Página 143

PRACTICA

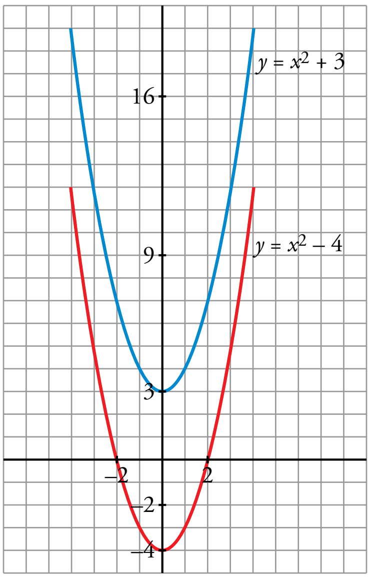
Funciones cuadráticas

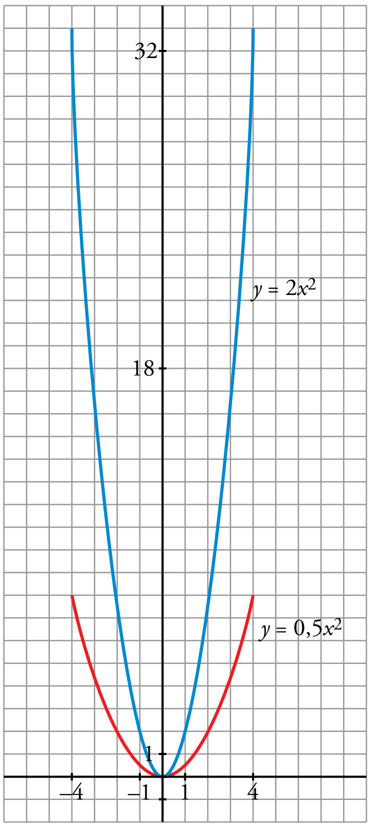
1 Representa las siguientes funciones haciendo, en cada caso, una tabla de valores como esta, y di cuál es el vértice de cada parábola:

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	…	…	…	…	…	…	…	…	…

a) $y = x^2 + 3$ b) $y = x^2 - 4$ c) $y = 2x^2$ d) $y = 0{,}5x^2$

x	$y = x^2 + 3$	$y = x^2 - 4$	$y = 2x^2$	$y = 0{,}5x^2$
–4	19	12	32	8
–3	12	5	18	4,5
–2	7	0	8	2
–1	4	–3	2	0,5
0	3	–4	0	0
1	4	–3	2	0,5
2	7	0	8	2
3	12	5	18	4,5
4	19	12	32	8
VÉRTICE	(0, 3)	(0, –4)	(0, 0)	(0, 0)



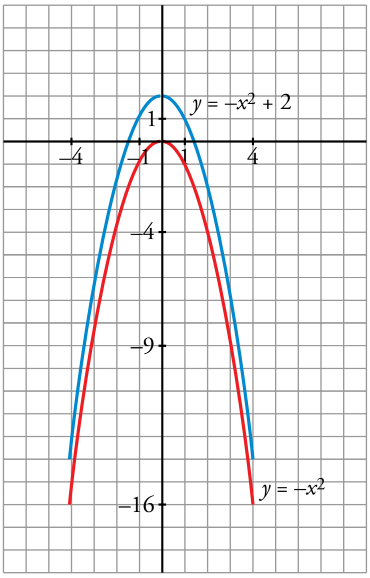


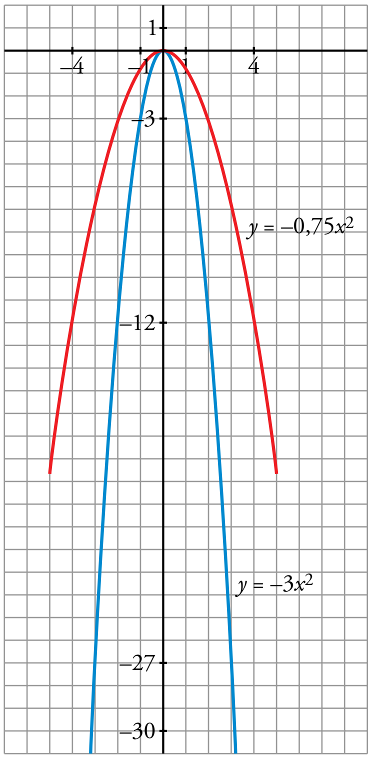
2 **Haz una tabla de valores como la del ejercicio anterior para representar cada una de las funciones siguientes:**

a) $y = -x^2$ b) $y = -x^2 + 2$ c) $y = -3x^2$ d) $y = -0{,}75x^2$

Di cuál es el vértice de cada una de estas parábolas.

x	$y = -x^2$	$y = -x^2 + 2$	$y = -3x^2$	$y = -0{,}75x^2$
–4	–16	–14	–48	–12
–3	–9	–7	–27	–6,75
–2	–4	–2	–12	–3
–1	–1	1	–3	–0,75
0	0	2	0	0
1	–1	1	–3	–0,75
2	–4	–2	–12	–3
3	–9	–7	–27	–6,75
4	–16	–14	–48	–12
VÉRTICE	(0, 0)	(0, 2)	(0, 0)	(0, 0)





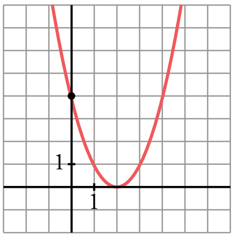
3 **Representa las siguientes parábolas, hallando los puntos de corte con los ejes, el vértice y algunos puntos próximos a él:**

a) $y = (x - 2)^2$ b) $y = 2x^2 - 8x + 2$

c) $y = \frac{1}{3}x^2 - x + 3$ d) $y = -x^2 + 3x - 4$

a) $y = (x-2)^2$

Puntos de corte con los ejes:



Eje X: $(x-2)^2 = 0 \rightarrow x = 2$ raíz doble $\rightarrow (2, 0)$

Eje Y: $y = 4 \rightarrow (0, 4)$

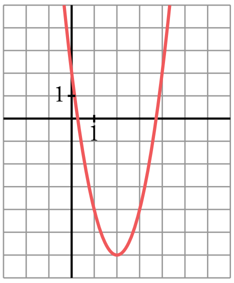
Vértice: $(2, 0)$

Puntos próximos al vértice

x	–1	1	3	4
y	9	1	1	4

b) $y = 2x^2 - 8x + 2$

Puntos de corte con los ejes:



Eje X: $2x^2 - 8x + 2 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \frac{8 \pm \sqrt{64-16}}{4} = \frac{8 \pm \sqrt{48}}{4} = \frac{8 \pm 4\sqrt{3}}{4} =$$

$$= 2 \pm \sqrt{3} \begin{cases} (2+\sqrt{3}, 0) \approx (3{,}73; 0) \\ (2-\sqrt{3}, 0) \approx (0{,}27; 0) \end{cases}$$

Eje Y: $y = 2 \rightarrow (0, 2)$

Vértice: $(2, -6)$

Puntos próximos al vértice:

x	–1	1	3	4
y	12	–4	–4	2

c) $y = \frac{1}{3}x^2 - x + 3$

Puntos de corte con los ejes:

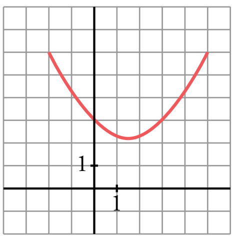
Eje X: $\frac{1}{3}x^2 - x + 3 = 0 \rightarrow \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2/3} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2/3}$

No tiene puntos de corte con el eje X.

Eje Y: $y = 3 \rightarrow (0, 3)$

Vértice: $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$

Puntos próximos al vértice:



x	–1	1	3
y	13/3	7/3	3

d) $y = -x^2 + 3x - 4$

Puntos de corte con los ejes:

Eje X: $-x^2 + 3x - 4 = 0 \;\rightarrow\; \dfrac{-3 \pm \sqrt{9 - 16}}{-2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{-7}}{-2}$

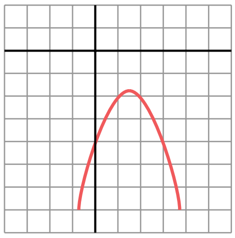
No tiene puntos de corte con el eje X.

Eje Y: $y = -4 \;\rightarrow\; (0, -4)$

Vértice: $\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{7}{4}\right)$

Puntos próximos al vértice:

x	–1	1	2	3
y	–8	–2	–2	–4

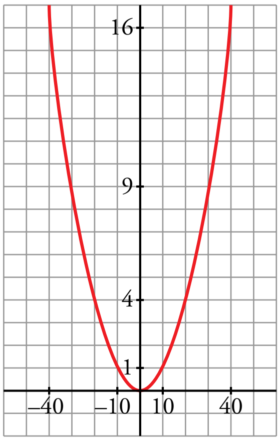


4 Utiliza una escala adecuada para representar las parábolas siguientes:

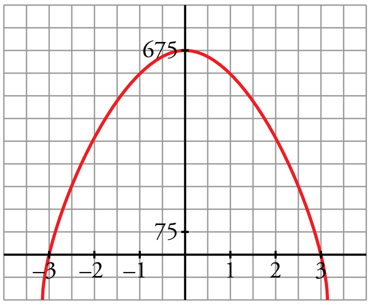
a) $y = \dfrac{x^2}{100}$ **b)** $y = -75x^2 + 675$

c) $y = 0{,}002x^2 - 0{,}04x$ **d)** $y = -10x^2 - 100x$

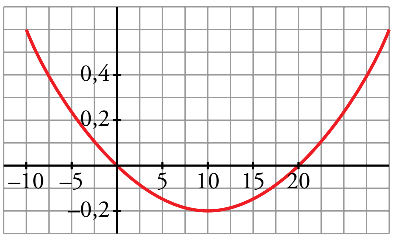
a) $y = \dfrac{x^2}{100}$



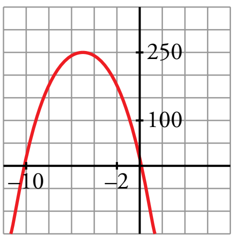
b) $y = -75x^2 + 675$



c) $y = 0{,}002x^2 - 0{,}04x$



d) $y = -10x^2 - 100x$



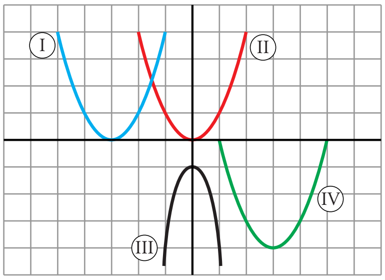
5 **Asocia a cada una de las gráficas una de las expresiones siguientes:**

a) $y = x^2$

b) $y = x^2 - 6x + 5$

c) $y = (x + 3)^2$

d) $y = -3x^2 - 1$



a) II b) IV c) I d) III

6 **La altura, h, a la que se encuentra en cada instante, t, un proyectil que lanzamos verticalmente con una velocidad de 500 m/s, es: $h = 500t - 5t^2$**

