinomio de 2º grado tenga solo la raíz 3, esta ha de ser doble, luego: $P(x) = (x-3)^2 \rightarrow P(x) = x^2 - 6x + 9$

51 Escribe un polinomio de segundo grado que no tenga raíces.

Por ejemplo, $P(x) = 5x^2 + x + 3$ o $P(x) = x^2 + 4$

52 Escribe un polinomio que tenga por raíces los números 2, 3 y -1.

$$P(x) = (x-2)(x-3)(x+1) \rightarrow P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$$

53 Escribe un polinomio de tercer grado que solo tenga una raíz.

Tomamos un polinomio de segundo grado que no tenga raíces y lo multiplicamos por otro de grado uno, $x - a$. Por ejemplo: $x^2 + 1$ y $x - 8$.

$$P(x) = (x^2 + 1)(x - 8) = x^3 - 8x^2 + x - 8$$

54 Inventa dos polinomios, $P(x)$ y $Q(x)$, que verifiquen la siguiente condición: m.c.m. $[P(x), Q(x)] = x^2(x - 3)(x + 2)$

Para que el m.c.m. $[P(x), Q(x)] = x^2(x - 3)(x + 2)$, basta tomar $P(x) = x(x - 3)$ y $Q(x) = x^2(x + 2)$, por ejemplo.

55 Inventa dos polinomios, $P(x)$ y $Q(x)$, que verifiquen la siguiente condición: M.C.D. $[P(x), Q(x)] = x^2 - 4$

Para que el M.C.D. $[P(x), Q(x)] = x^2 - 4$, se pueden considerar, por ejemplo, $P(x) = (x - 2)^2(x + 2)$ y $Q(x) = x(x - 2)(x + 2)$.

56 Escribe tres polinomios de segundo grado que verifiquen, en cada caso, las condiciones que aparecen:

$$P(3) = 0 \text{ [3 es raíz de } P(x)\text{]}; P(5) = 6$$

$$Q(-4) = 0 \text{ [-4 es raíz de } Q(x)\text{]}; Q(-2) = -8$$

$$S(-2) = 0 \text{ [-2 es raíz de } S(x)\text{]}; S(0) = -2$$

$$P(x) = (x - 3)(x + a) \text{ por ser 3 raíz de } P(x)$$

$$P(5) = (5 - 3)(5 + a) = 6 \rightarrow 2(5 + a) = 6 \rightarrow 5 + a = 3 \rightarrow a = -2$$

$$P(x) = (x - 3)(x - 2) = x^2 - 5x + 6$$

$$Q(x) = (x + 4)(x + b) \text{ por ser -4 raíz de } Q(x)$$

$$Q(-2) = (-2 + 4)(-2 + b) = -8 \rightarrow 2(b - 2) = -8 \rightarrow b - 2 = -4 \rightarrow b = -2$$

$$Q(x) = (x + 4)(x - 2) = x^2 + 2x - 8$$

De la misma manera, por ser -2 raíz de $S(x)$, este polinomio ha de ser de la forma $S(x) = (x + 2)(x + c)$:

$$S(0) = -2 \rightarrow 2c = -2 \rightarrow c = -1 \rightarrow S(x) = (x + 2)(x - 1) \rightarrow$$

$$\rightarrow S(x) = x^2 + x - 2$$

57 a) Si la división $P(x) : (x - 2)$ es exacta, ¿qué puedes afirmar del valor $P(2)$?

b) Si -5 es una raíz del polinomio $P(x)$, ¿qué puedes afirmar de la división $P(x) : (x + 5)$?

c) ¿En qué resultado te has basado para responder a las dos preguntas anteriores?

a) Si la división es exacta, el resto es 0, luego $P(2) = 0$.

b) La división $P(x) : (x + 5)$ es exacta, el resto es 0.

c) En el teorema del resto.

- 58** El polinomio $x^2 - 3x + 4$, ¿se puede descomponer en factores? Responde razonadamente.

Buscamos las raíces del polinomio $x^2 - 3x + 4$ resolviendo la ecuación:

$$x^2 - 3x + 4 = 0 \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 16}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{-7}}{2} \text{ no tiene solución real.}$$

El polinomio $x^2 - 3x + 4$ es irreducible, no se puede descomponer en factores.