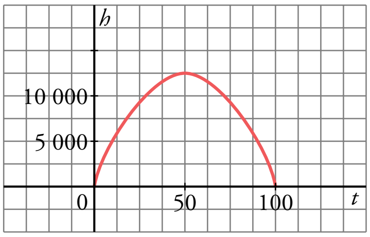
a) Haz una representación gráfica.

b) Di cuál es su dominio de definición.

c) ¿En qué instante alcanza la altura máxima? ¿Cuál es ésta?

d) ¿En qué intervalo de tiempo el proyectil está a una altura superior a los 4 500 metros?

a)



b) Dominio = [0, 100]

c) La altura máxima es alcanzada a los 50 segundos, a una altura de 12 500 metros.

d) Queremos saber cuándo $h > 4\,500$ metros:

$$500t - 5t^2 > 4\,500 \;\rightarrow\; -5t^2 + 500t - 4\,500 > 0$$

Resolvemos la ecuación:

$$t = \frac{-500 \pm \sqrt{250\,000 - 90\,000}}{-10} = \frac{-500 \pm \sqrt{160\,000}}{-10} =$$

$$= \frac{-500 \pm 400}{-10} \begin{cases} t = 10 \\ t = 90 \end{cases}$$

Si $t < 10 \;\rightarrow\; -5t^2 + 500t - 4\,500 < 0$

Si $10 < t < 90 \;\rightarrow\; -5t^2 + 500t - 4\,500 > 0$

Si $t > 90 \;\rightarrow\; -5t^2 + 500t - 4\,500 < 0$

Luego, $h > 4\,500$ m en el intervalo (10, 90).

Otras funciones

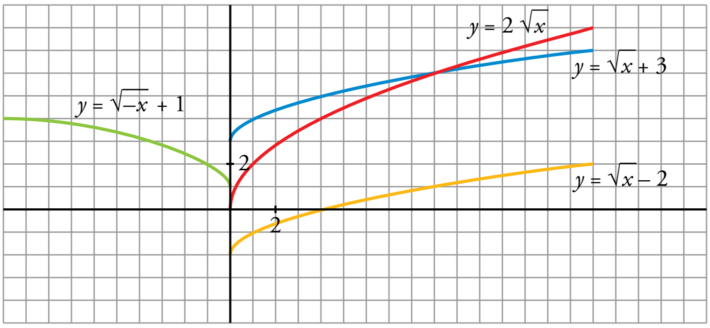
7 Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $y = 3 + \sqrt{x}$

b) $y = \sqrt{x} - 2$

c) $y = 2\sqrt{x}$

d) $y = \sqrt{-x} + 1$



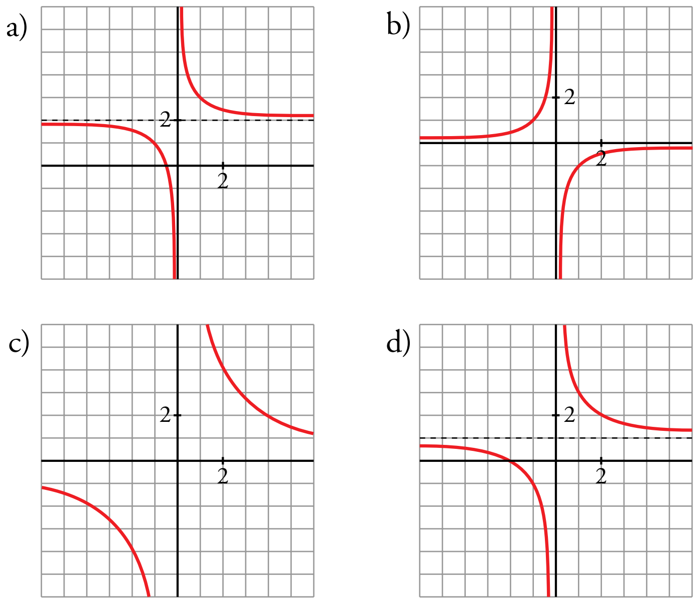
8 Dibuja la gráfica de las funciones siguientes:

a) $y = \frac{1}{x} + 2$

b) $y = -\frac{1}{x}$

c) $y = \frac{8}{x}$

d) $y = \frac{2}{x} + 1$

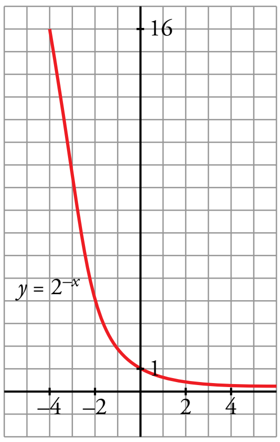


9 **Representa las siguientes funciones haciendo, en cada caso, una tabla de valores como la del ejercicio 1. (Ayúdate de la calculadora).**

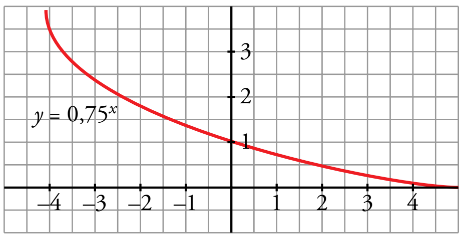
a) $y = 2^{-x}$ b) $y = 0,75^x$ c) $y = 1,5^x$ d) $y = 2^x - 3$

x	2^{-x}	$0,75^x$	$1,5^x$	$2^x - 3$
–4	16	3,16	0,197	–2,9375
–3	8	2,37	0,296	–2,875
–2	4	1,78	0,44	–2,75
–1	2	1,33	0,66	–2,5
0	1	1	1	–2
1	0,5	0,75	1,5	–1
2	0,25	0,5625	2,25	1
3	0,125	0,422	3,375	5
4	0,0625	0,3164	5,0625	13

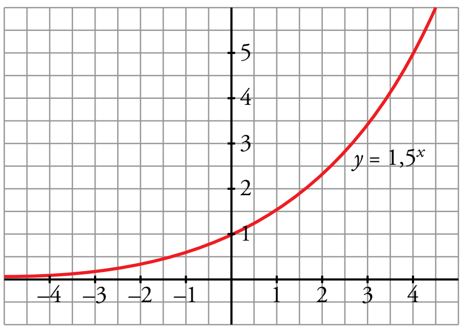
a)



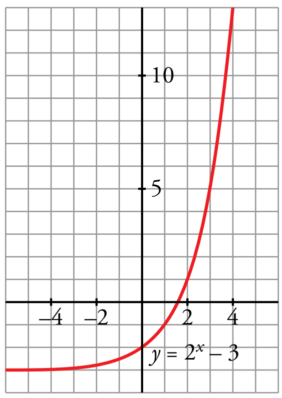
b)



c)



d)

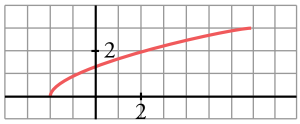


10 **Estudia el dominio de definición de las siguientes funciones y represéntalas gráficamente:**

a) $y = \sqrt{x+2}$ b) $y = \sqrt{4-x}$ c) $y = \sqrt{2x-5}$ d) $y = 1 + \sqrt{-2x}$

a) $y = \sqrt{x+2}$

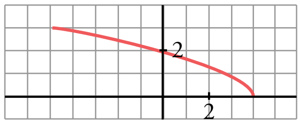
$x + 2 \geq 0 \;\rightarrow\; x \geq -2 \;\rightarrow\;$ Dominio = $[-2, +\infty)$



b) $y = \sqrt{4-x}$

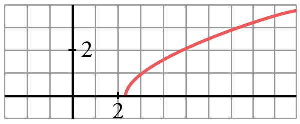
$4 - x \geq 0 \;\rightarrow\; -x \geq -4 \;\rightarrow\; x \leq 4$

Dominio = $(-\infty, 4]$



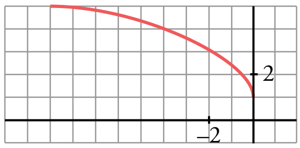
c) $y = \sqrt{2x-5}$

$2x - 5 \geq 0 \;\rightarrow\; x \geq \dfrac{5}{2} \;\rightarrow\;$ Dominio = $\left[\dfrac{5}{2}, +\infty\right)$



d) $y = 1 + \sqrt{-2x}$

$-2x \geq 0 \;\rightarrow\; x \leq 0 \;\rightarrow\;$ Dominio = $(-\infty, 0]$



Página 144

11 (ESTÁ RESUELTO EN EL LIBRO).

12 **Di cuál es el dominio de definición de las siguientes funciones y represéntalas gráficamente:**

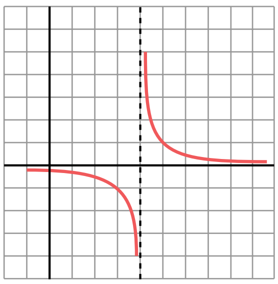
a) $y = \dfrac{1}{x-4}$ b) $y = \dfrac{-2}{x+1}$ c) $y = \dfrac{1}{x} + 2$ d) $y = \dfrac{1}{x-1} + 1$

a) $y = \dfrac{1}{x-4}$

Dominio = $\mathbb{R} - \{4\}$

• Calculamos algunos puntos próximos a $x = 4$:

x	3,5	3,9	3,99	4,01	4,1	4,5
y	–2	–10	–100	100	10	2

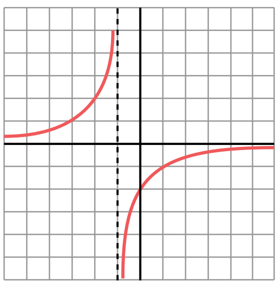


b) $y = -\dfrac{2}{x+1}$

Dominio = $\mathbb{R} - \{-1\}$

• Calculamos algunos puntos próximos a $x = -1$:

x	–1,5	–1,1	–1,01	–0,99	–0,9	–0,5
y	4	20	200	–200	–20	–4

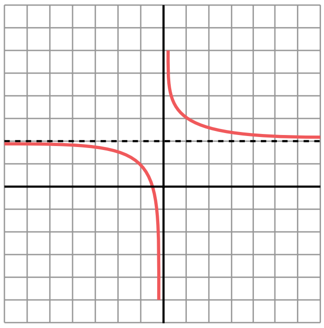


c) $y = \dfrac{1}{x} + 2$

Dominio = $\mathbb{R} - \{0\}$

- Calculamos algunos puntos próximos a $x = 0$:

x	–0,5	–0,1	–0,01	0,01	0,1	0,5
y	0	–8	–98	102	12	4

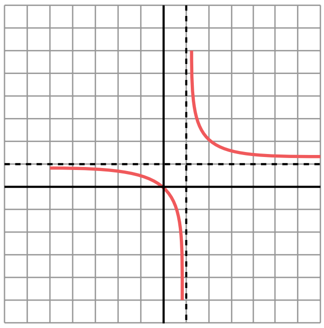


d) $y = \dfrac{1}{x-1} + 1$

Dominio = $\mathbb{R} - \{1\}$

- Calculamos algunos puntos próximos a $x = 1$:

x	0,5	0,9	0,99	1,01	1,1	1,5
y	–1	–9	–99	101	11	3



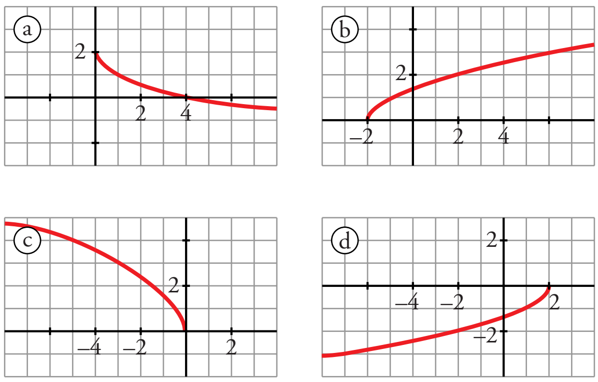
13 **Asocia a cada gráfica la fórmula que le corresponde:**

I) $y = \sqrt{x+2}$

II) $y = 2 - \sqrt{x}$

III) $y = -\sqrt{2-x}$

IV) $y = \sqrt{-3x}$



I $\leftrightarrow$ b) II $\leftrightarrow$ a)

III $\leftrightarrow$ d) IV $\leftrightarrow$ c)

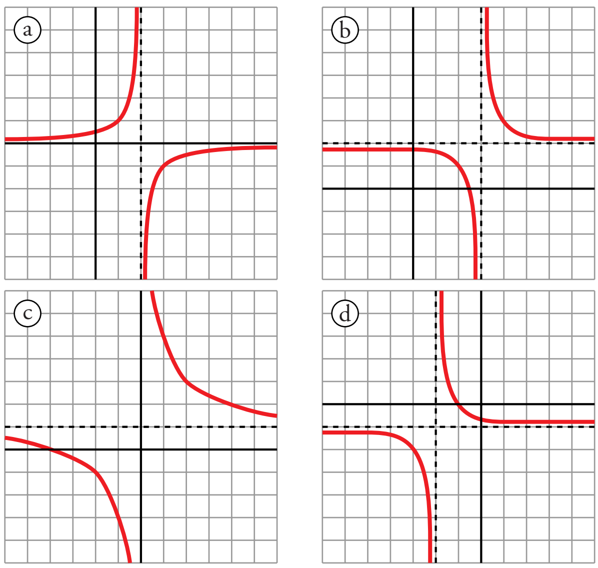
14 **Asocia a cada gráfica una de estas fórmulas:**

I) $y = \dfrac{4}{x} + 1$

II) $y = 2 + \dfrac{1}{x-3}$

III) $y = -1 + \dfrac{1}{x+2}$

IV) $y = \dfrac{-1}{x-2}$



I $\leftrightarrow$ c) II $\leftrightarrow$ b)

III) $\leftrightarrow$ d) IV $\leftrightarrow$ a)

15 **Asocia a cada gráfica una de estas fórmulas:**

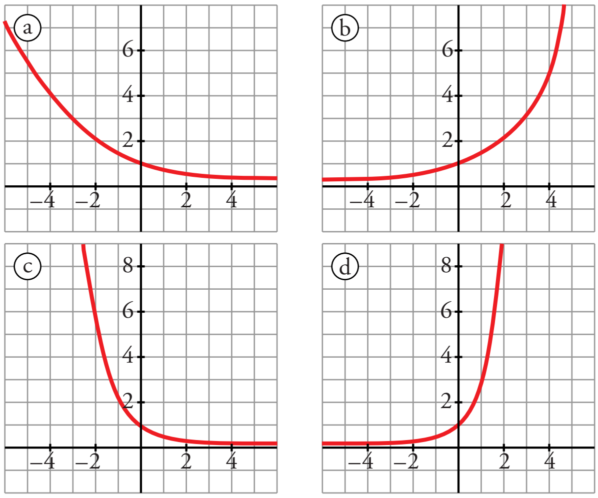
I) $y = 3^x$

II) $y = 1{,}5^x$

III) $y = 0{,}4^x$

IV) $y = 0{,}7^x$

Di, de cada una de ellas, si es creciente o decreciente.



I $\Leftrightarrow$ d) Creciente

II $\Leftrightarrow$ b) Creciente

III $\Leftrightarrow$ c) Decreciente

IV $\Leftrightarrow$ a) Decreciente

16 **a) Representa las funciones** $y = 3^x$ **e** $y = log_3\, x$ **.**

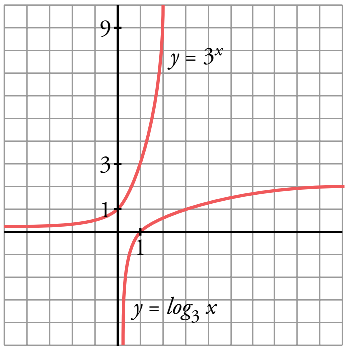
b) Comprueba si pertenecen a la gráfica de $y = log_3\, x$ **los puntos siguientes:**

$$(243, 5) \quad \left(\frac{1}{27}, -3\right) \quad (\sqrt{3}; 0{,}5) \quad (-3, -1)$$

a) Una es la inversa de la otra.

x	–2	–1	0	1	2
3^x	1/9	1/3	1	3	9

x	1/9	1/3	1	3	9
$log_3 x$	–2	–1	0	1	2



b) Se sabe que $y = log_3\, x \;\Leftrightarrow\; 3^y = x$. Luego:

$(243, 5) \;\rightarrow\; 3^5 = 243 \;\rightarrow\; log_3\, 243 = 5$

$\left(\frac{1}{27}, -3\right) \;\rightarrow\; 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27} \;\rightarrow\; log_3\, \frac{1}{27} = -3$

$(\sqrt{3}; 0{,}5) \;\rightarrow\; 3^{0{,}5} = 3^{1/2} = \sqrt{3} \;\rightarrow\; log_3\, \sqrt{3} = 0{,}5$

$(-3, -1) \;\rightarrow\; 3^{-1} = \frac{1}{3} \neq -3 \;\rightarrow\;$ $(-3, -1)$ no pertenece a la gráfica de $y = log_3\, x$.

Luego, $(243, 5)$, $\left(\frac{1}{27}, -3\right)$ y $(\sqrt{3}, 0{,}5)$ son puntos que pertencen a la gráfica de $y = log_3\, x$.

Página 145

PIENSA Y RESUELVE

17 (ESTÁ RESUELTO EN EL LIBRO).

18 **Resuelve analítica y gráficamente los siguientes sistemas:**

a) $\begin{cases} y = 2x^2 - 5x - 6 \\ y = 3x + 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = x^2 - 2x + 1 \\ y = -2x + 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = 2x^2 - 8x - 3 \\ y = x^2 - 2x - 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y = -x^2 + 5x \\ y = x^2 + 3x - 15 \end{cases}$

a) $\begin{cases} y = 2x^2 - 5x - 6 \\ y = 3x + 4 \end{cases}$

Analíticamente

Vemos los puntos de corte:

$2x^2 - 5x - 6 = 3x + 4 \ \rightarrow \ 2x^2 - 8x - 10 = 0 \ \rightarrow \ x^2 - 4x - 5 = 0$

$x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} = \dfrac{4 \pm 6}{2} \begin{cases} x = 5 \ \rightarrow \ y = 19 \\ x = -1 \ \rightarrow \ y = 1 \end{cases}$

Hay dos puntos de corte: (5, 19), (–1, 1).