PROFUNDIZA

- 59** Prueba que la siguiente igualdad es verdadera:

$$\frac{1}{ab} + \frac{a}{b} - \frac{1 + (a+b)^2}{ab} + \frac{b}{a} = -2$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{ab} + \frac{a}{b} - \frac{1 + (a+b)^2}{ab} + \frac{b}{a} &= \frac{1 + a^2 - 1 - (a+b)^2 + b^2}{ab} = \\ &= \frac{a^2 + b^2 - a^2 - b^2 - 2ab}{ab} = \frac{-2ab}{ab} = -2 \end{aligned}$$

- 60** Efectúa y simplifica:

$$\text{a) } \frac{x-2y}{y} + \frac{y+3x}{x} - 3 \qquad \text{b) } \frac{x^2+y^2}{2xy} - \frac{x+y}{x} - \frac{x-y}{y} + \frac{x}{2y}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{x-2y}{y} + \frac{y+3x}{x} - 3 &= \frac{x(x-2y) + y(y+3x) - 3xy}{xy} = \\ &= \frac{x^2 - 2xy + y^2 + 3xy - 3xy}{xy} = \\ &= \frac{x^2 - 2xy + y^2}{xy} = \frac{(x-y)^2}{xy} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{x^2+y^2}{2xy} - \frac{x+y}{x} - \frac{x-y}{y} + \frac{x}{2y} &= \frac{x^2+y^2 - 2y(x+y) - 2x(x-y) + x^2}{2xy} = \\ &= \frac{x^2+y^2 - 2yx - 2y^2 - 2x^2 + 2xy + x^2}{2xy} = \\ &= \frac{-y^2}{2xy} = \frac{-y}{2x} \end{aligned}$$

- 61** Sacar factor común en las siguientes expresiones:

$$\text{a) } (x+5)(2x-1) + (x-5)(2x-1) \qquad \text{b) } (3-y)(a+b) - (a-b)(3-y)$$

 El factor común es un binomio.

$$a) (x+5)(2x-1) + (x-5)(2x-1) = (2x-1)(x+5+x-5) = (2x-1) \cdot 2x$$

$$b) (3-y)(a+b) - (a-b)(3-y) = (3-y)[(a+b) - (a-b)] = \\ = (3-y)(a+b-a+b) = 2b(3-y)$$

62 Factoriza las siguientes expresiones:

$$a) ax - ay + bx - by$$

$$b) 2x^2y + y + 2x^2 + 1$$

$$c) 3x^2y + xy + 3xy^2 + y^2$$

$$d) 2ab^3 - ab + 2b^2 - 1$$

$$a) ax - ay + bx - by = a(x-y) + b(x-y) = (a+b)(x-y)$$

$$b) 2x^2y + y + 2x^2 + 1 = 2x^2(y+1) + (y+1) = (2x^2+1)(y+1)$$

$$c) 3x^2y + xy + 3xy^2 + y^2 = 3x^2y + 3xy^2 + xy + y^2 = 3xy(x+y) + y(x+y) = \\ = (3xy+y)(x+y) = y(3x+1)(x+y)$$

$$d) 2ab^3 - ab + 2b^2 - 1 = 2ab^3 + 2b^2 - (ab+1) = 2b^2(ab+1) - (ab+1) = \\ = (2b^2-1)(ab+1) = (\sqrt{2}b-1)(\sqrt{2}b+1)(ab+1)$$

63 Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

$$a) \frac{2x^2y - xy^2}{10x - 5y}$$

$$b) \frac{3a^2b^2 - 6ab^3}{3a^3b - 6a^2b^2}$$

$$c) \frac{4a^2b^2 - 2a^2bx}{2abx + 2a^2b + 4b^2}$$

$$d) \frac{x^3 + 2x^2y - 2x^2 - 4xy + y^2x - 2y^2}{y^3 + 2xy^2 + 3y^2 + 6xy + x^2y + 3x^2}$$