Gráficamente

Representamos en unos mismos ejes ambas funciones:

- $y = 2x^2 - 5x - 6$

  Puntos de corte con los ejes:

  Eje X: $2x^2 - 5x - 6 = 0 \ \rightarrow$

  $\rightarrow \ x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 + 48}}{2 \cdot 2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{73}}{4} =$

  $= \begin{cases} x = \left(\dfrac{5 + \sqrt{73}}{4}, 0\right) \approx (3{,}38; 0) \\ x = \left(\dfrac{5 - \sqrt{73}}{4}, 0\right) \approx (-0{,}88; 0) \end{cases}$

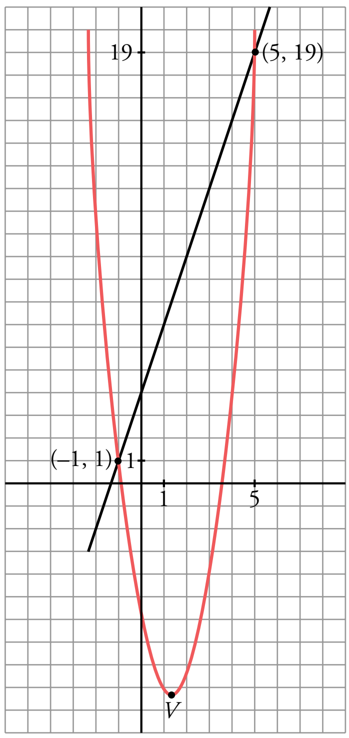
  Eje Y: $y = -6 \ \rightarrow \ (0, -6)$

  Vértice: $\left(\dfrac{5}{4}, -\dfrac{73}{8}\right)$

- $y = 3x + 4$

  Hacemos una tabla de valores:

x	–1	5
y	1	19



b) $\begin{cases} y = x^2 - 2x + 1 \\ y = -2x + 2 \end{cases}$

Analíticamente

Puntos de corte entre ambas:

$x^2 - 2x + 1 = -2x + 2 \;\rightarrow\; x^2 - 1 = 0 \;\rightarrow\; x = \pm 1 \;\rightarrow\; y = \begin{cases} 0 \\ 4 \end{cases}$

Los puntos de corte son: (1, 0), (–1, 4).

Gráficamente

Representamos en unos mismos ejes ambas funciones:

- $y = x^2 - 2x + 1$

  Puntos de corte con los ejes:

  Eje X: $x^2 - 2x + 1 = 0 \;\rightarrow\; x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = 1 \;\rightarrow$ raíz doble: (1, 0)

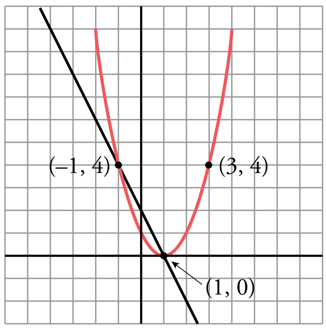
  Eje Y: $y = 1 \;\rightarrow\; (0, 1)$

  Vértice: (1, 0)

- $y = -2x + 2$

  Hacemos una tabla de valores:

x	1	–1
y	0	4



c) $\begin{cases} y = 2x^2 - 8x - 3 \\ y = \;\; x^2 - 2x - 3 \end{cases}$

Analíticamente

$2x^2 - 8x - 3 = x^2 - 2x - 3 \;\rightarrow\; x^2 - 6x = 0 \;\rightarrow\; x(x-6) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 6 \end{cases}$

Si $x_1 = 0 \;\rightarrow\; y_1 = -3$

Si $x_2 = 6 \;\rightarrow\; y_2 = 6^2 - 2 \cdot 6 - 3 = 21$

Solución: $x_1 = 0,\; y_1 = -3;\; x_2 = 6,\; y_2 = 21$

Gráficamente

Representamos cada una de las parábolas.

- $y = 2x^2 - 8x - 3$

  Cortes con los ejes:

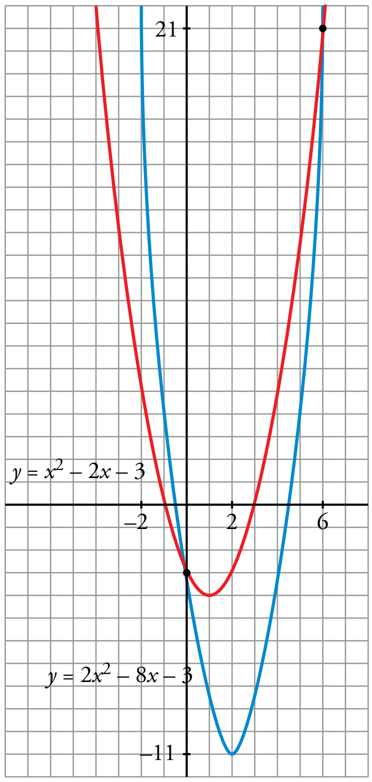
  Eje X: $y = 0 \;\rightarrow\; 2x^2 - 8x - 3 = 0$

$x = \dfrac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot (-3) \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \dfrac{8 \pm \sqrt{88}}{4} =$

$= \dfrac{4 \pm \sqrt{22}}{2} \begin{cases} (4{,}34;\ 0) \\ (-0{,}34;\ 0) \end{cases}$

Eje Y: $x = 0 \;\rightarrow\; y = -3 \;\rightarrow\; (0, -3)$

Vértice: $(2, -11)$



- $y = x^2 - 2x - 3$

Cortes con los ejes:

Eje X: $y = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 2x - 3 = 0$

$x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-3)}}{2} =$

$= \dfrac{2 \pm 4}{2} \begin{cases} (3, 0) \\ (-1, 0) \end{cases}$

Eje Y: $x = 0 \;\rightarrow\; y = -3 \;\rightarrow\; (0, -3)$

Vértice: $(1, -4)$

d) $\begin{cases} y = -x^2 + 5x \\ y = x^2 + 3x - 15 \end{cases}$

Analíticamente

$-x^2 + 5x = x^2 + 3x - 15 \;\rightarrow\; 2x^2 - 2x - 15 = 0$

$x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 2 \cdot (-15)}}{2 \cdot 2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{124}}{4} = \dfrac{1 \pm \sqrt{31}}{2} \begin{cases} x_1 = 3{,}28 \\ x_2 = -2{,}28 \end{cases}$

Si $x_1 = 3{,}28 \;\rightarrow\; y_1 = 5{,}63$

Si $x_2 = -2{,}28 \;\rightarrow\; y_2 = -16{,}63$

Gráficamente

Representamos cada una de las parábolas.

- $y = -x^2 + 5x$

Cortes con los ejes:

Eje X: $y = 0 \;\rightarrow\; -x^2 + 5x = 0 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; x(-x + 5) = 0 \begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; (0, 0) \\ x = 5 \;\rightarrow\; (5, 0) \end{cases}$

Eje Y: $x = 0 \;\rightarrow\; y = 0 \;\rightarrow\; (0, 0)$

Vértice: $\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{25}{4}\right)$

• $y = x^2 + 3x - 15$

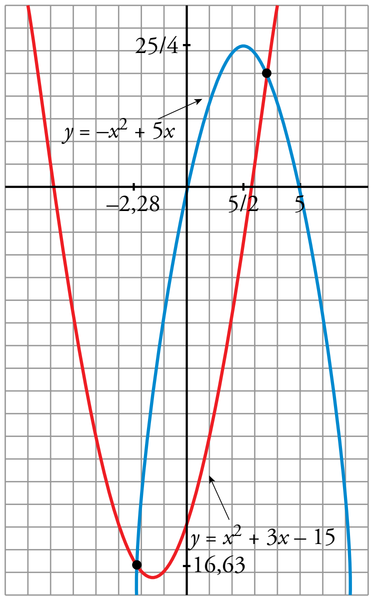
Cortes con los ejes:

Eje X: $y = 0 \ \rightarrow \ x^2 + 3x - 15 = 0$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 15}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{69}}{2} = \begin{cases} x_1 = 2{,}65 \ \rightarrow \ (2{,}65;\ 0) \\ x_2 = -5{,}65 \ \rightarrow \ (-5{,}65;\ 0) \end{cases}$$

Eje Y: $x = 0 \ \rightarrow \ y = -15 \ \rightarrow \ (0, -15)$

Vértice: $\left(\dfrac{-3}{2}, \dfrac{-69}{4}\right)$



19 **Comprueba analítica y gráficamente que estos dos sistemas no tienen solución:**

a) $\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x^2 - x - \dfrac{3}{2} \\ y = \dfrac{x}{2} - 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = \dfrac{1}{x-1} \\ y = -x + 1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x^2 - x - \dfrac{3}{2} \\ y = \dfrac{x}{2} - 3 \end{cases}$

RESOLUCIÓN ANALÍTICA

Resolvemos el sistema:

$$\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} = \frac{x}{2} - 3 \ \rightarrow \ x^2 - 2x - 3 = x - 6 \ \rightarrow \ x^2 - 3x + 3 = 0$$

$x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 12}}{2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{-3}}{2}$ → No hay puntos en común → No hay solución.

RESOLUCIÓN GRÁFICA

• Representamos $y = \dfrac{1}{2}x^2 - x - \dfrac{3}{2}$

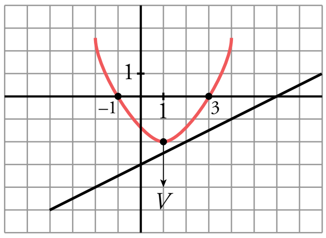
Puntos de corte con los ejes:

Eje X: $\dfrac{1}{2}x^2 - x - \dfrac{3}{2} = 0 \ \rightarrow \ x^2 - 2x - 3 = 0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \begin{cases} 3 \ \rightarrow \ (3, 0) \\ -1 \ \rightarrow \ (-1, 0) \end{cases}$$

Eje Y: $y = -\dfrac{3}{2} \rightarrow \left(0, -\dfrac{3}{2}\right)$

Vértice: (1, –2)



- Representamos $y = \dfrac{x}{2} - 3$

x	0	2
y	–3	–2

b) $\begin{cases} y = \dfrac{1}{x-1} \\ y = -x + 1 \end{cases}$

RESOLUCIÓN ANALÍTICA

Resolvemos el sistema:

$$\frac{1}{x-1} = -x + 1 \rightarrow 1 = (-x+1)(x-1) \rightarrow 1 = -(x-1)^2 \rightarrow$$

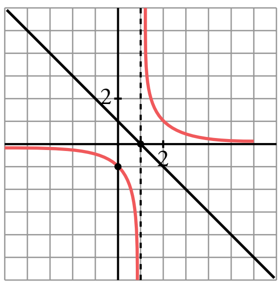
$$\rightarrow 1 = -x^2 + 2x - 1$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

No hay puntos en común.

No hay solución.

RESOLUCIÓN GRÁFICA



- Representamos $y = \dfrac{1}{x-1}$

x	0	–1	2	3
y	–1	–1/2	1	1/2

- Representamos $y = -x + 1$

x	0	2
y	1	–1

20 **Resuelve analítica y gráficamente los siguientes sistemas:**

a) $\begin{cases} y = \dfrac{2}{x+1} \\ y = 3x - 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = \sqrt{x+1} \\ y = x - 5 \end{cases}$

a) $\begin{cases} y = \dfrac{2}{x+1} \\ y = 3x - 4 \end{cases}$

RESOLUCIÓN ANALÍTICA:

Resolvemos el sistema:

$$\frac{2}{x+1} = 3x - 4 \ \rightarrow\ 2 = (3x-4)(x+1) \ \rightarrow\ 3x^2 + 3x - 4x - 6 = 0$$

$$3x^2 - x - 6 = 0 \ \rightarrow\ x = \frac{1 \pm \sqrt{1+72}}{6} = \frac{1 \pm \sqrt{73}}{6} =$$

$$= \begin{cases} x = \dfrac{1+\sqrt{73}}{6} \approx 1{,}59 \\ x = \dfrac{1-\sqrt{73}}{6} \approx -1{,}26 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } x = 1{,}59 \ \rightarrow\ y = 0{,}77 \\ \phantom{\text{Si }} x = -1{,}26 \ \rightarrow\ y = -7{,}77 \end{array}\right\} \text{Soluciones: } (1{,}59;\ 0{,}77) \text{ y } (-1{,}26;\ -7{,}77)$$

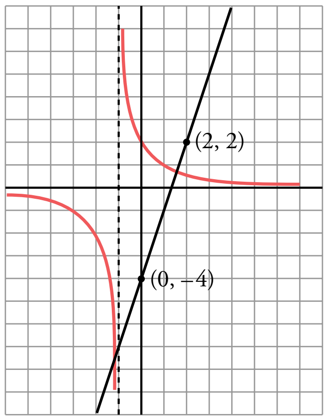
RESOLUCIÓN GRÁFICA

- Representamos la función $y = \dfrac{2}{x+1}$ que tiene una asíntota en $x = -1$ y otra en $y = 0$:

x	-3	-2	0	1
y	-1	-2	2	1

- Representamos la recta $y = 3x - 4$:

x	2	0
y	2	-4



b) $\begin{cases} y = \sqrt{x+1} \\ y = x - 5 \end{cases}$

RESOLUCIÓN ANALÍTICA

Puntos de corte:

$$\sqrt{x+1} = x - 5 \ \rightarrow\ x + 1 = (x-5)^2 \ \rightarrow\ x + 1 = x^2 - 10x + 25$$

$$x^2 - 11x + 24 = 0 \ \rightarrow\ x = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 96}}{2} = \frac{11 \pm 5}{2} =$$

$$= \begin{cases} x = 8 \ \rightarrow\ y = 3 \\ x = 3 \ \rightarrow\ y = -2 \ \rightarrow\ \text{no pertenece a } y = \sqrt{x+1} \end{cases}$$

Solución: (8, 3)

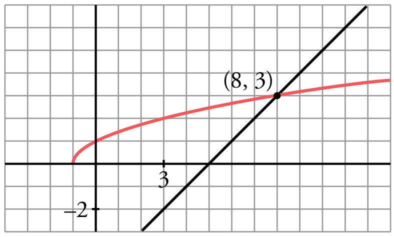
RESOLUCIÓN GRÁFICA

- Para representar $y = \sqrt{x+1}$ damos valores:

x	–1	3	0	8
y	0	2	1	3

- Para representar $y = x - 5$, hacemos la tabla de valores:

x	3	8
y	–2	3



21 **Halla los puntos comunes de las funciones $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2$.**

$\sqrt{x} = x^2 \rightarrow x = x^4 \rightarrow x^4 - x = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x(x^3 - 1) = 0 \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 0 \\ x^3 - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow y = 1 \end{cases}$

Los puntos en común son (0, 0) y (1, 1).

22 **Aplica la definición de logaritmo para hallar, sin calculadora:**

a) $log_2 64$ b) $log_2 16$

c) $log_2 \frac{1}{4}$ d) $log_2 \sqrt{2}$

e) $log_3 81$ f) $log_3 \frac{1}{3}$

g) $log_3 \sqrt{3}$ h) $log_4 16$

a) $log_2 64 = 6$, porque $2^6 = 64$.

b) $log_2 16 = 4$, por ser $2^4 = 16$.

c) $log_2 \frac{1}{4} = -2$, ya que $2^{-2} = \frac{1}{4}$.

d) $log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$, porque $2^{1/2} = \sqrt{2}$.

e) $log_3 81 = 4$, pues $3^4 = 81$.

f) $log_3 \frac{1}{3} = -1$, ya que $3^{-1} = \frac{1}{3}$.

g) $log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$, por ser $3^{1/2} = \sqrt{3}$.

h) $log_4 16 = 2$, ya que $4^2 = 16$.

23 **Halla con la calculadora:**

a) $log_2 13{,}5$ b) $log_3 305$

c) $log_5 112$ d) $log_2 \frac{1}{7}$

e) $log_3 5^7$ f) $log_4 \sqrt{725}$

g) $log_2 10^6$ h) $log_3 10^{-4}$

a) $log_2\, 13{,}5 = \dfrac{log\, 13{,}5}{log\, 2} = 3{,}75$

b) $log_3\, 305 = \dfrac{log\, 305}{log\, 3} = 5{,}206$

c) $log_5\, 112 = \dfrac{log\, 112}{log\, 5} = 2{,}93$

d) $log_2\, \dfrac{1}{7} = \dfrac{log\, 1/7}{log\, 2} = -2{,}807$

e) $log_3\, 5^7 = \dfrac{log\, 5^7}{log\, 3} = 10{,}255$

f) $log_4\, \sqrt{725} = \dfrac{log\, \sqrt{725}}{log\, 4} = 2{,}375$

g) $log_2\, 10^6 = \dfrac{log\, 10^6}{log\, 2} = 19{,}93$

h) $log_3\, 10^{-4} = \dfrac{log\, 10^{-4}}{log\, 3} = -8{,}384$

24 Calcula la base de los siguientes logaritmos:

a) $log_b\, 10\,000 = 2$ **b)** $log_b\, 125 = 3$

c) $log_b\, 4 = -1$ **d)** $log_b\, 3 = \dfrac{1}{2}$

a) $log_b\, 10\,000 = 2 \;\rightarrow\; b^2 = 10\,000 \;\rightarrow\; b = 100$

b) $log_b\, 125 = 3 \;\rightarrow\; b^3 = 125 \;\rightarrow\; b = 5$

c) $log_b\, 4 = -1 \;\rightarrow\; b^{-1} = 4 \;\rightarrow\; b = \dfrac{1}{4}$

d) $log_b\, 3 = \dfrac{1}{2} \;\rightarrow\; b^{1/2} = 3 \;\rightarrow\; b = 9$

25 Las ventanas de un edificio de oficinas han de tener $2\ m^2$ de área.

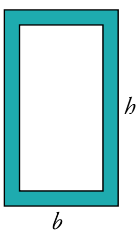
a) Haz una tabla que muestre cómo varía la altura de las ventanas según la longitud de la base.

b) Representa la función *base-altura*.

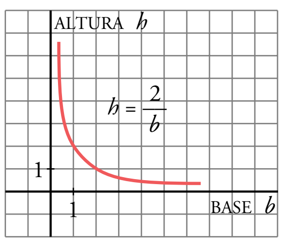
El área de la ventana es: $b \cdot h = 2\ m^2$.