$$a) \frac{2x^2y - xy^2}{10x - 5y} = \frac{xy(2x-y)}{5(2x-y)} = \frac{xy}{5}$$

$$b) \frac{3a^2b^2 - 6ab^3}{3a^3b - 6a^2b^2} = \frac{3ab^2(a-2b)}{3a^2b(a-2b)} = \frac{b}{a}$$

$$c) \frac{4a^2b^2 - 2a^2bx}{2abx + 2a^2b + 4b^2} = \frac{2a^2b(2b-x)}{2b(ax+a^2+2b)} = \frac{a^2(2b-x)}{ax+a^2+2b}$$

$$d) \frac{x^3 + 2x^2y - 2x^2 - 4xy + y^2x - 2y^2}{y^3 + 2xy^2 + 3y^2 + 6xy + x^2y + 3x^2} = \frac{x^3 + 2x^2y + y^2x - 2(x^2 + 2xy + y^2)}{y^3 + 2xy^2 + x^2y + 3(x^2 + 2xy + y^2)} = \\ = \frac{x(x^2 + 2xy + y^2) - 2(x^2 + 2xy + y^2)}{y(y^2 + 2xy + x^2) + 3(x^2 + 2xy + y^2)} = \\ = \frac{(x-2)(x^2 + 2xy + y^2)}{(y+3)(x^2 + 2xy + y^2)} = \frac{x-2}{y+3}$$

64 Opera y simplifica:

$$a) \frac{2a}{a-3b} - \frac{3b}{a+3b} - \frac{a^2 + 3ab + 18b^2}{a^2 - 9b^2}$$

$$b) \frac{bx-b}{x+1} + \frac{3bx}{x-1} + \frac{3bx^2 + bx + 2b}{1-x^2}$$

$$c) \left(\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y} \right) \frac{x^2-y^2}{2xy}$$

$$d) \left(1 - \frac{x-y}{x+y} \right) : \left(\frac{x-y}{x+y} - \frac{x+y}{x-y} \right)$$

$$\begin{aligned} a) \frac{2a}{a-3b} - \frac{3b}{a+3b} - \frac{a^2 + 3ab + 18b^2}{a^2 - 9b^2} &= \\ &= \frac{2a(a+3b) - 3b(a-3b) - (a^2 + 3ab + 18b^2)}{a^2 - 9b^2} = \\ &= \frac{2a^2 + 6ab - 3ab + 9b^2 - a^2 - 3ab - 18b^2}{a^2 - 9b^2} = \frac{a^2 - 9b^2}{a^2 - 9b^2} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \frac{bx-b}{x+1} + \frac{3bx}{x-1} + \frac{3bx^2 + bx + 2b}{1-x^2} &= \\ &= \frac{b(x-1)(x-1) + 3bx(x+1) - (3bx^2 + bx + 2b)}{x^2 - 1} = \\ &= \frac{b(x^2 - 2x + 1) + 3bx^2 + 3bx - 3bx^2 - bx - 2b}{x^2 - 1} = \\ &= \frac{bx^2 - 2bx + b + 2bx - 2b}{x^2 - 1} = \frac{bx^2 - b}{x^2 - 1} = \frac{b(x^2 - 1)}{x^2 - 1} = b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \left(\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y} \right) \frac{x^2-y^2}{2xy} &= \left[\frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{x^2-y^2} \right] \cdot \frac{x^2-y^2}{2xy} = \\ &= \frac{x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + 2xy - y^2}{x^2-y^2} \cdot \frac{x^2-y^2}{2xy} = \frac{4xy}{2xy} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d) \left(1 - \frac{x-y}{x+y} \right) : \left(\frac{x-y}{x+y} - \frac{x+y}{x-y} \right) &= \left(\frac{x+y-x+y}{x+y} \right) : \left[\frac{(x-y)^2 - (x+y)^2}{(x+y)(x-y)} \right] = \\ &= \frac{2y}{x+y} : \left[\frac{x^2 - 2xy + y^2 - x^2 - 2xy + y^2}{(x+y)(x-y)} \right] = \\ &= \frac{2y}{x+y} : \frac{-4xy}{(x+y)(x-y)} = \frac{2y(x+y)(x-y)}{-4xy(x+y)} = \\ &= -\frac{x-y}{2x} = \frac{y-x}{2x} \end{aligned}$$