La función que nos da la altura en función de la variación de la base es: $h = \dfrac{2}{b}$

Tabla de valores:



b	h
0,25	8
0,5	4
1	2
1,25	1,6
1,5	$1,\widehat{3}$
1,75	1,14



26 **Con un listón de madera de 3 metros de largo, queremos fabricar un marco para un cuadro.**

a) Si la base midiera 0,5 m, ¿cuánto medirían la altura y la superficie del cuadro?

b) ¿Cuál es el valor de la superficie para una base cualquiera x?

c) ¿Para qué valor de la base se obtiene la superficie máxima?

d) ¿Cuánto vale dicha superficie?

a) $x \to$ base: $2 \cdot 0{,}5 + 2y = 3 \to y = 1$

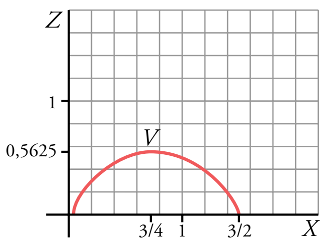
$y \to$ altura

La altura mediría 1 m.

Área $= x \cdot y = 0{,}5 \cdot 1 = 0{,}5$. La superficie sería de 0,5 m^2.

b) $2x + 2y = 3 \to y = \dfrac{3-2x}{2}$

Área $= x \cdot y \to$ Área $= x \cdot \left(\dfrac{3-2x}{2}\right)$



c) y d) Dibujamos la función $z = \dfrac{x(3-2x)}{2}$

Puntos de corte:

Eje X: $x(3-2x) = 0 \to \begin{cases} x = 0 \to (0, 0) \\ x = 3/2 \to (3/2, 0) \end{cases}$

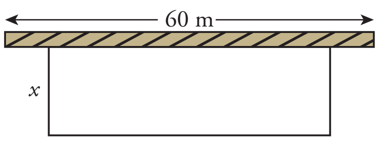
Eje Z: $z = 0 \to (0, 0)$

Vértice: $\left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{9}{16}\right)$

La superficie máxima es $\dfrac{9}{16} = 0{,}5625$ m^2, que corresponde a un marco cuadrado de lado 0,75 m.

Página 146

27 **Con 100 metros de valla queremos acotar un recinto rectangular aprovechando una pared.**



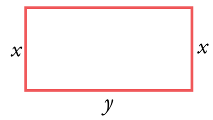
a) Llama x a uno de los lados de la valla. ¿Cuánto valen los otros dos lados?

b) Construye la función que nos da el área. ¿Cuándo se hace máxima y cuánto vale ese máximo?

c) ¿Cuál es su dominio de definición?

a) $2x + y = 100 \;\rightarrow\; y = 100 - 2x$

El lado de enfrente a la pared mide: $100 - 2x$.



b) Área $= xy \;\rightarrow\;$ Área $= x(100 - 2x)$

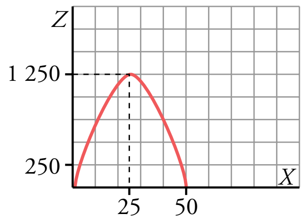
Representamos la función $z = x(100 - 2x)$

Puntos de corte con los ejes:

Eje X: $x(100 - 2x) = 0 \begin{cases} x = 0 \text{ m} \\ x = 50 \text{ m} \end{cases}$

Eje Z: $z = 0 \;\rightarrow\; (0, 0)$

Vértice: (25, 1 250)



Se hace máxima el área cuando: $\begin{cases} x = 25 \text{ m} \\ y = 50 \text{ m} \end{cases}$

El área máxima es de 1 250 m^2

c) Dominio de definición: (0, 50)

28 **El coste por unidad de fabricación de unas pegatinas disminuye según el número de unidades fabricadas y viene dado por la función:**

$$y = \frac{0,5x + 10}{x}$$

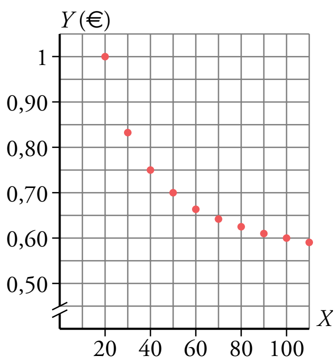
a) Haz la gráfica correspondiente. ¿Se pueden unir los puntos que has representado?

b) ¿Cuál será el coste cuando el número de pegatinas se hace muy grande?

$$y = \frac{0,5x + 10}{x}$$

a) Hacemos la tabla de valores:

x	20	30	40	50	60	70	80	90	100
y	1	$0,8\overset{\frown}{3}$	0,75	0,7	$0,\overset{\frown}{6}$	0,64	0,625	$0,\overset{\frown}{61}$	0,6



No se pueden unir los puntos, ya que el número de pegatinas es un número entero (y positivo).

b) Hacemos una tabla de valores con el número de pegatinas muy alto:

x	1 000	10 000	100 000	1 000 000
y	0,51	0,501	0,5001	0,50001

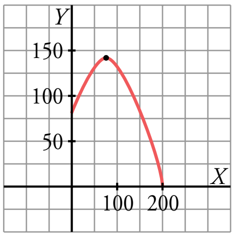
El coste de las pegatinas, si el número de estas es muy grande, es de 50 céntimos por pegatina.

29 **Tenemos 200 kg de naranjas que hoy se venderían a 0,40 €/kg. Cada día que pasa se estropea 1 kg y el precio aumenta 0,01 €/kg.**

¿Cuándo hemos de vender las naranjas para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál será ese beneficio?

La función que representa el coste de todas las naranjas en función del número de días que ha pasado es: $y = (200 - x)(0,4 + 0,01x)$

Dibujamos esta función y vemos cuál es su máximo:



$V = (80, 144)$

Se han de vender dentro de 80 días, y el beneficio será de 144 €.

30 **Los gastos anuales de una empresa por la fabricación de x ordenadores son $G(x) = 20000 + 250x$ en euros, y los ingresos que se obtienen por las ventas son $I = 600x - 0,1x^2$ en euros.**

¿Cuántos ordenadores deben fabricarse para que el beneficio (ingresos menos gastos) sea máximo?

La función beneficio es:

$B = I - G = 600x - 0,1x^2 - (20\,000 + 250x) \rightarrow$

$\rightarrow B(x) = -0,1x^2 + 350x - 20\,000$

El vértice es el máximo: $V = \dfrac{-350}{-2 \cdot 0,1} = 1\,750$

Se deben fabricar 1 750 ordenadores para que el beneficio sea máximo.

31 **La gráfica de una función exponencial del tipo $y = ka^x$ pasa por los puntos (0, 3) y (1; 3,6).**

a) Calcula k y a.

b) ¿Es creciente o decreciente?

c) Representa la función.

a) Si pasa por el punto (0, 3) $\rightarrow$ $3 = ka^0$ $\rightarrow$ $k = 3$

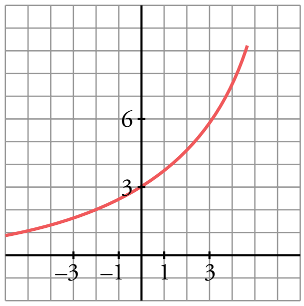
Si pasa por el punto (1; 3,6) $\rightarrow$ $3{,}6 = ka^1$ $\rightarrow$ $3{,}6 = 3a$ $\rightarrow$ $a = 1{,}2$

Tenemos la función $y = 3 \cdot (1{,}2)^x$

b) Es una función creciente.

c) Hacemos una tabla de valores:

x	–2	–1	0	1	2	3
y	2,08	2,5	3	3,6	4,32	5,18



32 **La función exponencial $y = ka^x$ pasa por los puntos (0, 2) y (2; 1,28). Calcula k y a y representa la función.**

$y = ka^x$

Si pasa por el punto (0, 2), entonces:

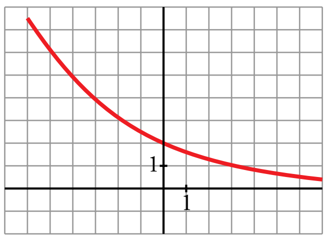
$$2 = k \cdot a^0 \rightarrow 2 = k$$

Si pasa por el punto (2; 1,28), entonces:

$$1{,}28 = k \cdot a^2 \rightarrow 1{,}28 = 2a^2 \rightarrow a^2 = 0{,}64 \rightarrow a = 0{,}8$$

La función es: $y = 2 \cdot (0{,}8)^x$

x	y
–3	3,906
–2	3,125
–1	2,5
0	2
1	1,6
2	1,28
3	1,024



33 **Llamamos inflación a la pérdida de valor del dinero; es decir, si un artículo que costó 100 € al cabo de un año cuesta 115 €, la inflación habrá sido del 15%. Supongamos una inflación constante del 15% anual. ¿Cuánto costará dentro de 5 años un terreno que hoy cuesta 50 000 euros?**

$P = 50\,000 \cdot (1{,}15)^5 = 100\,567{,}86$ € costará el terreno dentro de cinco años.

34 **En el contrato de alquiler de un apartamento figura que el precio subirá un 5% anual. Si el precio era de 250 € mensuales, ¿cuál será dentro de 5 años?**

Escribe la función que da el precio del alquiler según los años transcurridos.

$P_5 = 250 \cdot (1{,}05)^5 = 319{,}07$ € pagará dentro de cinco años.

La función que relaciona el precio del alquiler con los años transcurridos es $P = 250 \cdot 1{,}05^t$.

35 **Una furgoneta que costó 20 000 € se deprecia a un ritmo de un 12% anual. ¿Cuál será su precio dentro de 4 años?**

Halla la función que da el precio del vehículo según los años transcurridos, y calcula cuánto tiempo tardará el precio en reducirse a la mitad.

$P_4 = 20\,000 \cdot (1 - 0{,}12)^4 = 20\,000 \cdot 0{,}88^4 \approx 11\,993{,}90$ €

$P = 20\,000 \cdot 0{,}88^t$

Si el precio final es de 10 000 euros:

$10\,000 = 20\,000 \cdot 0{,}88^t \;\rightarrow\; 0{,}5 = 0{,}88^t \;\rightarrow\; t \approx 5{,}4$ años

36 **En un bosque en etapa de crecimiento se mide el volumen de madera y se obtiene 10 250 m³. Se observa que el bosque crece a un ritmo de un 2% anual.**

a) ¿Qué cantidad de madera tendrá dentro de 10 años?

b) ¿Cuál es la función que da la cantidad de madera según los años transcurridos, suponiendo que se mantenga el ritmo de crecimiento?

a) $V = 10\,250 \cdot (1{,}02)^{10} = 12\,494{,}7$ m³ de madera habrá dentro de diez años.

b) $V = 10\,250 \cdot (1{,}02)^t$

37 **Un millón de euros se coloca al 8% de interés anual. ¿En cuánto se convierte al cabo de 3 años? ¿Y al cabo de x años?**

Al cabo de tres años tendremos: $C = 1\,000\,000 \cdot (1{,}08)^3 = 1\,259\,712$ €

Al cabo de x años tendremos: $C = 1\,000\,000 \cdot (1{,}08)^x$ €

38 **a) Estudia, sobre la gráfica de la función $y = x^2 - 4x - 5$, para qué valores de x se verifica $x^2 - 4x - 5 > 0$.**

b) ¿Qué valores de x cumplirán la desigualdad $x^2 - 4x - 5 \le 0$?

a) Representamos la parábola $y = x^2 - 4x - 5$.

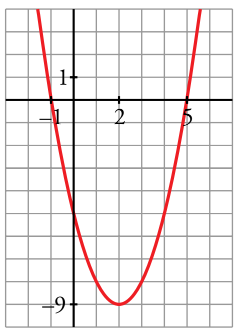
Puntos de corte con los ejes:

Eje X: $y = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 4x - 5 = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} = \begin{cases} x_1 = 5 \;\rightarrow\; (5, 0) \\ x_2 = -1 \;\rightarrow\; (-1, 0) \end{cases}$$

Eje Y: $x = 0 \;\rightarrow\; y = -5 \;\rightarrow\; (0, -5)$

Vértice: $(2, -9)$



$x^2 - 4x - 5 > 0$ es el intervalo que queda por encima del eje X.

Luego $x^2 - 4x - 5 > 0$ ocurre en $(-\infty, -1) \cup (5, +\infty)$

b) $x^2 - 4x - 5 \le 0$ es el intervalo de la gráfica que queda por debajo del eje X; luego $x^2 - 4x - 5 \le 0$ ocurre en $[-1, 5]$.

39 **Representa las siguientes funciones:**

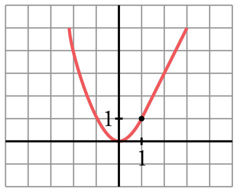
a) $y = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$ b) $y = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } x \le 1 \\ x + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) $y = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

- Representamos la parábola $y = x^2$ definida para $x < 1$:

  $V(0, 0)$

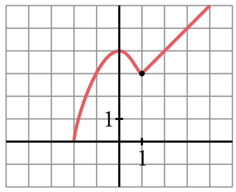
x	–2	–1	0,99
y	4	1	0,9801



- Representamos la recta $y = 2x - 1$ para $x \ge 1$:

x	1	3
y	1	5

b) $y = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } x \le 1 \\ x + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$



- La parábola $y = 4 - x^2$ tiene su vértice en (0, 4); está definida para $x \le 1$.

x	–2	–1	1
y	0	3	3

- La recta $y = x + 2$, definida para $x > 1$, pasa por los puntos (2, 4) y (3, 5).

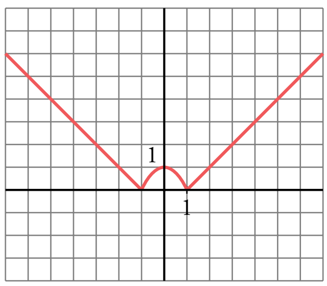
40 **Representa:**

a) $f(x) = \begin{cases} -1 - x & \text{si } x < -1 \\ 1 - x^2 & \text{si } -1 \le x \le 1 \\ x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ -x^2 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

a) $f(x) = \begin{cases} -1 - x & \text{si } x < -1 \\ 1 - x^2 & \text{si } -1 \le x < 1 \\ x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

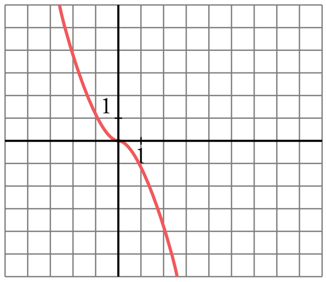
- La recta $y = -1 - x$ está definida para $x < -1$:

x	–2	–1,5
y	1	0,5



- La parábola $y = 1 - x^2$ definida si $-1 \le x \le 1$, corta al eje X en (–1, 0) y (1, 0), y al eje Y en (0, 1), vértice a su vez de la parábola.
- La recta $y = x - 1$ está definida para $x > 1$ y pasa por (2, 1) y (3, 2).

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ -x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$



- La parábola $y = x^2$, definida para $x < 0$, pasa por (–1, 1) y (–2, 4).
- La parábola $y = -x^2$, definida para $x \geq 0$, tiene su vértice en (0, 0) y pasa por (1, –1) y (2, –4).

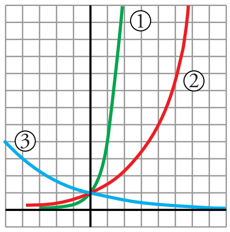
Página 147

REFLEXIONA SOBRE LA TEORÍA

41 La expresión analítica de estas tres gráficas es de la forma $y = a^x$.

Di el valor de a en cada una de ellas.

(En los ejes se ha tomado la misma escala.)



① $a = 4 \;\rightarrow\; y = 4^x$

② $a = 1{,}5 \;\rightarrow\; y = 1{,}5^x$

③ $a = 0{,}76 \;\rightarrow\; y = 0{,}76^x$

42 Todas las funciones exponenciales de la forma $y = a^x$ pasan por un mismo punto. Di cuál es y justifícalo. ¿En qué casos la función es decreciente?

Todas las exponenciales de este tipo pasan por el punto (0, 1) porque cualquier número elevado a cero es uno.

La función es decreciente cuando $0 < a < 1$.

43 Calcula b para que el vértice de la parábola $y = x^2 + bx + 10$ esté en el punto (3, 1). ¿Cuál es su eje de simetría? ¿Cuáles son los puntos de corte con los ejes?

La abscisa del vértice es: $V_a = \frac{-b}{2a}$. En este caso: $a = 1$, $V_a = 3$.

$3 = \frac{-b}{2 \cdot 1} \;\rightarrow\; b = -6$

El eje de simetría es la recta $x = 3$.

Puntos de corte con los ejes:

Eje X: $x^2 - 6x + 10 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 40}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2} \;\rightarrow$

$\rightarrow$ No tiene puntos de corte con el eje X.

Eje Y: $y = 10 \;\rightarrow$ El punto de corte con el eje Y es el punto (0, 10).

44 **¿Cuánto debe valer k para que la parábola $y = 4x^2 - 20x + k$ tenga un solo punto de corte con el eje de abscisas?**

¿Para qué valores de k no cortará al eje X?

Para calcular los puntos de corte con el eje X, hacemos:

$$4x^2 - 20x + k = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 16k}}{8}$$

Para que solo haya una solución en esta ecuación:

$$400 - 16k = 0 \;\rightarrow\; k = \frac{400}{16} = 25$$

Solo hay un punto de corte con el eje X si $k = 25$.

$$400 - 16k < 0 \;\rightarrow\; -16k < -400 \;\rightarrow\; k > 25$$

La parábola no corta al eje X si $k > 25$.

45 **La parábola $y = ax^2 + bx + c$ pasa por el origen de coordenadas. ¿Cuánto valdrá c? Si, además, sabes que pasa por los puntos (1, 3) y (4, 6), ¿cómo calcularías a y b? Halla a y b y representa la parábola.**

Si pasa por el origen de coordenadas, cuando $x = 0 \;\rightarrow\; y = 0$

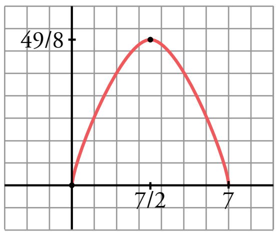
Por tanto: $0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \;\rightarrow\; c = 0$

Por otro lado: $\left.\begin{array}{l} 3 = a + b \\ 6 = 16a + 4b \end{array}\right\}$ $\begin{array}{r} -12 = -4a - 4b \\ 6 = 16a + 4b \\ \hline -6 = 12a \end{array} \;\rightarrow\; a = \dfrac{-1}{2}$

$$b = 3 + \frac{1}{2} \;\rightarrow\; b = \frac{7}{2}$$

La parábola es: $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{7}{2}x$

$$V = \left(\frac{7}{2}, \frac{49}{8}\right)$$



46 **Calcula a y b para que la función $y = \dfrac{a}{x - b}$ pase por los puntos (2, 2) y (–1, –1).**

$$\left.\begin{array}{l} \text{Para que pase por el punto } (2, 2)\text{: } 2 = \dfrac{a}{2 - b} \\ \text{Para que pase por el punto } (-1, -1)\text{: } -1 = \dfrac{a}{-1 - b} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 4 - 2b \\ a = 1 + b \\ \hline 0 = 3 - 3b \;\rightarrow\; b = 1 \;\rightarrow\; a = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \text{ La función es } y = \frac{2}{x - 1}.$$

PROFUNDIZA

47 **Aplica la definición de logaritmo para calcular x en cada caso:**

a) $log_2 (2x - 1) = 3$ **b)** $log_2 (x + 3) = -1$

c) $log\ 4x = 2$ **d)** $log\ (x - 2) = 2{,}5$

e) $log\ (3x + 1) = -1$ **f)** $log_2 (x^2 - 8) = 0$

a) $log_2 (2x - 1) = 3 \rightarrow 2^3 = 2x - 1 \rightarrow 8 = 2x - 1 \rightarrow 9 = 2x \rightarrow x = \dfrac{9}{2}$

b) $log_2 (x + 3) = -1 \rightarrow 2^{-1} = x + 3 \rightarrow \dfrac{1}{2} - 3 = x \rightarrow x = -\dfrac{5}{2}$

c) $log\ 4x = 2 \rightarrow 10^2 = 4x \rightarrow 100 = 4x \rightarrow x = 25$

d) $log\ (x - 2) = 2{,}5 \rightarrow 10^{2{,}5} = x - 2 \rightarrow \sqrt{10^5} = x - 2 \rightarrow$

$\rightarrow x = 2 + \sqrt{10^5} \rightarrow x = 2 + 100\sqrt{10} \approx 318{,}23$

e) $log\ (3x + 1) = -1 \rightarrow 10^{-1} = 3x + 1 \rightarrow \dfrac{1}{10} - 1 = 3x \rightarrow$

$\rightarrow x = \dfrac{-9/10}{3} \rightarrow x = -\dfrac{3}{10}$

f) $log_2 (x^2 - 8) = 0 \rightarrow 2^0 = x^2 - 8 \rightarrow 1 = x^2 - 8 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow$

$\rightarrow x = 3;\ x = -3$

48 **Una ecuación en la que la incógnita está en el exponente se llama ecuación exponencial. Por ejemplo, $3^{1 - x^2} = 1/27$. Se resuelve así: $3^{1 - x^2} = \dfrac{1}{27}$. Como $\dfrac{1}{27} = 3^{-3}$: $3^{1 - x^2} = 3^{-3} \rightarrow 1 - x^2 = -3 \rightarrow x = 2;\ x = -2$.**

Resuelve estas ecuaciones exponenciales, expresando como potencia el segundo miembro:

a) $3^{x^2 - 5} = 81$ **b)** $2^{2x - 3} = 1/8$ **c)** $2^{x + 1} = \sqrt[3]{4}$ **d)** $2^{x + 1} = 0{,}5^{3x - 2}$

a) $3^{x^2 - 5} = 81 \rightarrow 3^{x^2 - 5} = 3^4 \rightarrow x^2 - 5 = 4 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3$

b) $2^{2x - 3} = \dfrac{1}{8} \rightarrow 2^{2x - 3} = 2^{-3} \rightarrow 2x - 3 = -3 \rightarrow x = 0$

c) $2^{x + 1} = \sqrt[3]{4} \rightarrow 2^{x + 1} = 2^{2/3} \rightarrow x + 1 = \dfrac{2}{3} \rightarrow x = \dfrac{2}{3} - 1 \rightarrow x = -\dfrac{1}{3}$

d) $2^{x + 1} = 0{,}5^{3x - 2} \rightarrow 2^{x + 1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{3x - 2} \rightarrow 2^{x + 1} = 2^{-(3x - 2)} \rightarrow$

$\rightarrow x + 1 = -(3x - 2) \rightarrow 4x = 1 \rightarrow x = \dfrac{1}{4}$

49 **Para resolver $3^x = 1\,000$ no podemos aplicar el procedimiento del ejercicio anterior.**

a) Busca la solución por tanteo con la calculadora.

b) Sabes que la función inversa de $y = 3^x$ es $y = log_3\, x$. Por ello:

$$3^x = 1000 \Leftrightarrow x = log_3\, 1000$$

Obtén x y compara el resultado con el que obtuviste en el apartado a).

a) $3^6 = 729$ y $3^7 = 2\,187$

$3^{6,2} = 908{,}13\ldots$ y $3^{6,3} = 1\,013{,}59\ldots$

$3^{6,28} = 991{,}56\ldots$ y $3^{6,29} = 1\,002{,}51\ldots$

$3^{6,287} = 999{,}22\ldots$ y $3^{6,288} = 1\,000{,}31\ldots$

$3^{6,2877} = 999{,}98\ldots$ y $3^{6,2878} = 1\,000{,}09\ldots$

Luego $3^x = 1\,000 \rightarrow x \approx 6{,}2877$

b) $3^x = 1\,000 \Leftrightarrow x = log_3\, 1\,000 = \dfrac{log\, 1\,000}{log\, 3} \approx 6{,}2877$

El resultado es el mismo que el obtenido en el apartado a).

50 **Resuelve, como en el ejercicio anterior, las siguientes ecuaciones:**

a) $5^x = 42$ b) $4^{x-1} = 186{,}4$ c) $2^{x^2+1} = 87$ d) $1{,}5^x = 0{,}84$

a) $5^x = 42$

$$x = log_5\, 42 = \frac{log_{10}\, 42}{log_{10}\, 5} = 2{,}32$$

b) $4^{x-1} = 186{,}4$

$$log_4\, 186{,}4 = x - 1 \rightarrow x - 1 = \frac{log_{10}\, 186{,}4}{log_{10}\, 4} = 3{,}77 \rightarrow x = 3{,}77 + 1 \rightarrow x = 4{,}77$$

c) $2^{x^2+1} = 87$

$$x^2 + 1 = log_2\, 87 \rightarrow x^2 + 1 = \frac{log_{10}\, 87}{log_{10}\, 2} \rightarrow x^2 + 1 = 6{,}44 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 = 5{,}44 \rightarrow x = \pm 2{,}33$$

d) $1{,}5^x = 0{,}84$

$$x = log_{1,5}\, 0{,}84 \rightarrow x = \frac{log_{10}\, 0{,}84}{log_{10}\, 1{,}5} \rightarrow x = -0{,}43$$

51 Resuelve estas ecuaciones:

a) $7^{x+2} = 823\,543$ **b)** $1{,}5^x = 318$ **c)** $2^{x^2-2} = 1753$ **d)** $4^{1-x} = 0{,}125$

a) $7^{x+2} = 823\,543$

$7^{x+2} = 7^7 \rightarrow x + 2 = 7 \rightarrow x = 5$

b) $1{,}5^x = 318$

$x = log_{1,5}\, 318 \rightarrow x = \dfrac{log_{10}\, 318}{log_{10}\, 1{,}5} = 14{,}21 \rightarrow x = 14{,}21$

c) $2^{x^2-2} = 1\,753$

$x^2 - 2 = log_2\, 1\,753 \rightarrow x^2 - 2 = \dfrac{log_{10}\, 1\,753}{log_{10}\, 2} \rightarrow x^2 - 2 = 10{,}77 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 = 12{,}77 \rightarrow x = \pm 3{,}57$

d) $4^{1-x} = 0{,}125$

$1 - x = log_4\, 0{,}125 \rightarrow 1 - x = \dfrac{log_{10}\, 0{,}125}{log_{10}\, 4} \rightarrow 1 - x = -1{,}5 \rightarrow x = 2{,}5$

52 (ESTÁ RESUELTO EN EL LIBRO).

53 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3^x + 3^{x+2} = 30$ **b)** $5^{x+1} + 5^x + 5^{x-1} = \dfrac{31}{5}$

c) $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$ **d)** $2^{x-1} + 4^{x-3} = 5$ **e)** $4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0$

a) $3^x + 3^{x+2} = 30$

$3^x + 3^x \cdot 3^2 = 30$. Hacemos el cambio $3^x = z$:

$z + 9z = 30 \rightarrow 10z = 30 \rightarrow z = 3$

$3^x = 3 \rightarrow x = 1$

b) $5^{x+1} + 5^x + 5^{x-1} = \dfrac{31}{5}$

$5^x \cdot 5 + 5^x + \dfrac{1}{5} \cdot 5^x = \dfrac{31}{5}$. Hacemos el cambio $5^x = z$:

$5z + z + \dfrac{1}{5}z = \dfrac{31}{5} \rightarrow 25z + 5z + z = 31 \rightarrow 31z = 31 \rightarrow z = 1$

$5^x = 1 \rightarrow x = 0$

c) $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

$(2^2)^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0 \rightarrow (2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

Hacemos el cambio $2^x = z$:

$$z^2 - 5z + 4 = 0 \rightarrow z = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \begin{cases} z_1 = 4 \\ z_2 = 1 \end{cases}$$

$2^x = 4 \rightarrow x = 2$

$2^x = 1 \rightarrow x = 0$

d) $2^{x-1} + 4^{x-3} = 5$

$2^{x-1} + (2^2)^{x-3} = 5 \rightarrow 2^{x-1} + 2^{2x-6} = 5 \rightarrow \frac{1}{2} \cdot 2^x + \frac{1}{2^6} \cdot (2^x)^2 = 5$

Hacemos el cambio $2^x = z$:

$$\frac{1}{2}z + \frac{1}{64}z^2 = 5 \rightarrow 32z + z^2 = 320 \rightarrow z^2 + 32z - 320 = 0$$

$$z = \frac{-32 \pm \sqrt{1\,024 + 1\,280}}{2} = \frac{-32 \pm 48}{2} \begin{cases} z_1 = 8 \\ z_2 = -40 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2^x = 8 \rightarrow x = 3 \\ 2^x = -40 \rightarrow \text{No tiene solución.} \end{array}\right\} \rightarrow x = 3$$

e) $4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0$

$(2^2)^x - 3 \cdot 2^x \cdot 2 + 8 = 0 \rightarrow (2^x)^2 - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$

Hacemos el cambio $2^x = z$:

$$z^2 - 6z + 8 = 0 \rightarrow z = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} \begin{cases} z_1 = 4 \\ z_2 = 2 \end{cases}$$

$2^x = 4 \rightarrow x = 2$

$2^x = 2 \rightarrow x = 1$